

Übung 1. Streuung an der harten Kugel

- (a) Das Problem wird wie gewohnt in Winkel- und Radialteil zerlegt. Der Radialteil $R_l(r)$ kann für jede Drehimpulsquantenzahl l separat gelöst werden. Für $r > r_0$ kennen wir die Wellenfunktion bereits. Es gilt

$$R_l(r) = (1/2)[h_l^{(2)}(kr) + e^{2i\delta_l}h_l^{(1)}(kr)] \quad (\text{L.1})$$

$$= e^{i\delta_l}[\cos(\delta_l)j_l(kr) - \sin(\delta_l)n_l(kr)]. \quad (\text{L.2})$$

Für eine harte Kugel ist die Randbedingung gegeben durch $R_l(r_0) = 0$ und mit $\rho_0 = kr_0$

$$\tan(\delta_l) = \frac{j_l(\rho_0)}{n_l(\rho_0)} \quad (\text{L.3})$$

Für die Drehimpulse $l = 0, 1$ sind die Bessel- und Neumannfunktionen gegeben durch

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2}, \quad (\text{L.4})$$

$$n_0(x) = -\frac{\cos(x)}{x}, \quad n_1(x) = -\frac{\cos(x) + x \sin(x)}{x^2}. \quad (\text{L.5})$$

Unter Benutzung der trigonometrischen Formel $\tan(a+b) = [\tan(a)+\tan(b)]/[1-\tan(a)\tan(b)]$ vereinfachen sich die Randbedingungen zu

$$\tan(\delta_0) = -\tan(\rho_0), \quad \tan(\delta_1) = -\frac{\tan(\rho_0) - \rho_0}{1 + \rho_0 \tan(\rho_0)} = -\tan(\rho_0 - \arctan(\rho_0)) \quad (\text{L.6})$$

Wir finden also (exakt) $\delta_0 = -\rho_0$ und (approximativ) $\delta_1 \approx -\rho_0^3/3$. Wir haben somit Radialwelle für $l = 0$ exakt bestimmt

$$R_0(\rho = kr) = e^{-i\rho_0} \frac{\sin(\rho - \rho_0)}{\rho} \quad (\text{L.7})$$

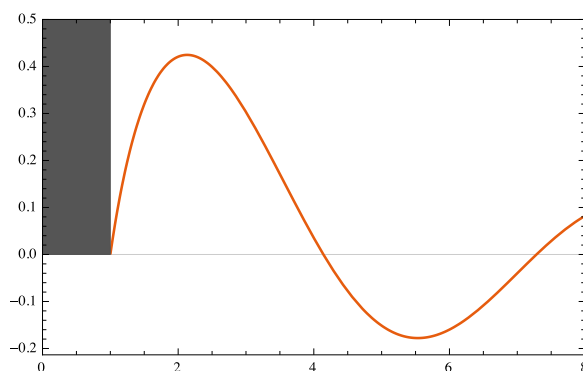


Abbildung 1: Radiale Wellenfunktion $R_{l=0}(\rho_0 x)$ als Funktion von x für eine harte Kugel. Die Nullstellen sind bei $x = 1 + n\pi$.

(b) Der totale Wirkungsquerschnitt [siehe Skript Gl. (6.51)] ergibt sich aus

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_l \frac{4\pi}{k^2} \frac{2l+1}{1 + \cot^2(\delta_l)} = \frac{4\pi r_0^2}{\rho_0^2} \sum_l (2l+1) \sin^2(\delta_l) \quad (\text{L.8})$$

also müssen wir $\sin(\delta_l)$ in Potenzen von ρ_0 entwickeln. Wir finden für kleine Energien gelten folgende Verhalten

$$j_l(\rho_0) = \frac{\rho_0^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(\rho_0) = \frac{(2l-1)!!}{\rho_0^{l+1}}, \quad \text{und somit} \quad \tan(\delta_l) \sim \rho_0^{2l+1} \quad (\text{L.9})$$

Bis zu vierter Ordnung in ρ_0 finden wir dann

$$\sigma_{\text{tot}} = 4\pi r_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{3} + \frac{17}{45} \rho_0^4\right) \longrightarrow 4\pi r_0^2 \quad (\text{L.10})$$

Klassisch streut die Kugel mit einem (viermal) kleineren Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{klass}} = \pi r_0^2$.

Übung 2. Streulängen

(a) From the previous exercise we know that s -wave phase shift for the scattering from a hard sphere of radius r_0 is given by $\delta_0 = -kr_0$. Hence

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cot(\delta_0) = -\frac{1}{r_0} = -\frac{1}{a}, \quad \Rightarrow \quad a = r_0 \quad (\text{L.11})$$

(b) From the script we know that for the low energies scattering the partial cross section behaves as $\sigma_l \sim k^{4l}$ (cf. section 6.4.4 of the script). Hence the main contribution into the total cross section comes from the s -wave scattering, and

$$\sigma \approx \sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(\delta_0) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 4\pi a^2. \quad (\text{L.12})$$

Above we used eq. (6.52) of the script.

(c) The radial part of the wavefunction outside the scattering region has the following asymptotic behavior (cf. eq. (6.55) of the script):

$$R_0^\infty(r) \sim e^{i\delta_0} j_0(kr + \delta_0). \quad (\text{L.13})$$

From this we can check the asymptotic behavior of $u(r)$ given in the exercise sheet:

$$u^\infty(r) = rR_0^\infty(r) \sim e^{i\delta_0} j_0(kr + \delta_0) \sim \sin(kr) + \tan(\delta_0) \cos(kr) \sim \sin(kr + \delta_0). \quad (\text{L.14})$$

At small energies ($k \approx 0$) we have

$$u^\infty(r) \sim r + \frac{1}{k \cot(\delta_0)} = r - a. \quad (\text{L.15})$$

This can be understood as the infinitely long wavelength limit of the wavefunction outside the scattering region (L.14). Note that a is the intercept of the asymptotic wavefunction. Hence the root of the asymptotic wavefunction is the scattering length a .

In the case of an attractive (repulsive) potential $V < 0$ ($V > 0$) the wavefunction is “pulled” (“pushed”) by the scattering region. Due to the constraint $u(r=0) = 0$ it follows from the last statement that $a < 0$ ($a > 0$) for $V < 0$ ($V > 0$) (see Fig. 2).

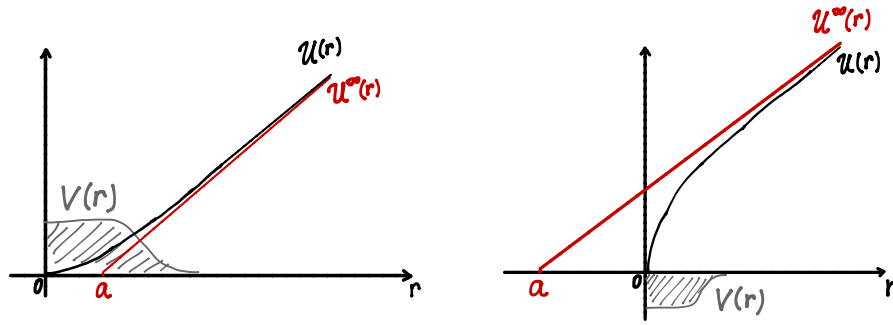


Abbildung 2: The sketch of the function $u(r)$ and $u^\infty(r)$ for repulsive and attractive potentials.

(d) Above we learned that $u^\infty(r) \sim (r - a)$. Hence the wavefunction has the asymptotic form

$$R_0^\infty(r) = \chi \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad (\text{L.16})$$

where χ is a constant and it can be determined by $\chi = \partial_r(rR_0^\infty(r))$. Since we are interested in the asymptotic behavior of the wavefunction, we want to find an effective potential, which gives the same asymptotic form. In the limit $k \rightarrow 0$ the equation for the radial part of the wavefunction for a given potential $V_{\text{eff}}(r)$ has the following form

$$[\nabla^2 + k^2]R_0(r) \approx \nabla^2 R_0(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V_{\text{eff}}(r) R_0(r). \quad (\text{L.17})$$

Using $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})$, we can write the following equation for $R_0^\infty(r)$

$$\nabla^2 R_0^\infty(r) = 4\pi\chi a \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = 4\pi a \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \partial_r(rR_0^\infty(r)) \quad (\text{L.18})$$

Comparing Eq. (L.18) with (L.17), we find for the potential which gives $R_0^\infty(r)$ as a solution

$$V_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2 a}{2m} 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \partial_r r. \quad (\text{L.19})$$

Übung 3. Streulänge für den sphärischen Potentialtopf

Aus Aufgabe 2 wissen wir, dass das Vorzeichen (positiv / negativ) der Streulänge den Charakter (repulsiv / attraktiv) des Streuzentrums für den Bereich niedriger Energien bestimmt. Für einen Potentialtopf der Tiefe $V_0 < 0$ wollen wir deshalb die Streulänge berechnen. Wir betrachten deshalb nur den ($l = 0$)-Sektor und finden mit $R_0(r) = u(r)/r$

$$u(r) \propto \begin{cases} \sin(kr + \delta_0) & r > r_0 \\ \sin(\tilde{k}r) & r < r_0, \end{cases} \quad (\text{L.20})$$

wobei $\tilde{k}^2 = k^2 + 2m|V_0|/\hbar^2$. Die Randbedingung $\partial_r \ln u(r_0^-) = \partial_r \ln u(r_0^+)$ bei r_0 liefert uns dann

$$k \cot(kr_0 + \delta_0) = \tilde{k} \cot(\tilde{k}r_0) \quad (\text{L.21})$$

(a) Aus der Berechnung der gebundenen Zustände [siehe Skript Gl. (5.33) und (5.35)] folgt, dass ein neuer gebundener Zustand auftaucht wenn $2mr_0^2|V_0|/\hbar^2 = \pi(n + 1/2)$ (mit $n \in \mathbb{N}$).

Diese Bedingung nimmt mit dem dimensionslosen Parameter $\chi_0 = \text{sgn}(V_0)\sqrt{2m|V_0|r_0^2}/\hbar$ die einfache Form $\chi_0 = -(\pi/2)(2n+1)$. Für Potentialtiefen (mit $0 < \epsilon \ll 1$)

$$V_0 = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} [(\pi/2)^2(2n+1)^2](1+\epsilon) \quad \chi_0 = -(\pi/2)(2n+1)\sqrt{1+\epsilon} \quad (\text{L.22})$$

ist ein gebundener Zustand nahe bei $E = 0$. Für kleinen kr_0 und ϵ ergibt Gl. (L.21)

$$k \cot(\delta_0) = -\frac{\pi^2(2n+1)^2}{8r_0}\epsilon + \mathcal{O}(k^2). \quad (\text{L.23})$$

Daraus folgt sofort für die Streulänge

$$a = \frac{8r_0}{\pi(2n+1)^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (\text{L.24})$$

Jedes Mal wenn ein gebundener Zustand bei $E = 0$ auftaucht divergiert die Streulänge wie ϵ^{-1} . Der Potentialtopf ist in diesem Fall extrem repulsiv ($a/r_0 \gg 1$). Diese Singularität wird für grosse n immer schärfer wegen dem Faktor $(2n+1)^{-2}$. Bemerke, dass das Ergebnis auch für $\epsilon < 0$ gültig ist, d.h. kurz bevor ein neuer Zustand im Topf gebunden wird ist das Potential extrem attraktiv ($-a/r_0 \gg 1$).

(b) Wir können Gleichung (L.21) auch exakt lösen. Dazu schreiben wir

$$\delta_0 + kr_0 = \arctan(k \tan(\tilde{k}r_0)/\tilde{k}) \quad (\text{L.25})$$

und finden

$$a = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan(\delta_0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \tan\left(kr_0 - \arctan\left[kr_0 \frac{\tan(\chi_0)}{\chi_0}\right]\right)/k = r_0 \left(1 - \frac{\tan \chi_0}{\chi_0}\right) \quad (\text{L.26})$$

Weg von den Divergenzen des Tangenz strebt $\tan(\chi_0)/\chi_0$ gegen Null. Der attraktive Potentialtopf verhält sich also hauptsächlich repulsiv mit $a = r_0$. Für die repulsive Barriere $V_0 > 0$ erhalten wir durch die Substitution $\tilde{k} \rightarrow i\tilde{k}$ und $\chi_0 = -\chi_0$

$$a = r_0 \left(1 - \frac{\tanh \chi_0}{\chi_0}\right) \quad (\text{L.27})$$

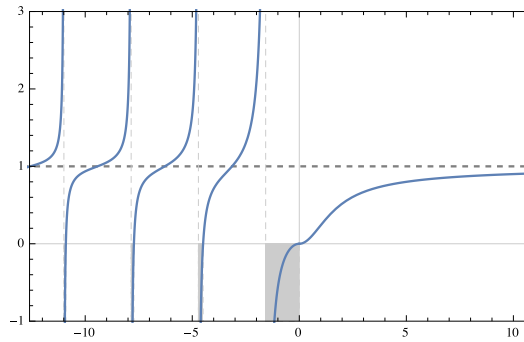


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Streulänge a/r_0 als Funktion des Parameters $\chi_0 \propto \sqrt{V_0}$. Der Topf ($\chi_0 < 0$) ist effektiv repulsiv, ausser in den grauen Bereichen. Für $-\chi_0 \gg 1$ (weg von den $-\pi(n+1/2)$) verhält sich das attraktive Potential wie eine harte repulsive Kugel. Die Streulänge der repulsiven Kugel steht gegen den Wert r_0 einer harten Kugel [siehe Gl. (L.11)]