

QUANTUM FIELD THEORY, I

HS 2008

Jürg Fröhlich
ETH Zürich

CONTENTS

1. Introduction: Why QFT? What are its applications? Notations; natural units.
2. Structure of the Lorentz- and the Poincaré groups; relativistic quantum mechanics of free particles.
3. Free particles with spin 0, Klein-Gordon equation, free scalar fields, Δ_+ , Δ and Δ_F
4. Free particles with spin $1/2$, Dirac equation, free Dirac fields, S_+ , S and S_F ; coupling to an external electromagnetic field and gauge invariance.

5. Classical field theory: Lagrange- and Hamilton formalism, Noether's theorem, super symmetry; canonical quantization.
6. Covariant formalism for the electromagnetic field.
7. Interacting fields: Spin- Statistics, PCT; LSZ asymptotic condition, reduction formulae; S-matrix and scattering cross sections
8. Perturbation theory and Feynman rules, Gell-Mann - low formula, renormalized Lagrangians.
9. QED: Processes in lowest order (tree diagrams)
10. QED: Radiative corrections

5

3

Literatur:

- I-Z Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber,
Quantum Field Theory, McGraw-Hill 1980.
- M-S Franz Mandl and Graham Shaw, Quantum
Field Theory, Wiley 1984.
- Ra Pierre Ramond, Field Theory: A Modern Primer,
Addison-Wesley 1989 (2nd ed.)
- Ry Lewis H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge
University Press 1985.
- F-S L. D. Faddeev and A. A. Slavnov, Gauge Fields -
Introduction to Quantum Theory, Frontiers in
Physics, Benjamin 1980.
- Po Stefan Pokorski, Gauge Fields, Cambridge
University Press
- B-D James D. Bjorken and Sidney D. Drell,
(Relativistische Quantenmechanik), Relativisti-
sche Quantenfeldtheorie, Hochschultaschenbücher,
Technische Mechanik
Bibl. Inst. 1966, 1967.

157.021.338.11
6000 50419

B-S N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields," Interscience 1959

Z Jean Zinn-Justin, "Quantum Field Theory and Critical Phenomena" (4th ed.), Oxford Science Publ., Clarendon Press, Oxford 2002.

J. Res Jost, "The General Theory of Quantized Fields," AMS Publ., Providence R.I. 1965.

S-W R. Streater and A.S. Wightman, "PCT, Spin and Statistics and All That," Hochschultaschenbücher

W Steven Weinberg, "The Quantum Theory of Fields," Vol. I (Foundations), Vol. II (Modern Applications), Vol. III (Supersymmetry), Cambridge University Press 1995, 1996, 2000.

I-D C. Itzykson and J.-M. Drouffe, "Statistical Field Theory," Vols. 1 and 2, Cambridge University Press 1989.

1. Einführung

1.1. Geburt der Quantentheorie und der QFT: 1900: Arbei-

ten von M. Planck zur Hohlraumstrahlung.

Ende 20^{er} Jahre: Born, Heisenberg und Jordan,

einerseits, und Dirac, andererseits, entwickeln die "nicht-relativistische" QED" (Pauli-Fierz Modell).

30^{er} Jahre: Heisenberg, Pauli, ..., Fierz entwickeln

die relativistische Theorie freier Felder in Poincaré-kovarianter Form. Nicht-kov. Störungstheorie in der

QED; erste Versuche in Richtung Renormierungstheorie (Pauli & Weisskopf, ...).

1948 - 1950: Kovariante Formulierung der QED

und ihrer Störungsreihe; Ansätze zu einer systematischen Renormierungstheorie durch Feynman,

Schwinger, Tomonaga und Dyson.

60^{er} Jahre: Allg. störungstheor. Renormierbarkeits-

beweise für $\lambda\phi^4$, QED, ... durch Bogoliubow,

Parasiuk, Hepp, Zimmermann, (Speer, Löwenstein, ...)

Formulierung des sog. Standard Modells der elektro-schwachen WW durch Glashow, Weinberg und Salam.

Feynman Regeln für nicht-abelsche Eichtheorien:

(Feynman, De Witt) Faddeev und Popov.

- Fortschritte in der Vielkörpertheorie und der Theorie kritischer Phänomene. Axiomatische Feldtheorie.

70'er Jahre: Renormierbarkeit nicht-abelscher

Eichtheorien, insb. des Standard Modells der elektro-schwachen WW: 't Hooft und Veltman, Lee und

Zinn-Justin, 't Hooft, Bechi - Rouet - Stora, (BRST, BV)

Wilson's Form der Renormierungsgruppe und ihre

Anwendung auf die Theorie der kritischen Phänomene in der statistischen Mechanik.

Konforme Feldtheorien und ihre Anwendung auf

die Theorie kritischer Phänomene; (Polyakov, Parisi, Mack, Symanzik, ...).

Callan-Symmetrie Gleichung und Anwendungen.

Formulierung der QCD (un gebrochene, nicht-abelsche Eichtheorie mit $SU(3)$ Eichgruppe) als einer Theorie der starken WW (Gell'Mann, Fetsch und Lenzsler)
 \rightarrow Standard Modell der elektro-schwachen und starken WW.

"Asymptotic freedom" der QCD : Politzer, Gross und Wilczek; (Symmetrie, 't Hooft, Coleman).

GUT's und erste Anwendungen auf die Kosmologie.

Supersymmetrie (Wess, Zumino, ...) und Supergravitation.

Konstruktive Quantenfeldtheorie (Symmetrie, Nelson, Glimm und Jaffe).

80^{er} Jahre: Nicht-störungstheoretische Methoden in der QFT, insb. Eichtheorie; Supergravitation und Supertrings; 2D konforme Feldtheorie und Anwendungen auf Stringtheorie und die Theorie kritischer Phänomene.

1.2. Ziel der Vorlesung. Einführung in die klassische Feldtheorie und die QFT; Störungstheorie; elementare Einführung in die Renormierungstheorie; QED. QFT II: Nicht-abelsche Eichtheorien; Pfadintegrale; Standard Modell.

Wichtige Gegenstände, die nicht behandelt werden

können: Einzelheiten zum Standard Modell und zur QCD; Vielkörpertheorie; Theorie kritischer Phänomene.

1.3 Was ist QFT - weshalb QFT?

QFT = Quantentheorie von Systemen mit ∞ vielen Freiheitsgraden

RQFT: Soll Lokalität und Kausalität erfüllen; Poincaré Invarianz.

Ursprünglich ist die QFT ein Versuch,

- Quantenmechanik,
- spezielle Relativitätstheorie, und
- Feldtheorie

in der Form einer mathematisch konsistenten, relativistisch-kovarianten Theorie quantisierter Felder zu vereinigen. Das Hauptziel war, zu einem quantitativen Verständnis der Elementarteilchen-Prozesse und fundamentalen Wechselwirkungen zu gelangen. Später ergaben sich als Nebenziele, die für die Theorie der kondensierten Materie wichtigen Gebiete der Vielkörpertheorie und der kritischen Phänomene feldtheoretisch zu erschliessen; ein überaus erfolgreiches Unternehmen.

Die erste Quantenfeldtheorie war die Quantenelektrodynamik. Sie ist eine der erfolgreichsten und präzisesten Theorien der theoretischen Physik. Einige ihrer grossen Erfolge

waren

- die genaue Beschreibung von Strahlungsvergängen bei Wechselwirkungen zwischen elektrisch geladenen Leptonen, wie Elektronen, Positronen, Muonen;
- die genaue Vorhersage des anomalen, magnetischen Momentes von Leptonen, insbesondere von Elektronen und Positronen. Zeeman: $-\frac{e}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B}$, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$, $g \approx 2$ (Dirac). Definieren

$$\alpha_e := \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2), (\alpha \approx \frac{1}{137})$$

↑
Schwinger (1948)

$$\frac{\alpha}{2\pi} = 0.00116$$

exp. Wert (Kusch, Foley 1947, 1948; M-S):

$$\alpha_e = 0.00119 \pm 0.00005$$

Neuere theoretische und experimentelle Werte:

Berechnung von α_e :

$$\alpha_e \text{ (bis zur Ordnung } \alpha^3) = 0.0011596524 \pm 0.4 \cdot 10^{-9}$$

$$\alpha_e \text{ (exp)} = 0.0011596524 \pm 0.2 \cdot 10^{-9}$$

↑
Van Dyck et al (1978) (M-S)

$$(\text{Mag. Moment: } -\frac{e}{2m} \frac{g}{2} \Rightarrow g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \dots)$$

— Lamb Shift: Strahlungskorrekturen zu den Energie Niveaux im Wasserstoff Atom (und anderen Atomen).

Wir werden sehen, dass die Quantisierung einer klassischen Feldtheorie, wie der Elektrodynamik, die Unterschiede zwischen Teilchen, Wellen und Feldern verwischt. Was ist dann der fundamentalen Unterschied zwischen Elektronen und elektromagnetischen Feld, zum Beispiel?

Elektronen sind materielle Teilchen, quantenmechanische Fermionen. Wir werden sie durch nicht direkt beobachtbare, komplexe Felder beschreiben.

Das elektromagnetische Feld stiftet die e.m. Wechselwirkungen zwischen den materiellen Teilchen. Es ist reell und beobachtbar. Sein Teilchenaspekt wird durch die Photonen wiedergegeben. Diese sind quantenmechanisch Bosonen.

Wir werden sehen, dass die Quantenelektrodynamik ein Paradigma für die spätere Entwicklung der Elementarteilchenphysik in der Form von Quanten- (insb. Eichtheorien) feldtheorie darstellt. Das reicht festigt teilweise den Wunsch und, dass wir uns auf die QED konzentrieren.

Man kann sich nun fragen, wieso man überhaupt eine feldtheoretische Formulierung der Elementarteilchenphysik anstrebt?

- Die Theorie soll relativistisch-kovariant und kausal sein. Das schliesst eine Fernwirkungstheorie im Wesentlichen aus. (No-go Theoreme)
- Die Theorie von Elektronen und Photonen soll im klassischen Limes (Tiefenergie-Limes) die klassische Elektrodynamik reproduzieren.
- Bei der Streuung von Elementarteilchen beobachtet man seit langem Teilchenerzeugung

und Vernichtungsprozesse. Man weiss nicht, wie man solche Prozesse anders als feldtheoretisch beschreiben kann. Versucht man eine relativistisch-invariante, nicht-triviale, kausale S-Matrix zu konstruieren, die keine Teilchen-erzeugungs- und -vernichtungsprozesse beschreibt, so stößt man unter recht allgemeinen An-

nahmen auf die Schlussfolgerung

$$S = \mathbb{1}^{\ast})$$

(Ausnahme: $d=2$!)

- Wir werden sehen, dass die relativistische Quantenmechanik freier Teilchen in ganz natürlicher Weise als Quantentheorie lokaler freier Felder aufgefasst werden.
- Es gibt Folgerungen aus den Grundeigenschaften lokaler Feldtheorien, die experimentell

$\ast)$ $\rightarrow Ax, \text{Leutwyler} \dots$

sehr gut bestätigt sind;

- Zusammenhang zwischen Spin und Statistik (Fierz, Pauli, Lüders und Zumino, Araki); keine geladenen, stabilen Teilchen vom Spin > 1 , keine stabilen Teilchen vom Spin > 2 (Weinberg und Witten).
- PCT Theorem (Schwinger, Pauli, Tost): "Zu jedem Teilchen gibt es ein Antiteilchen".
- Schranken für die Wirkungsquerschnitte elastischer Streuprozesse, die aus Unitarität, Analytizität und Lokalität (Kausalität) folgen: Dispersionsrelationen (Symmetrie, Hepp, ...); Fräissart Schranken, z.B. für $\pi - N$ Streuung (siehe z.B. I-Z):

$$|T(s, \cos \theta)| \leq \text{const.} \frac{q^2}{t_0} (\ln s)^2 \quad (q^2 \sim t \leq t_0 \approx m_\pi)$$

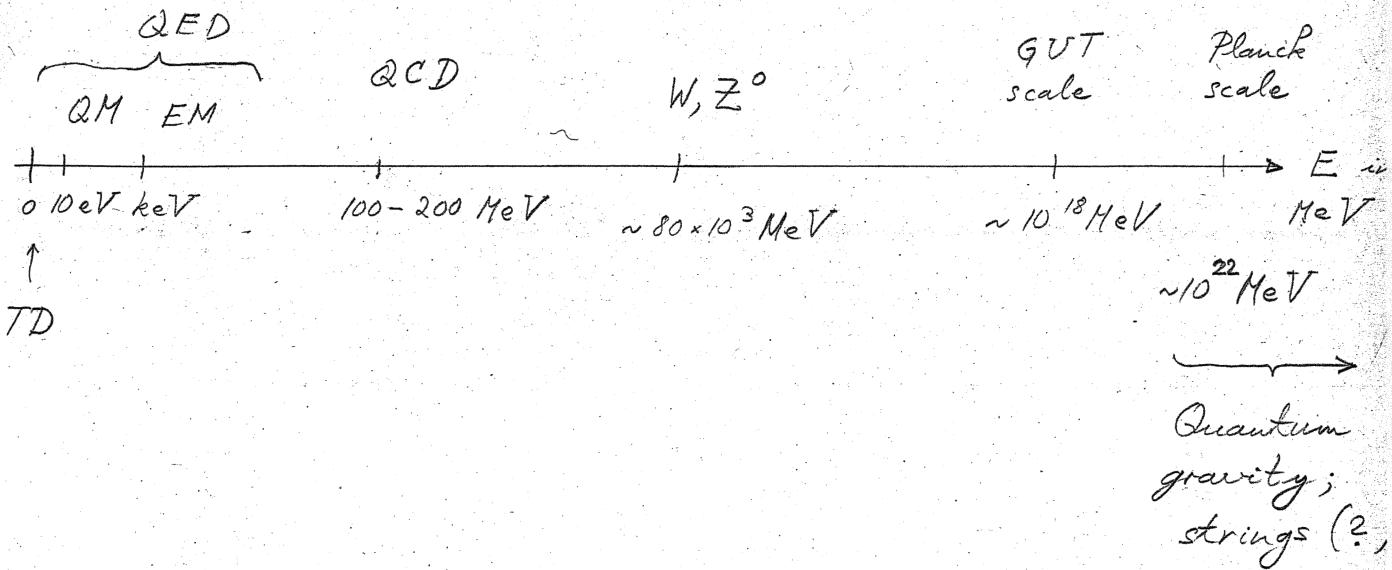
$$\Rightarrow \sigma_{\text{tot.}} \leq \frac{1}{t_0} (\ln s)^2, \quad (\text{optisches Theorem})$$

$$\text{wo } s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2, \quad (u = (p_1 - p'_1)^2)$$

Da alle diese Voraussagen der lokalen QFT experimentell gut bestätigt sind, dürfen wir annehmen, diese sei ein guter Ausgangspunkt.

1. 4. Einige Bemerkungen zur Teilchenphysik

(a) Energieskalen in der Physik,



$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV}$$

$$1 \text{ Rydberg} = 13.605 \text{ eV} \quad (\text{QM des H-Atoms})$$

Ein paar typische Teilchenmassen (unter Benutzung von $E = mc^2$ in Energien ausgedrückt):

Elektron / Positron :	0.511 MeV	} Leptonen
Micron :	106 MeV	

Pion :	135 MeV	} Mesonen
Kaon :	495 MeV	
π^+ :	550 MeV	

η' : 960 MeV

(Ist ein pseudoskalares SU(3) Singulett)

Proton: 938 MeV

Neutron: 939 MeV

Σ : 1192 MeV

Δ : 1115 MeV

Ξ : 1315 MeV

} SU(3) Oktett
von Baryonen.

Bedeutung der GUT Skala:

Man erwartet, dass bei ca. $10^{15} - 10^{16}$ GeV die elektroschwachen und starken Wechselwirkungen die gleiche Stärke aufweisen und deshalb bei so hohen Energien durch eine "einheitliche" (Experimentelle) Eichfeldtheorie beschrieben werden. Erfolge mit derartigen einheitlichen Eichfeldtheorien sind aber weitgehend ausgeblieben.

Planck Skala: Bei ca. 10^{19} GeV wird die

Berücksichtigung der Gravitation wesentlich.

Es ist denkbar, dass die Natur bei so hohen

Energien "stringy" wird.

(b) Die fundamentalen Wechselwirkungen

(i) Gravitation

Beschrieben durch die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie; (Krümmung der Raum-Zeit gekoppelt an materielle Energie-Impulsdichte). Diese Gleichungen machen die Raum-Zeit Geometrie zu einer dynamischen Größe. Konzepte wie Kausalität und Lokalität, die eine wesentliche Rolle in der Feldtheorie spielen, werden dadurch problematisch, denn sie nehmen auf den Minkowski-Raum Bezug. Überdies sind die Einstein-Gleichungen intrinsisch nicht-linear. All dies hat es bis anhin verunmöglicht, einen übergangenden Ansatz zur Quantisierung der Gravitation zu ent-

wickeln. Die String Theorie könnte diese Situation ändern.

(ii) Elektromagnetische WW.

Werden bei nicht allzu hohen Energien astronomisch genau durch die QED beschrieben. Diese ist das Hauptthema der Vorlesung.

(iii) Schwache WW.

Sind verantwortlich für den β -Zerfall der Neutrino und die sog. schwachen Zerfälle der Hadronen. Eine typische Zeit Skala für einen schwachen Zerfall eines Hadrons ist 10^{-10} sec, was im Vergleich zu den starken Zerfällen (10^{-23} sec) sehr langsam ist.

Die schwachen WW wurden ursprünglich durch die Fermi-Theorie beschrieben. Diese basiert auf einer lokalen Strom-Strom WW, (V-A Kopp lung), ist aber nicht-renormierbar.

Aus diesem Grunde versuchte man, die schwachen WW als durch ein massives Vektorboson vermittelt aufzufassen. Diese Idee allein ändert jedoch an der Nichtrenormierbarkeit der Theorie nichts. Es stellte sich aber heraus, dass sich die Situation verbessert, falls das Vektorboson durch ein nicht-abel'sches Eichfeld beschrieben wird. Die Feldquanten von Eichfeldern scheinen aber *a priori* masselos zu sein. Um sie massiv zu machen ohne die Renormierbarkeit der Theorie zu zerstören, müssen die Eichfelder an skalare Felder, die Higgs Felder, gekoppelt werden. Die Eichfelder erhalten dann ihre Masse aufgrund des sog. Higgs Mechanismus! Eine natürliche Einbettung der Fermi Theorie in eine nicht-abel'sche Eichtheorie mit Eichgruppe $SU(2)_w \times U(1)_{em}$ führt unter Anwendung des Higgs Mechanismus' auf die Glashow - Weinberg - Salam Theorie der elektro-

schwachen WW; (Standard Modell). 't Hooft u.a.
 haben gezeigt, dass diese Theorie renomierbar
 ist. Sie ist experimentell glänzend bestätigt.
 Ihre Struktur ähnelt in mancherlei Beziehung
 denjenigen der QED.

(iv) Starke WW.

Sie beschreibt die starken Kräfte zwischen
 Nukleonen (Kernkräfte) oder, allgemeiner,
 zwischen Hadronen. Diese Kräfte sind kurzreich-
 weilig. Sie können daher durch massive
 Bosonen vermittelt werden. Wenn ihre
 mittlere Reichweite $= r$ ist, so gilt nach
 der Urschärfe relation für die Masse, m , solcher
 Bosonen

$$m \cdot c \approx \frac{\hbar}{r}$$

Mit $r \approx 10^{-15} \text{ m}$, finden wir

$$m \approx 200 \text{ MeV.}$$

Diese Ideen stammten von Yukawa. Als im Jahre 1947 das π^+ -Meson mit einer Masse von ca. 140 MeV entdeckt wurde, glaubte man damit das Feld quant um der starken WW gefunden zu haben und sie durch die Theorie von Yukawa beschreiben zu können. Das fehlte aber später auf unzählige Schwierigkeiten.

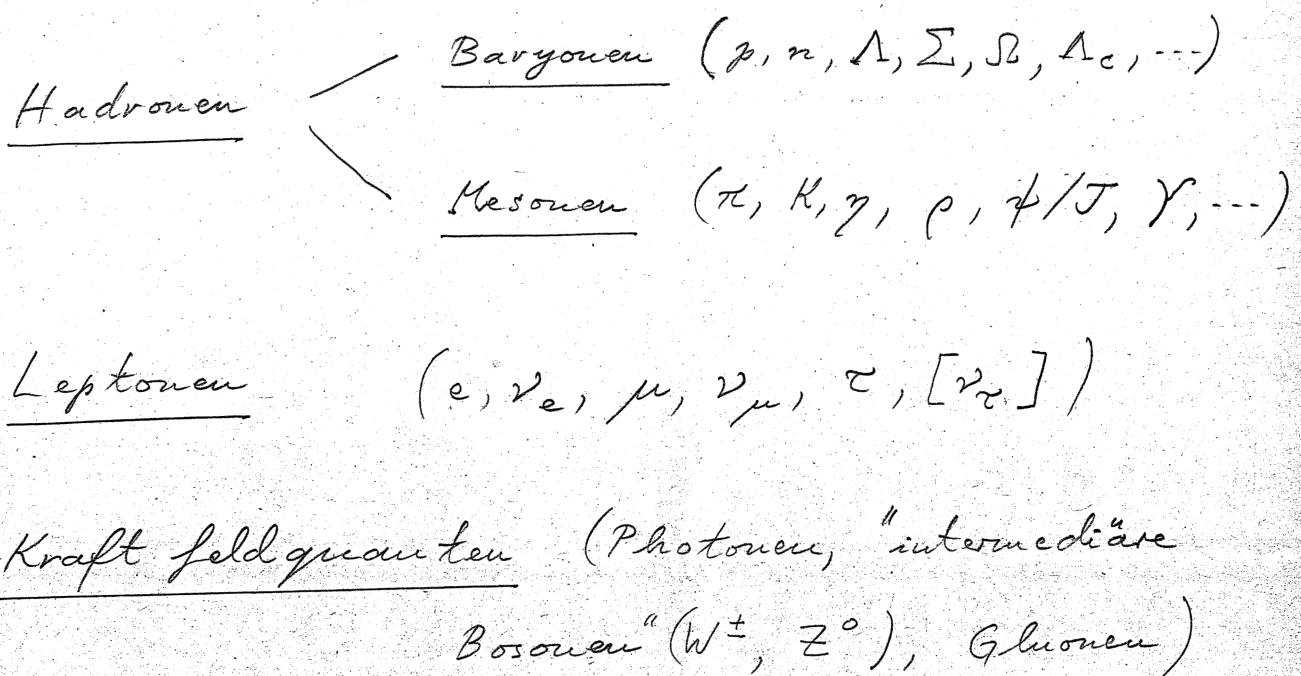
- a) Bei hohen Energien wird die Kraft zwischen Proton und Neutron nicht korrekt durch Pion-Austausch beschrieben.
- b) WW zwischen Pionen konnten nicht durch Ein-Pion-Austausch beschrieben werden.
- c) Mit der Entdeckung seltamer Teilchen (50er Jahre) verloren die Pionen ihre ausgezeichnete Stellung und wurden Mitglieder eines $SU(3)$ Oktetts. Da man keine $SU(3)$ Triplets von Teilchen fand, wurde es ganz

unglaublich, dass die Pionen fundamentale Teilchen sind. Die $SU(3)$ -Klassifikation von Hadronen (Gell-Mann, Ne'eman) führte schliesslich auf das Quark Modell der Hadronen von Gell-Mann und Zweig. Die experimentellen Werte für den π^0 -Zerfall in zwei Photonen, der zunächst verkannte Spin-Statistik Zusammenhang für die Quarks und das Verhalten von inelastischen, z. B. $e^- - e^+$, Stoßquerschnitten führten am Anfang der 70er Jahre zur Formulierung der QCD, die die Kräfte zwischen Quarks durch nicht-abelsche Eichfelder mit Eichgruppe $SU(3)_c$ beschreibt, deren Feldquanten Gluonen heißen. Die Struktur der QCD ist ähnlich derjenigen der QED. Sie ist die schönste der bis aulich vorgestellten drei Feldtheorien. Sie hat vermutlich als

einzige die Chance, mathematisch konsistent zu sein.
 Es ist plausibel, dass sie das Nicht-Erscheinen
 von Quarks und Gluonen in den Streuzuständen
 ("Confinement") erklärt, aber es ist bis anhin außer-
 ordentlich schwierig, die Tiefenergie - Eigenschaften
 der QCD abzuleiten. Direkte Evidenz für die
 Existenz von Quarks und Gluonen kann aus der
 Analyse der sog. Jets gewonnen werden.

Im Quark - Modell werden die Mesonen
 als Bindungszustände eines Quarks und eines
 Antiquarks und die Baryonen als Bindungszu-
 stände dreier Quarks aufgefasst. Dies erklärt
 die Erhaltung der Baryonen Zahl in natürlicher
 Weise. Es gibt keine WW, die einzelne Quarks in
 Leptonen umwandeln, oder umgekehrt.

Wir wollen nun die verschiedenen Arten
 von Teilchen vorstellen:



Leptonen sind Teilchen mit elektromagnetischen und schwachen, aber keinen starken Wechselwirkungen

Sie kommen in drei Generationen:

$$([e_L, \nu_e], e_R), ([\mu_L, \nu_\mu], \mu_R), ([\tau_L, \nu_\tau], \tau_R)$$

Die Zahl von Teilchen minus die Zahl von Antiteilchen ist für jede Generation erhalten.

Dies erklärt, wieso ein μ^- nicht in ein $e^- + \gamma$ zerfallen kann, hingegen in

$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Die schwachen Wechselwirkungen verletzen die Spiegelsymmetrie (P): Es scheint nur linkshändige Neutrinos zu geben.

Das schwache Eichfeld koppelt nur an die links-händigen Leptonen.

Den drei Generationen von Leptonen entsprechen sechs Typen von Quarks: u, d, s, c, t und b

Die Quarks haben starke, schwache und elektromagnetische Wechselwirkungen. Aus ihnen sind die Baryonen und Mesonen zusammengesetzt.

Mesonen sind Bindungszustände eines Quarks und eines Anti-Quarks, Baryonen solche dreier Quarks

Die leichtesten Quarks sind das u- und das

d-Quark, das seltsame Quark, s, ist schon wesentlich schwerer, und noch schwerer ist das

"charmante" Quark, c. Sehr schwer sind b- ("bottom", oder "beauty") und t- ("top", oder "truth")

Quark. Zur Zeit der Erfindung des Quark

Modells musste nur die Existenz von u, d

und s angenommen werden. Nehm man an,

dass die Massen von u, d und s ungefähr

gleich gross seien, und wenn man verauchlässigte man die elektroschwachen WW, so stiess man auf eine globale $SU(3)$ Symmetrie Gruppe, die auf (u, d, s) operiert und diese untereinander vertauscht, die "flavour" $SU(3)$ von Gell-Mann und Ne'eman. Da Mesonen Bindungszustände eines Quarks und eines Anti-Quarks zu sein schienen, konnte man sie durch Darstellungen der $SU(3)$ klassifizieren:

$$3 \times \bar{3} = 1 + 8.$$

Die triviale Darstellung ist ein $SU(3)$ Singlet und entspricht z. B. dem γ' -Meson. Die 8 - Darstellung ist das Oktett ("eight-fold way") und entspricht z. B. den π -K- und η -Mesonen, von denen es gerade acht gibt.

Da Hadronen Bindungszustände dreier Quarks zu sein schienen, konnte man sie durch Ausreduktion eines Tensorproduktes

drei fundamentale Darstellungen der $SU(3)$

klassifizieren:

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10$$

Zur trivialen Darstellung gehört der Zustand

$$u\bar{d}s + d\bar{s}u + s\bar{u}d - u\bar{s}d - s\bar{d}u - d\bar{u}s$$

Zum Dekuplet gehören

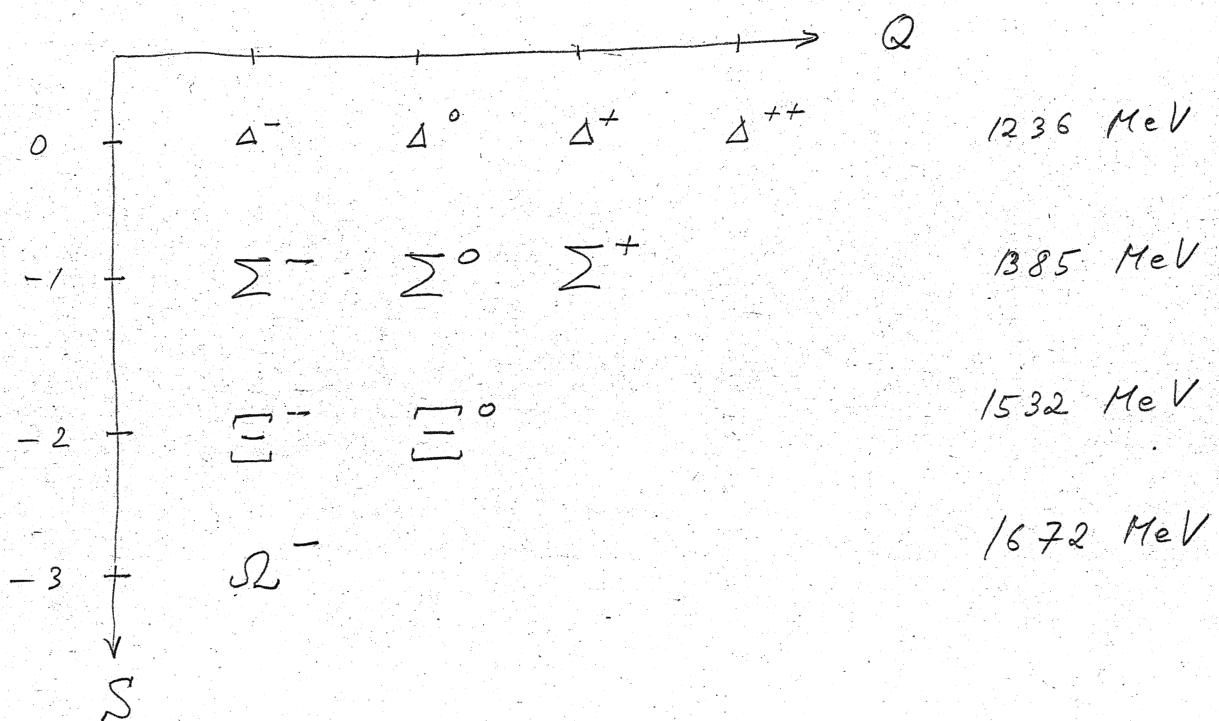
$$uuu, ddd, sss, uud + udu + dnu,$$

$$uus + uuu + sun, udd + ddn + dnd,$$

$$uss + ssu + sun, dds + dsd + sdd,$$

$$dss + ssd + sds, uds + dsu + sud + usd + sd + dus.$$

Ein solches Dekuplet bilden



Man könnte nun versucht sein, die Zustände die man aus u-, d-, s- und c- Quarks aufbauen kann, mit Hilfe der Darstellungen einer approximativen $SU(4)$ -flavour Symmetrie zu klassifizieren oder gar die aus u-, d-, s-, c-, b- und t- Quarks aufgebauten Zustände mit Hilfe der Darstellungen einer flavour- $SU(6)$. Dies ist aber nicht sehr sinnvoll, da die Massen dieser Quarks zu verschieden sind.

Um die beobachteten Hadronen von Mesonen und Baryonen zu reproduzieren, muss man den Quarks die folgenden elektrischen hadronen zuweisen:

$$u: \frac{2}{3}, \quad d: -\frac{1}{3}, \quad s: -\frac{1}{3}$$

Die "Seltsamkeit" ("strangeness") dieser Quarks ist

$$u: S=0, \quad d: S=0, \quad s: S=1.$$

Dem u-Quark ordnet man Isospin $\frac{1}{2}$ zu,

dem d-Quark Isospin $-\frac{1}{2}$, und dem s-Quark

Isospin 0. Zwischen Ladung (Q), Isospin (I_3),
Seltsamkeit (S) und Baryonenzahl (B) besteht
der Zusammenhang

$$Q = I_3 + \gamma/2,$$

wo γ (die Hyperladung) durch

$$\gamma = B + S$$

definiert ist. Dieser Zusammenhang heißt

Gell-Mann - Nishijima Relation. Schliesst

man die charmanten Quarks ein, so lautet
die modifizierte Gell-Mann - Nishijima

Relation

$$Q = I_3 + \frac{B + S + C}{2}$$

wo $C = 1$, für das c -Quark, und $C = 0$,

für die übrigen drei Quarks. Die Baryonen

Zahl eines Quarks ist $B = 1/3$. Die

Gell-Mann - Nishijima Relation reproduziert

die elektrischen Ladungen von Quarks, Mesonen

und Baryonen offensichtlich korrekt.

Im Quark Modell kann man schwache Zerfälle von Hadronen durch die schwachen WT der Quarks erklären. Leider entspricht der Aufteilung der Quarks nach ihren Massen nicht diejenige der Quarks nach ihren schwachen Wechselwirkungen. Die beiden verschiedenen Aufteilungen der Quarks sind durch eine nicht-triviale Matrix (Cabibbo - Kobayashi - Maskawa Matrix) miteinander verbunden.

Der schwache Zerfall

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \begin{pmatrix} n = udd \\ p = uud \end{pmatrix}$$

wird im Quark Modell als d-Zerfall interpretiert:

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

Oder

$$\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

wird als

$$s \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

Zerfall gedeutet.

Nun erläutern wir den Begriff der Farbe.

Betrachten wir zum Beispiel einmal das Δ^{++} Baryon. Es ist ein Bindungszustand dreier u -Quarks. Quarks haben Spin $\frac{1}{2}$. Das Δ^{++} Baryon hat Spin $\frac{3}{2}$. Die Quark-Wellenfunktion von Δ^{++} ist

$$\psi_{\Delta^{++}} = \psi_{\text{Spin}} \otimes \psi_{\text{SU}(3) \text{ flavor}} \otimes \psi_{\text{Raum}}$$

Spin- und $SU(3)$ Wellenfunktion sind symmetrisch; also muss die Ortswellenfunktion Drehimpuls $L=0$ haben und ist symmetrisch. $\psi_{\Delta^{++}}$ ist also symmetrisch.

Daraus würde folgen, dass die Quarks Bose-Statistik haben. Sie besitzen aber halbganzen Spin. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Spin und Statistik sollten sie also Fermionen sein. Dieser Widerspruch kann dadurch gelöst werden, dass man annimmt, dass jedes Quark in drei Ausgaben vorkommt, die sich durch ihre Farbe unterscheiden: rot, grün oder blau. Dann setzt man

$$\psi_{\Delta^{++}} = \psi_{\text{Spin}} \otimes \psi_{\text{SU}(3)_{\text{flavour}}} \otimes \psi_{\text{Raum}} \otimes \psi_{\text{Farbe}}$$

und nimmt an, dass ψ_{Farbe} total antisymmetrisch ist, also zur trivialen Darstellung von $\text{SU}(3)_c$ (c für "colour", deutsch "Farbe") gehören.

Die confinement - Hypothese sagt, dass alle physikalischen Zustände farblos sind, d.h. trivial unter $\text{SU}(3)_c$ transformieren.

Weitere Gründe für die Einführung einer $\text{SU}(3)_c$ Farbsymmetrie findet man in der Analyse des elektromagnetischen Zerfalls $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, und in den "branching ratios" $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$.

Das starke Kraftfeld koppelt an die Farbe der Quarks und wird durch ein nicht-abelsches $\text{SU}(3)_c$ - Eichfeld beschrieben.

Die Feldquanten heißen Gluonen.

Die ganze, bislang dargelegte Struktur der Elementarteilchenphysik wird durch das sog.

Standard Modell

bis zu Energien von einigen hundert GeV korrekt beschrieben. Dieses Modell

ist eine Eichtheorie mit Eichgruppe

$$SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_{\text{e.m.}}$$

Materiefelder sind die Quark- und Lepton-Felder und ein komplexes, skalares Higgs $SU(2)_w$ -Dublett. Die Eichfelder von $SU(2)_w$ koppeln an die linksbündigen Quark- und Lepton-Felder. Die linksbündigen Quark- $SU(2)_w$ -Doublets sind $\begin{pmatrix} u \\ d_C L \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} s_C \\ c_C \end{pmatrix}_L, \dots$ (C für Cabibbo), wo

$$d_C = \cos \theta_C d + \sin \theta_C s, \dots$$

und θ_C ist der Cabibbo Winkel.

Die elektro schwachen WW der Quarks sind schwach im Vergleich zu ihren starken WW; (schwache Zerfallszeiten $\sim 10^{-10}$ sec.; starke Zerfallszeiten $\sim 10^{-23}$ sec.) Deshalb macht es Sinn, jene zunächst einmal zu vernachlässigen. Die so erhaltene Theorie ist die Quantenchromodynamik (QCD).

Die schwachen WW geladener Leptonen sind schwach im Vergleich zu ihren elektromagnetischen WW. Und starke WW haben die Leptonen ja nicht. Deshalb macht es Sinn eine Theorie der elektromagnetischen WW der geladenen Leptonen zu betrachten, in der die schwachen WW nicht berücksichtigt werden. Das ist die Quantenelektrodynamik (QED), die das Hauptthema unserer Vorlesung ist.

Hoffentlich wird es aber zu einem kurzen Überblick über das Standard Modell am Schluss noch reichen.

2) Natürliche Einheiten, Notationen.

c.g.s. Einheiten:

Masse (M), Länge (L), Zeit (T)

Einh.: Gramm Centimeter Sekunden.

Natürliche Einheiten:

Masse (M), Aktion (A), Geschwindigkeit (V)

Einh.: (L^{-1}) $\hbar = 1$ $c = 1$

⇒ Alle Größen werden in Potenzen von M ausgedrückt!

Zum Umrechnen zwischen c.g.s. und natürlichen Einheiten benutzt man:

$$L = \frac{A}{MV}, \quad T = \frac{A}{MV^2}$$

$$\Rightarrow M^p L^q T^r = M^{p-q-r} A^{q+r} V^{-q-2r}$$

Energie - Impuls Zusammenhang in natürlichen Einheiten:

$$E^2 = m^2 + p^2 = m^2 + k^2$$

\Rightarrow Masse, Impuls und Wellenzahl haben die selben natürlichen Einheiten.

Feinstruktur Konstante: (ist dimensionslos)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} = \frac{1}{137.04}$$

natürliche Einheiten: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.04}$

Dimension von α : M^0 (dimensionslos)

L. g. s.	n. u.
$\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV sec}$	1
$\hbar c = 1.973 \times 10^{-11} \text{ MeV cm}$	1

Wirkungsquerschnitt:

$$[\sigma] = L^2 = M^{-2} A^2 V^{-2}; ((1 \text{ fermi})^{-1})^{-1} \approx 197 \text{ GeV}$$

$\Rightarrow \sigma$ wird in MeV^{-2} gemessen, falls man n. u. benutzt.

Beispiele:

1) Thomson Querschnitt:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2} \quad \text{in n.u.}$$

($m = 0.511 \text{ MeV}$ für Elektronen)

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2} (\hbar c)^2 \quad \text{in c.g.s.}$$

$\uparrow \quad \curvearrowright$
MeV MeV.cm

$$\Rightarrow \sigma = \frac{8\pi}{3} \alpha^2 \frac{(1.973 \times 10^{-11} \text{ MeV.cm})^2}{(0.511 \text{ MeV})^2}$$

$$= 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2.$$

2) Positronium Lebensdauer:

$$\tau = \frac{2}{\alpha^5} \frac{1}{m} \quad \text{in n.u.}$$

$$\tau = \frac{2}{\alpha^5} \frac{1}{m} \underbrace{\hbar}_{\text{MeV sec}} \quad (c=1)$$

$$= \frac{2}{\alpha^5} \frac{6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV.sec}}{0.511 \text{ MeV}}$$

$$= 1.24 \times 10^{-10} \text{ sec.}$$

etc.

Umrechnungstabelle:

	<u>c.g.s.</u>			n.u.
	p	q	r	
(M^p, L^q, T^r)				(M^{p-q-r})
Aktion	1	2	-1	0
Geschwindigkeit	0	1	-1	0
Masse	1	0	0	1
Länge	0	1	0	-1
Zeit	0	0	1	-1
Hamilton - Dichte	1	-1	-2	4
Feinstruktur Konstante	0	0	0	0
Elektrische Ladung	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	0
Wirkungsquerschnitt	0	2	0	-2
Lebensdauer	0	0	1	-1

Notationen,

a) Raum, Zeit, und spezielle Relativität

• Punkte im Minkowski-Raum M^4 (affin):

$$x = (x^\mu) = (t, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3),$$

$$\text{mit } \vec{x} = (x^i)$$

• Poincaré Transformationen

$$x^\mu \rightarrow x_{(\Lambda, a)}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.1)$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

wo $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ eine Lorentz Transformation ist, und $a = (a^\mu)$ ein Vierervektor; (\Rightarrow ED).

Kürzer schreiben wir (2.1) als

$$x_{(\Lambda, a)} = \Lambda x + a$$

Die Lorentz-Transformationen lassen die Lorentz-Metrik des Minkowski Raumes invariant. Das Lorentz Skalarprodukt von a und b ist durch

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (2.2)$$

definiert.

$$(g_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

Verjüngung eines kontravarianten Vektors (a^μ) mit $g_{\mu\nu}$ ergibt einen kovarianten Vektor:

*)

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu.$$

Es gilt

$$a_0 = a^0, \quad a_i = -a^i.$$

Dann können wir schreiben

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu$$

Die Inverse von $(g_{\mu\nu})$ wird mit $(g^{\mu\nu})$ bezeichnet: $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$ (Kronecker Delta). Es gilt

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

*) Die Einstein'sche Summationskonvention ist von jetzt an immer in Kraft.

Lorentz-Transformationen lassen die Lorentz-Metrik invariant, d.h.

$$(1a) \cdot (1b) = a \cdot b, \quad \forall a, b.$$

Spezielle Lorentz Transformationen sind

1) Rotationen, $R(\vec{e}, \theta)$ (\vec{e} : Drehachse, θ : Drehwinkel).

2) Boosts; z.B. in 3-Richtung:

$$a^0 \rightarrow \cosh \phi a^0 + \sinh \phi a^3$$

$$a^3 \rightarrow \sinh \phi a^0 + \cosh \phi a^3,$$

$$a^1 \rightarrow a^1, \quad a^2 \rightarrow a^2; \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

$A(\vec{e}, \phi)$ bezeichnet einen Boost in Richtung von \vec{e} , mit Schnelligkeit ϕ .

3) Raumspiegelung (Parität), P:

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x}, \quad x^0 \rightarrow x^0$$

4) Zeitumkehr, T:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} \quad x^0 \rightarrow -x^0$$

Theorem. Jede Lorentztransformation ist ein Produkt einer Rotation mit einer Beschleunigung gefolgt von I, P, T, oder P.T.

Die Lorentzgruppe wird mit $O(3,1)$ bezeichnet, die Zusammenhangskomponente der Einheit mit $SO(3,1)$.

"Lorentz-invariant" wird im Folgenden " $SO(3,1)$ -invariant" bedeuten.

b) Gradienten, Funktionen, Formen, Integrale.

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial = (\partial_\mu), \quad \vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$$

$$\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu.$$

$$\int d^4x \ (\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \int dx^1 \int dx^2 \int dx^3$$

$$= \int dx^0 \int d^3 \vec{x}$$

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(x) &= \delta(x) = \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) \\ &\equiv \delta(x^0) \delta^{(3)}(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\int d^4x \ \delta^{(4)}(x) = 1.$$

Funktionen: $f(x), g(x), \phi(x); \dots$

1-Formen: $a_\mu(x)$ ($a = \sum a_\mu dx^\mu$)

Beispiel: $a_\mu(x) = (\partial_\mu f)(x)$

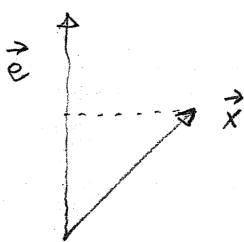
p -Formen: $a_{\mu_1 \dots \mu_p}(x)$ total anti-symmetrisch in $\mu_1 \dots \mu_p$

$(a = \sum a_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p})$
etc.

2. Struktur der Lorentz - und Poincaré Gruppen, unitäre Darstellungen.

(a) Rotationsgruppe:

Euler Parametrisierung (1770): \vec{e} = Drehachse, φ = Drehwinkel



$$\begin{aligned}\vec{y} &= R(\vec{e}, \varphi) \vec{x} \\ &= \vec{e} \cdot (\vec{e} \cdot \vec{x}) + (\vec{e} \times \vec{x}) \sin \varphi + (\vec{x} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{x})) \cos \varphi \\ &= \vec{x} \cos \varphi + (\vec{e} \times \vec{x}) \sin \varphi + \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{x})[1 - \cos \varphi]\end{aligned}$$

Setze $\vec{\alpha} \parallel \vec{e}$ mit $|\vec{\alpha}| = \tan \frac{1}{2} \varphi$. Dann findet man

$$\vec{y} = \frac{2}{1 + |\vec{\alpha}|^2} \left[\frac{1}{2}(1 - |\vec{\alpha}|^2)\vec{x} + \vec{\alpha} \times \vec{x} + \vec{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \vec{x}) \right], \quad (2.1)$$

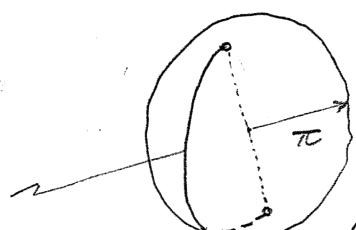
wie man mühefrei nachrechnet.

Hamilton's Quaternionen (1844): $SO(3)$ 2-fach zusammenhängend, wie Euler's Parametrisierung andeutet.

$SO(3)$ parametrisiert durch $\{ \vec{\varphi} : \vec{\varphi} \in \mathbb{R}^3, |\vec{\varphi}| = \varphi, |\varphi| \leq \pi \}$
= Vollkugel vom Radius π mit Diametralpunkten auf
Oberfläche identifiziert \Rightarrow 2-fach zusammenh.

BUCH UND ZEITUNG
FÄHRZEUG UND MACHINEN
ELEKTRONIK UND INFORMATIONSTECHNIK

100 WERKSTATTEN
1000 GÄSTE



nicht zusammenziehbar!

Überlagerungsgruppe $SU(2) \simeq S^3$

$$R(\vec{e}, \varphi) \mapsto \exp i \frac{\varphi}{2} (\vec{e} \cdot \vec{\sigma}) = \cos \frac{\varphi}{2} \sigma_0 + i \sin \frac{\varphi}{2} (\vec{e} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.2)$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Drehungen kann man als Drehungen des Firmamentes =

Riemann Sphäre auffassen. Riemann Sphäre = \mathbb{CP}^1 :

$$\mathbb{CP}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \text{ falls } u_1 : u_2 = u'_1 : u'_2 \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \vec{n} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \vec{\sigma} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1.$$

(Hopf Faserung von S^3 über S^2 !)

Darstellungen der Drehungen auf \mathbb{CP}^1 :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2)$$

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \exp i \frac{\varphi}{2} (\vec{e} \cdot \vec{\sigma}); \quad \left(\vec{u}^T A^* \vec{\sigma} A \vec{u} = R(\vec{e}, \varphi) \vec{n} \right) \quad (2.3)$$

$u := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$: Pauli Spinor (\rightarrow Klein & Sommerfeld)

Lie Algebra, $su(2)$, der $SU(2)$:

J_i : inf. Generator der Drehungen um i -Achse.

$su(2) = V\mathbb{R}$ über \mathbb{R} erzeugt von J_1, J_2, J_3 mit

Lie Klammer

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.4)$$

Spin $\frac{1}{2}$ Darstellung: $J_i = \frac{1}{2} \sigma_i$.

Darstellungstheorie von $SU(2)$ und $su(2)$: QM I.

Lorentzgruppe:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \{\Lambda : \Lambda^T g \Lambda = g\}$$

$$\Rightarrow L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow \quad (2.5)$$

$$L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = 1, \Lambda^0 \geq 1\}: \text{UG von } L$$

$$L_+^\downarrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = 1, \Lambda^0 \leq -1\},$$

etc.

(Man beachte, dass $\det \Lambda$ und $\text{sign } \Lambda^0$ invariant unter Konjugation mit beliebigen Lorentz Trsf. sind.)

$$L_+^\downarrow = L_+^\uparrow \times \text{Raumspiegelung} \times \text{Zeitinvolution}$$

$$L_-^\uparrow = L_+^\uparrow \times \text{Raumspiegelung}$$

$$L_-^\downarrow = L_+^\uparrow \times \text{Zeitinvolution}$$

Jede Lorentztransformation, $\Lambda \in L_+^\uparrow$, kann eindeutig als

Boost \times Rotation dargestellt werden; (\rightarrow ED)

Zusammenhang zwischen L_+^\uparrow und $SL(2, \mathbb{C})$: Aufgrund des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

keit erscheint eine leuchtende Kugel in jedem Inertialsystem auf dem Firmament als helle Kreisscheibe. Der Übergang von einem zu einem anderen Inertialsystem erscheint auf der Riemann Sphäre daher als kreisförmige Abbildung, die umkehrbar ist. Daher entsprechen den Lorentztransformationen in L^+ die Möbius Transformationen von \mathbb{CP}^1 . Da diese nur bis auf einen Faktor bestimmt sind, dürfen wir für orientierungskreue Abb. des Firmaments verlangen, dass die entsprechende Möbiustrsf. die Determinante 1 hat. Solche Möbius Trsf. erzeugen $SL(2, \mathbb{C})$.

Dies kann man auch folgendermassen verstehen:

Für $x \in M^4$ ist $(\sigma \cdot x)^* = \sigma \cdot x = \sigma^0 x^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x}$. (2.6)

$$\det(\sigma \cdot x) = (x^0)^2 - \vec{x}^2 \quad (2.7)$$

Lorentz Trsf. sind lineare, umkehrbare Abb. $M^4 \rightarrow M^4$ die (2.7) erhalten. Sei $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Dann ist

$$A(\sigma \cdot x) A^* \text{ symmetrisch}$$

$$\det(A(\sigma \cdot x) A^*) = \det(\sigma \cdot x) = (x^0)^2 - \vec{x}^2 \quad (2.8)$$

$\Rightarrow \exists x_A$ so, dass $A(\epsilon \cdot x)A^* = \epsilon \cdot x_A$, mit

$(x_A^\circ)^2 - \vec{x}_A^2 = (x^\circ)^2 - \vec{x}^2$. Die Abb. $x \rightarrow x_A$ ist offensichtlich linear in x und umkehrbar.

$\Rightarrow \exists \Lambda(A)$ so, dass $x_A = \Lambda(A)x$, oder

$$A(\epsilon \cdot x)A^* = \epsilon \cdot (\Lambda(A)x) \quad (2.9)$$

Das natürliche Skalarprodukt auf $M_2(\mathbb{C})$ ist:

$$\langle A, B \rangle := \text{Sp}(A^* B). \quad (2.10)$$

In diesem bilden $\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_0, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3$ ein VONS für $M_2(\mathbb{C})$. Die Komponenten von $A \in M_2(\mathbb{C})$ in diesem VONS sind daher durch

$$\text{Sp}\left(\frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}} A\right) \quad (2.11)$$

gegeben. Aus (2.9) und (2.11) finden wir

$$\Lambda(A)_\mu = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_\mu A \sigma_2 A^*) \quad (2.12)$$

Es ist klar, dass $\Lambda(A) = \Lambda(-A)$. Daher ist L_+

eine Darstellung von $SL(2, \mathbb{C})$ mit Kern $\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$.

Lie Algebra von L_+^\uparrow :

J_1, J_2, J_3 (infinitesimale Drehungen);

$K_i = \text{inf. Erzeugende eines Boosts in } i\text{-Richtung}, i=1,2,$

Lie Klammeren:

$$\left. \begin{aligned} [J_i, J_j] &= i \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [K_i, K_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i \varepsilon_{ijk} K_k, \quad [J_\ell, K_\ell] = 0, \quad \ell=1,2,3 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Setzen $J^{jk} = \varepsilon_{ijk} J_i$, $J^{\circ k} = K_k$, $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$.

Dann folgt aus (2.13):

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i (g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho}) \quad (2.14)$$

Zusammenhang zwischen $SL(2, \mathbb{C})$ und $SU(2) \times SU(2)$:

$SU(2) \times SU(2)$ gehört zur komplexen Lorentzgruppe;

$(M^4 \rightarrow M_{\mathbb{C}}^4)$, komplexe Lorentztransf. erhalten

$$(z^0)^2 - \vec{z}^2, \quad (z^0, \vec{z}) \in M_{\mathbb{C}}^4).$$

$su(2) \oplus su(2)$ ist eine reelle Unteralgebra der komplexifizierten Lie-Algebra der Lorentzgruppe:

Wir setzen

$$\vec{A} := \frac{1}{2} (\vec{J} + i \vec{K}), \quad \vec{B} := \frac{1}{2} (\vec{J} - i \vec{K}) \quad (2.15)$$

Für \vec{A} und \vec{B} gilt

$$[A_i, A_j] = i \varepsilon_{ijk} A_k,$$

$$[B_i, B_j] = i \varepsilon_{ijk} B_k, \quad (2.16)$$

$$[A_i, B_j] = 0, \quad \forall i, j.$$

Das sind die Strukturgleichungen von $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$.

Dieser Zusammenhang ist für die Theorie der endlich-dimensionalen (nicht-unitären) Darstellungen von $SL(2, \mathbb{C})$ (resp sl_2) wichtig.

Zwei inäquivalente Darstellungen von $sl_2, SL(2, \mathbb{C})$:

$$\vec{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}, \quad \vec{\mathcal{K}} = \frac{i}{2} \vec{\sigma} \quad \text{oder} = -\frac{i}{2} \vec{\sigma}. \quad (2.17)$$

Jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ hat Darstellung

$$\Lambda = \exp \{ i (\vec{\theta} \cdot \vec{\mathcal{J}} + \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathcal{K}}) \},$$

wo $\mathcal{J}_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots$

$$\mathcal{K}_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Diese Lorentz Transformation kann durch zwei Möbiustransformationen dargestellt werden:

$$A(\lambda) := \exp \left\{ \frac{i}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} + i \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}) \right\}$$

(2.18)

und

$$A'(\lambda) := \exp \left\{ \frac{i}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} - i \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}) \right\}$$

Diese zwei Darstellungen fallen auf der Untergruppe $SU(2)$ ($\vec{\varphi} = 0$) zusammen, sind aber inäquivalent.

Endlich-dimensionale Darstellungen von $SL(2, \mathbb{C})$

und Bi-Spinoren.

Die einfachsten Darstellungen von $SL(2, \mathbb{C})$ sind zweidimensional. Davon gibt es vier, unter denen je zwei äquivalent sind, d.h. zwei inäquivalente, wie eben ausgeführt.

$$\left. \begin{array}{l} A \mapsto (A^T)^{-1} \sim A \mapsto A \\ A \mapsto (A^*)^{-1} \sim A \mapsto \bar{A} \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

Die Darstellungsräume werden mit V_0, V°, V_- und V_+ bezeichnet, Vektoren darin mit Bi-Spinoren.

$$V_0 \ni u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \equiv (u_\alpha) : u' = (A^T)^{-1} u \quad (2.19)$$

$$V^\circ \ni u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \equiv (u^\alpha) : u' = Au \quad (2.20)$$

$$V \ni v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \equiv (v_\alpha) : v' = (A^*)^{-1} v \quad (2.21)$$

$$V^* \ni v = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix} \equiv (v^\alpha) : v' = \bar{A} v \quad (2.22)$$

Für $u \in V_0$ und $\tilde{u} \in V^*$ ist $(u, \tilde{u}) := u_\alpha \tilde{u}^\alpha$

$SL(2, \mathbb{C})$ -invariant. Für $v \in V$, $\tilde{v} \in V^*$ ist

$(v, \tilde{v}) := v_\alpha \tilde{v}^\alpha$ $SL(2, \mathbb{C})$ -invariant. Wir definieren

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\varepsilon^{\alpha\beta}) = -(\varepsilon_{\alpha\beta}) = (\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = -(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}). \quad (2.23)$$

Dann gilt für $u \in V_0$:

$$\begin{aligned} A \varepsilon u &= A \varepsilon A^T (A^T)^{-1} u \\ &= (\det A) \varepsilon (A^T)^{-1} u = \varepsilon (A^T)^{-1} u, \end{aligned}$$

da $\det A = 1$. Also

$$(A^T)^{-1} = -\varepsilon A \varepsilon. \quad (2.24)$$

Ebenso

$$(A^*)^{-1} = -\varepsilon \bar{A} \varepsilon. \quad (2.25)$$

Daher sind die Darstellungen auf V_0 und V^*

und auf V und V^* äquivalent, wohingegen

diejenigen auf V_0 und V inaequivalent sind.

V^* und V und V_0 und V sind durch komplexe

Konjugation miteinander verbunden, die aber nicht als Ähnlichkeitstransformation darstellbar ist.

Alle weiteren endlich-dimensionalen Darstellungen von $SL(2, \mathbb{C})$ findet man durch Bildung symmetrischer Tensorprodukte der eben gefundenen (wie im Falle der $SU(2)$). Da man mit ε Tensorindizes raufl und runter ziehen kann, genügt es Tensorprodukte von V^0 und V^+ zu studieren. Die Komponenten eines Tensors in $(V^0)^{\otimes s} \otimes (V^+)^{\otimes t}$ sind von der Form

$$t^{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_t}$$

und transformieren nach der Darstellung

$$t'^{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_t} = \prod_{i=1}^s A^{\mu_i}_{\alpha_i} \prod_{j=1}^t A^{\nu_j}_{\beta_j} t^{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta_1 \dots \beta_t} \quad (2.26)$$

mit

$$A^\alpha_\beta = \overline{A^\alpha_\beta} \quad (2.27)$$

Falls $A \in SU(2)$, dann ist $\bar{A} = (A^*)^T = (A^{-1})^T$.

Daher transformieren die in den μ 's und ν 's

symmetrischen Tensoren $t^{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_t}$ unter $SU(2)$.

nach der Darstellung mit $\text{Spin} = \frac{1}{2}(s+t)$.

Wir indizieren die gefundenen Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$ durch zwei halbganze Zahlen $(\frac{s}{2}, \frac{t}{2})$.

Die gefundenen endlich-dimensionalen Darstellungen von $SL(2, \mathbb{C})$ können natürlich nicht unitär sein, da

$SL(2, \mathbb{C})$ eine nicht-komplexe Gruppe ist. In der

relativistischen QM und QFT interessieren wir uns aber

für projektiv-unitäre Darstellungen, da nur solche

Übergangswahrscheinlichkeiten eines q.m. Systems erhalten

können, also Symmetrien des Systems sein können.

Diese sind notwendigerweise unendlich dimensional.

Um sie zu finden, soll man, wie Wigner erkannt hat

die Darstellungen der Poincaré Gruppe studieren

$$\rho = L \times \mathbb{R}^4 = \{(1, a) : 1 \in L, a \in \mathbb{R}^4\}$$

Für $(1, a), (1', a') \in \rho$, ist

$$(1, a) \cdot (1', a') = (1 \cdot 1', a + 1a') \quad (2.28)$$

Falls $1 \in L_+^\uparrow$, so erhält man die eigentliche,

orthochrone Poincaré Gruppe P_+^\uparrow , auf die wir uns zunächst beschränken wollen. Die mittären Darstellungen spielen in der relativistischen QM und QFT eine fundamentale Rolle.

Wir beginnen mit der relativistischen QM kräftefreier Teilchen. Der Zustandsraum eines q.m. relativistischen, freien Teilchens sei \mathcal{H} . Zustände werden mit $\psi, \varphi, \chi, \dots$ bezeichnet, "Observable" werden als orthogonale Projektoren auf \mathcal{H} aufgefasst. Sind die Inertialsysteme zweier Beobachter, 1 und 2, durch eine Poincaré Transformation (Λ, α) miteinander verbunden, so soll es ein Umrechnungsgesetz für die Zustände und Observablen des Systems geben:

$$\begin{array}{ccc} \underline{1} & & \underline{2} \\ \psi & \mapsto & \psi_{(\Lambda, \alpha)} \\ P & \mapsto & P_{(\Lambda, \alpha)} \end{array}$$

so, dass

$$\langle \psi, P\psi \rangle = \langle \psi_{(\lambda, \alpha)}, P_{(\lambda, \alpha)} \psi_{(\lambda, \alpha)} \rangle \quad (2.29)$$

gilt. Falls P der orth. Proj. auf $\mathcal{G} \in \mathcal{H}$ ist, so ist

$$\langle \psi, P\psi \rangle = |\langle \psi, \psi \rangle|^2,$$

und es muss nach (2.29) gelten, dass

$$|\langle \psi, \psi \rangle|^2 = |\langle \psi_{(\lambda, \alpha)}, \psi_{(\lambda, \alpha)} \rangle|^2. \quad (2.30)$$

Dies soll für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ richtig sein. Daraus folgt,

dass es für jedes $(\lambda, \alpha) \in P_+^\dagger$ einen mitären oder anti-mitären Operator $U(\lambda, \alpha)$ gibt so, dass

$$\psi_{(\lambda, \alpha)} = U(\lambda, \alpha) \psi, \quad (2.31)$$

$\forall \psi \in \mathcal{H}$; (Satz von Wigner!) Sei nun 3 ein

Beobachter, dessen Inertialsystem mit demjenigen von 2 durch eine Poincaré Transformation (λ', α') verbunden ist. Sei φ ein Zustand des Teilchens im

Inertialsystem des Beobachters 3, P_φ der Proj. auf \mathcal{G} ,

ψ ein Zustand im System von 1. Da 1 und 3 durch die Poincaré Trsf. $(\lambda' \lambda, \lambda' \alpha + \alpha')$ miteinander verbund

sind, muss offenbar gelten

$$\begin{aligned} & | \langle U(\lambda', \alpha') (U(\lambda, \alpha) \psi), \varphi \rangle |^2 \\ &= | \langle U(\lambda' \lambda, \lambda' \alpha + \alpha') \psi, \varphi \rangle |^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Daraus folgt, dass

$$U(\lambda' \lambda, \lambda' \alpha + \alpha') = e^{i\omega((\lambda', \alpha'), (\lambda, \alpha))} U(\lambda', \alpha') U(\lambda, \alpha), \quad (2.33)$$

wobei $e^{i\omega}$ ein Phasenfaktor ($|e^{i\omega}| = 1$) ist, d.h.

ω ein 2-Kozyklus von P_+^\dagger . Also ist U eine sog.

projektiv-mitäre Darstellung von P_+^\dagger auf \mathcal{H} .

Nun muss man beweisen, dass für die Poincaré Gruppe auf M^4 solche Darstellungen automatisch mitäre

Darstellungen der Überlagerungsgruppe

$$\tilde{P}_+^\dagger = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^4$$

sind; (siehe z.B. Sexl & Urbanke). Dies ist bei-

spielsweise für die Translationsgruppe oder die Gruppe der euklidischen Bewegungen in \mathbb{R}^2 nicht wahr! (Die pro-

jektive Darstellung der Translationen auf dem Hilbertraum eines geladenen Teilchens in der Ebene im konstanten äusseren Magnetfeld ist eine Darstellung der Heisenberg Gruppe!)

Nun müssen wir also offenbar die unitären Darstellungen von \tilde{P}_+^\dagger finden. Unitäre Darstellungen einer Gruppe auf einem separablen Hilbertraum kann man immer in eine "direkte Summe" von irreduziblen, unitären Darstellungen zerlegen. Es genügt also, diese letzteren zu finden.

Die Raum-Zeit Translationen, (1,a), bilden eine abelsche Untergruppe von \tilde{P}_+^\dagger . Es ist leicht, die irreduziblen, unitären Darstellungen von abelschen Gruppen zu finden: Sie sind alle eindimensional, nämlich durch die Charaktere selbst gegeben. In unserem Fall sind die stetigen Charaktere durch

$$e^{-ip \cdot x}, \quad p \in (M^4)^* \cong M^4 \quad (2.34)$$

gegeben; (p ist der "Energie-Impuls Vektor").

Die Darstellungen der Raum-Zeit Translationen

werden also durch Energie-Impuls Vektoren
 $p \in M^4$ indiziert.

Sei nun U eine irreduzible, unitäre Darstellung von \bar{P}_+^\dagger auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . Wir können \mathcal{H} nach inäquivalenten Darstellungen der Raum-Zeit Translationen zerlegen: $\mathcal{H} = \int d\rho(p) \mathcal{H}_p$, wo $d\rho$ ein Mass auf M^4 ist. (2.35)

Für $\psi_p \in \mathcal{H}_p$ gilt dann

$$U(1, a) \psi_p = e^{-ipa} \psi_p \in \mathcal{H}_p, \forall a. \quad (2.36)$$

Es folgt, dass

$$U(\lambda, 0) U(1, a) \psi_p = e^{-ipa} U(\lambda, 0) \psi_p$$

ist. Nun ist $U(\lambda, 0) U(1, a) = U(\lambda, b)$. Wir setzen $b = \lambda a$ und beachten, dass

$$U(\lambda, b) = U(1, b) U(\lambda, 0).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} U(1, b) U(\lambda, 0) \psi_p &= U(\lambda, 0) U(1, a) \psi_p = e^{-ipa} U(\lambda, 0) \psi_p \\ &= e^{-i(\lambda p \cdot b)} U(\lambda, 0) \psi_p \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nach (5.17) transformiert $U(\lambda, 0)$ φ_p nach der Darstellung " λp " unter Raum-Zeit Translationen. Ebenso zeigt man, dass $U(\lambda^{-1}, 0)$ $\varphi_{\lambda p}$ nach der Darstellung " p " transformiert. Weiter gilt natürlich

$$U(\lambda, 0) U(\lambda^{-1}, 0) = 1.$$

Es folgt, dass $U(\lambda, 0)$ ein Isomorphismus von \mathcal{H}_p auf $\mathcal{H}_{\lambda p}$ ist, (mit Inversem $U(\lambda^{-1}, 0)$).

Sei V eine minimale, Lorentz-invariante Teilmenge von M^4 . Dann ist

$$\mathcal{H}_V = \int_V^\oplus dp(p) \mathcal{H}_p \quad (2.38)$$

offenbar ein unter U invarianter, minimaler Teilraum von \mathcal{H} . Da U irreduzibel ist, muss gelten

$$\mathcal{H}_V = \mathcal{H}, \text{ oder } \mathcal{H}_V = \{\vec{0}\}. \quad (2.39)$$

Irreduzible, unitäre Darstellungen von \overline{P}_+^\uparrow sind also durch minimale, Lorentz-invariante Teilmengen $V \subset M^4$ indiziert. Daraus gibt es

sechs Typen:

$$(i) \quad V = V_m^+ = \{p : p^2 = m^2 > 0, p_0 > 0\}$$

$$(ii) \quad V = V_m^- = \{p : p^2 = m^2 > 0, p_0 < 0\}$$

$$(iii) \quad V = V_o^+ = \{p : p^2 = 0, p_0 > 0\}$$

$$(iv) \quad V = V_o^- = \{p : p^2 = 0, p_0 < 0\}$$

$$(v) \quad V = V_{im} = \{p : p^2 = m^2 < 0\}$$

$$(vi) \quad V = \{0\}$$

Sei nun H_p , $p \in V$ (V wie in (i)-(vi)), die Untergruppe von L_+^\uparrow mit der Eigenschaft, dass

$$h p = p, \quad \forall h \in H_p, \tag{2.41}$$

d.h. H_p ist die Isotropiegruppe von p . Sei $(1, 0) \in H_p$. Dann gilt nach (2.37) und (2.41)

$$\cup (1, 0) \varphi_p \in \mathcal{R}_p, \quad \forall \varphi_p \in \mathcal{R}_p.$$

Sei $p' = 1_p$. Dann gilt

$$1 h 1^{-1} p' = p', \quad \forall h \in H_p$$

und

$$1^{-1} h 1_p = p', \quad \forall h \in H_p.$$

Daher sind H_p und $H_{p'=\Lambda p}$ isomorph, $\forall \Lambda \in L_+^\uparrow$. Wir nennen die abstrakte Gruppe, die zu $H_p, p \in V$, gehört, H_V .

Für $p' = \Lambda p$ finden wir, für alle $\varphi_p \in \mathcal{H}_p$,

$$\underbrace{U(\Lambda) U(h) U(\Lambda^{-1}) \varphi_p}_{\in \mathcal{H}_p} \in \mathcal{H}_{p'}, \quad \forall h \in H_p.$$

$$\underbrace{\phantom{U(\Lambda) U(h) U(\Lambda^{-1})} \in \mathcal{H}_p}_{\in \mathcal{H}_p}$$

Ebenso findet man

$$\underbrace{U(\Lambda^{-1}) U(h) U(\Lambda) \varphi_p}_{\in \mathcal{H}_p} \in \mathcal{H}_{p'}, \quad \forall h \in H_{p'},$$

$$\underbrace{\phantom{U(\Lambda^{-1}) U(h) U(\Lambda)} \in \mathcal{H}_{p'}}_{\in \mathcal{H}_{p'}}$$

$\forall \varphi_p \in \mathcal{H}_p$. Also sind

$U \upharpoonright H_p$ und $U \upharpoonright H_{p'}$, unitär äquivalente Darstellungen der Gruppe H_V , $\forall p, p' \in V$.

Da U irreduzibel ist, müssen offenbar die

Darstellungen $U \upharpoonright H_p, p \in V$, irreduzibel

sein. Um die irreduziblen, unitären Darstellungen von \tilde{P}_+^\uparrow zu finden, genügt es also offenbar,

die irreduziblen, unitären Darstellungen der Gruppen H_V , V wie in (i) - (vi) zu finden.

Der Fall (vi) ist für die Physik fast uninteressant: Hier ist $H_V = \tilde{L}_+^\dagger$. Eine irreduzible, unitäre Darstellung von \tilde{L}_+^\dagger ist die triviale Darstellung. Dann ist $\mathcal{H}_0 = \{|0\rangle\}$ ein-dimensional; $|0\rangle$ heißt Vakuum. In allen anderen Fällen wäre \mathcal{H}_0 unendlich dimensional. (Das ist für die QFT unbrauchbar!)

Die Fälle (ii), (iv) und (v) sind für die Physik un interessant, (obwohl sie den Mathematiker interessieren mögen). Denn p^0 hat die Bedeutung der Energie.

$$\psi_p(1, (t, \vec{\delta})) = U(1, (t, \vec{\delta})) \psi_p = e^{-itp^0} \psi_p, \quad \forall \psi_p \in \mathcal{H}_p, \quad (2.42)$$

d.h. $\psi_p(1, (t, \vec{\delta})) = \psi_p(t)$ erfüllt die Gl.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_p(t) = p_0 \psi_p(t).$$

Daher ist p_0 die Energie von ψ_p . Die Energie eines physikalischen Zustandes soll aber nicht-

negative sein. [Mathematisch sind natürlich (i) und (ii) äquivalent, und (iii) und (iv) sind äquivalent. Der Fall (v) führt auf Teilchen mit Zuständen positiver und negativer Energie, die durch Lorentz Transf. ineinander übergeführt werden können, sog. Tachyonen. Solche Teilchen wurden nie beobachtet und hätten pathologische Eigenschaften.] Wir lassen also Fall (v) aus unserer Betrachtung weg! Er würde uns auf die Darstellungstheorie der Lorentzgruppe in drei Raum-Zeit Dimensionen führen, die von V. Bargmann entwickelt wurde. Sie ist die "kleine Gruppe", H_p , für $p = (0, 0, 0, k)$.

Nun müssen wir also noch die mittären Darstellungen von H_V , für V wie in (i) und (iii), diskutieren.

Wir beginnen mit Fall (i): Dann ist

$$H_V \simeq H_{p=(m, \vec{0})}$$

Die Lorentz-Transformationen, die $(m, \vec{0})$ invariant lassen, sind natürlich die Rotationen, d.h.

$$H_{p=(m, \vec{0})} \simeq H_{V_m^+} = SO(3) \quad (2.43)$$

Alle irreduziblen, mittären Darstellungen von

$SO(3)$ sind aus der QM bekannt: Sie kommen von irreduziblen, mitären Darstellungen der $SU(2)$ und sind vollständig durch den Spin, s , charakterisiert, der halb- oder ganzzahlig ist. Sie sind alle endlich-dimensional. Man kann sich fragen, ob es, wie für $SU(2)$, einen Casimir Operator gibt, dessen Spektrum Auskunft über den Spin gibt. (Einen ersten Casimir Operator haben wir schon gefunden: $P^\mu P_\mu$, wo P_μ der Generator von $\{U(1, a e_\mu) : a \in \mathbb{R}\}$ ist. Für eine irreduzible, mitäre Darstellung von P_+^\dagger gilt: $P^\mu P_\mu = m^2$.)

Die Antwort auf die eben gestellte Frage ist "ja".

Dieser Casimir Operator ist der Pauli-Lubanski (Pseudo-) Vektor, W_μ :

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma \quad (2.44)$$

Es ist klar, dass

$$W_\mu P^\mu = 0,$$

da $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ total antisymmetrisch ist.

Für $p^\mu = (m, \vec{0})$ finden wir deshalb

$$W \mathcal{H}_p = (0, \vec{W}) \mathcal{H}_p,$$

wo

$$W_i = -m \sum_i,$$

und $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sind die Spin Operatoren, die die Darstellung von $SU(2)$ auf \mathcal{H}_p erzeugen.

Daher ist

$$\vec{W}^2 \mathcal{H}_p = m^2 s(s+1) \mathcal{H}_p,$$

wo s der Spin der Darstellung von $SU(2)$ auf \mathcal{H}_p ist. Daher folgt

$$W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1), \quad (2.45)$$

d.h. $W_\mu W^\mu$ ist der gesuchte, zweite Casimir Operator.

Damit sind alle irreduziblen, unitären Darstellungen von $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ in Fall (i) gefunden.

Nun diskutieren wir Fall (iii). Es sei also

$$V = V_0^+ = \{p; p^2 = 0, p_0 > 0\}.$$

Wir können $p = (k, 0, 0, k)$, $k > 0$, wählen.
 und müssen nur die Isotropiegruppe H_p bestimmen. Diese enthält offensichtlich die Drehungen um die 3-Achse und Kombinationen von Drehungen um die 2-Achse und Boosts in der (01)-Ebene, resp. Drehungen um die 1-Achse und Boosts in der (02)-Ebene. Die infinitesimalen Ergänzenden dieser Transformationen sind;

$$J_z, \underbrace{K_x - J_y}_{\equiv \pi_1}, \underbrace{K_y + J_x}_{\equiv \pi_2} \quad (2.46)$$

wie der Leser leicht verifiziert! (Denn

$$J_z \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = (K_x - J_y) \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = (K_y + J_x) \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = 0!$$

Nun rechnet man leicht nach, dass

$$[\pi_1, \pi_2] = 0, [J_z, \pi_1] = i\pi_2, [J_z, \pi_2] = -i\pi_1 \quad (2.47)$$

Das sind aber offensichtlich die Struktur-Relationen der zwei-dimensionalen Euklidischen Gruppe, $E(2)$. (π_1, π_2 erzeugen Translationen der Ebene, J_z Drehungen der Ebene). Nicht alle projektiven Darstellungen der $E(2)$ sind unitär. Wir benöti-

gen aber nur die mitären Darstellungen von $E(2)$, resp. einer zweifachen Überlagerung von $E(2)$; ($e^{2\pi i J_z} = \pm 1$).^{*} Aus diesen kann man dann Darstellungen der quantenmechanischen Poincaré Gruppe induzieren. Die irreduziblen Darstellungen aller Überlagerungen von $E(2)$ findet man durch nochmalige Anwendung der Wigner'schen Methode. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(i) Die Translations-Untergruppe von $E(2)$ wird trivial dargestellt, d.h. der Charakter $e^{i\pi \cdot \alpha}$ ist 1, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2$, also $\pi = 0$. (Hier ist π ein "Impulsvektor" in \mathbb{R}^2 .) Die kleine Gruppe ist dann $SO(2)$, (ihre universelle Überlagerung ist \mathbb{R}). Für die Darstellungstheorie der g.m. Poincaré Gruppe, $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^4$, ist die zweifache Überlagerung von $SO(2)$ relevant. Ihre irreduziblen, mitären Darstellungen werden durch eine Zahl $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ indiziert. Sei φ der Drehwinkel und $R(\varphi)$ eine Drehung der Ebene um den Winkel φ . Dann

^{*}) Man bemerke aber, dass $\pi_1(E(2)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} (\neq \mathbb{Z}_2)$!

wird $R(\varphi)$ durch $e^{is\cdot\varphi}$ dargestellt. Für $s \in \mathbb{Z}$ ist die Darstellung einwertig, für s halbzahlig ist sie zweiwertig.

(ii) Die Translations-Untergruppe von $E(2)$ wird durch einen Charakter $e^{i\pi \cdot d}$, $0 \neq \pi \in \mathbb{R}^2$, dargestellt. Die kleine Gruppe ist dann trivial. Dann findet man unendlich-dimensionale, unitäre Darstellungen von $E(2)$: Der Darstellungsraum ist $L^2(S^1; d\theta)$, wo $S^1 = \{\pi \in \mathbb{R}^2 : |\pi| = \text{const.} > 0\}$. Die verschiedenen Impulse in S^1 werden durch Drehungen der Ebene ineinander übergeführt. Diese Darstellungen sind für die QFT unwichtig.

Für den Pauli-Ljubanski Vektor finden wir im Falle $[p^2=0, p^0>0, (i)]$:

$$W_\mu W^\mu \mathcal{H}_{V_0^+} = P_\mu P^\mu \mathcal{H}_{V_0^+} = \vec{\partial}; \quad W_\mu P^\mu = 0.$$

Also $W^\mu \upharpoonright_{\mathcal{H}_{V_0^+}} = \lambda P^\mu \upharpoonright_{\mathcal{H}_{V_0^+}}$,

wo $\lambda = s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ die Darstellungen der $E(2)$ vom Typ (i) indiziert; λ heisst Helizität. Raumspiegelungen vertauschen

λ mit $-\lambda$.

3. Spinlose, freie Teilchen; freie Skalarfelder; Klein-Gordon Gleichung.

Als einfachsten Spezialfall der in Kap. 2 entwickelten Theorie der unitären Darstellungen von P_+^\uparrow studieren wir nun den Fall, wo

$$V = V_m^+, \quad m \geq 0, \quad s = 0. \quad (3.1)$$

Dieser führt uns auf die Untersuchung der quantisierten Klein-Gordon Gleichung. Die (3.1) entsprechende Darstellung U von P_+^\uparrow , restriktiert auf H_p , $p \in V_m^+$, ist

trivial. Da U irreduzibel sein soll, muss $U \upharpoonright H_p$ eindimensional sein, d. h. $\mathcal{H}_p \simeq \mathbb{C}$. Wir bezeichnen den Basisvektor in \mathcal{H}_p mit $|p\rangle$. Jeder Vektor in \mathcal{H}_p ist dann von der

Form $f(p)|p\rangle$, $f(p) \in \mathbb{C}$. Sei nun $\psi \in \mathcal{H} = \int \mathrm{d}p(p) \mathcal{H}_p$

Dann gibt es eine Funktion f auf V_m^+ so, dass

$$\psi_p = f(p)|p\rangle, \quad p \in V_m^+.$$

Um das Skalarprodukt von \mathcal{H} anzugeben, müssen wir nur das in (2.35) auftretende Mass $\mathrm{d}p$ auf V_m^+ und das

Skalarprodukt in \mathcal{H}_p angeben. Wir verlangen, dass

$$\langle p|p\rangle = 1, \quad \forall p \in V_m^+. \quad (3.2)$$

Also

$$\langle \psi|\varphi\rangle = \int d\rho(p) \overline{f(p)} g(p).$$

Nun gilt

$$U(\lambda, a)|p\rangle = e^{-ip \cdot a} |\lambda p\rangle$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned} & \langle U(\lambda, a)\psi, U(\lambda, a)\varphi \rangle \\ &= \int d\rho(\lambda p) \overline{f(p)} g(p) \underbrace{\langle \lambda p | \lambda p \rangle}_{=1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wegen der Unitarität von U gilt

$$\langle U(\lambda, a)\psi, U(\lambda, a)\varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle,$$

also

$$\int d\rho(\lambda p) \overline{f(p)} g(p) = \int d\rho(p) \overline{f(p)} g(p), \quad (3.4)$$

$\forall f$ und g . Deswegen muss gelten

$$d\rho(\lambda p) = d\rho(p);$$

d.h. $d\rho$ ist ein Lorentz-invariantes Mass auf V_m^+ .

Ein derartiges Mass ist

$$\Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) d^4 p, \quad (3.5)$$

wo $\Theta(x) = 1, x \geq 0, \Theta(x) = 0, x < 0$, und δ ist

die Dirac δ -Funktion.

Bis auf einen konstanten Faktor, ist das Mass (3.5) das einzige Lorentz-invariante Mass auf V_m^+ ; (e.g. Reed & Simon). Wir setzen

$$dp(p) = \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) d^4 p \quad (3.6)$$

und erhalten nach Ausführen der p^0 -Integration

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_{M^4} \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \overline{f(p)} g(p) d^4 p$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(\vec{p})} \overline{f(\omega, \vec{p})} g(\omega, \vec{p}) d^3 p, \quad (3.7)$$

wo

$$\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (3.8)$$

Wir können nun \mathcal{U} explizit auf den Funktionen f beschreiben: Wenn φf entspricht, so entspricht $\mathcal{U}(1, \alpha)\varphi$ der Funktion $f_{(1, \alpha)}$, die durch

$$f_{(1, \alpha)}(p) = e^{i(\omega(\vec{p})\alpha^\circ + (\vec{p} \cdot \vec{\alpha}))} f(\vec{p}), \quad (3.9)$$

mit $p = (\omega(\vec{p}), \vec{p})$, gegeben. Dies erledigt die QM eines einzigen, skalaren relativistischen Teilchens der Masse m .

Es fällt nicht schwer, n freie, identische, skalare relativistische Teilchen zu beschreiben.

Wir nehmen an, sie seien Bosonen. Später werden wir sehen, dass sie Bosonen sein müssen, wenn wir das Prinzip der Einstein - Kausalität nicht verletzen wollen.

Die Konstruktion des Zustandsraums für eine beliebige Anzahl freier Teilchen ist jetzt einfach die übliche Fockraum Konstruktion, die wir schon im Kapitel über die naive Quantisierung des e.m. Feldes kennen gelernt haben.

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)} \quad (3.10)$$

$\mathcal{F}^{(0)} \simeq \mathbb{C}$ ist der "Keineilchen Sektor". Der Basisvektor in $\mathcal{F}^{(0)}$ wird mit $|0\rangle$ bezeichnet und heißt Vakuum. Man fordert, dass $\langle 0|0 \rangle = 1$.

$$\mathcal{F}^{(n)} \simeq L^2(\mathbb{R}^3, (2\omega(\vec{p}))^{-1} d^3 p)^{\otimes_s n} \quad (3.11)$$

wo \otimes_s das symmetrische Tensor Produkt bezeichnet. Elemente von $\mathcal{F}^{(n)}$ sind Funktionen $f(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$, die total symmetrisch unter Vertauschung ihrer Argumente sind. Das Skalarprodukt zwischen $f \in \mathcal{F}^{(n)}$ und $g \in \mathcal{F}^{(m)}$ ist durch

$$\langle f, g \rangle = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2\omega(\vec{p}_i)} \overline{f(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)} g(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \quad (3.12)$$

gegeben.

Die Darstellung von P_+ auf $\mathcal{F}^{(n)}$ ist das n -fache symmetrische Tensor Produkt der oben konstruierten Einzelchen-Darstellung:

$$f_{(\lambda, \alpha)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) = \prod_{i=1}^n e^{i(\omega(\lambda^{-1}\vec{p}_i)\vec{a} + (\lambda^{-1}\vec{p})\vec{a}^\dagger)} f(\lambda^{-1}\vec{p}_1, \dots, \lambda^{-1}\vec{p}_n) \quad (3.13)$$

wo $\lambda^{-1}\vec{p}$ der räumliche Anteil von $\lambda^{-1}\left(\begin{array}{c} \omega(\vec{p}) \\ \vec{p} \end{array}\right)$ ist.

Die Struktur des Fockraumes kann prägnant mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren beschrieben werden: Seien $a(\vec{p})$, $a^*(\vec{p})$ Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren, die die Vertauschungsrelationen

$$[a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad \left. \right\} (3.14)$$

$$[a^\#(\vec{p}), a^\#(\vec{p}')] = 0 \quad (a^\# = a \text{ oder } a^*) \quad \left. \right\}$$

erfüllen. Der spezielle Vektor, $|0\rangle$, das Vakuum, ist dadurch charakterisiert, dass

$$a(\vec{p})|0\rangle = 0, \quad \forall \vec{p}, \quad (3.15)$$

Wir definieren

$$\alpha^\#(f) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega(\vec{p})}} \alpha^*(\vec{p}) f(\vec{p}) \quad (3.16)$$

und verlangen, dass

$$(\alpha(f))^* = \alpha^*(\bar{f}). \quad (3.17)$$

Für n Funktionen, f_1, \dots, f_n , auf \mathbb{R}^3 definieren wir das n -fache symmetrische Tensor Produkt durch

$$(f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n)(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} f_1(\vec{p}_{\pi 1}) \cdots f_n(\vec{p}_{\pi n}) \quad (3.18)$$

Wir betrachten nun Zustände

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{j=1}^n \alpha^*(f_j) |0\rangle, \varphi = \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{j=1}^n \alpha^*(g_j) |0\rangle$$

Dann verifiziert man mit Hilfe von (3.14) - (3.17) leicht, dass

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \langle f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n, g_1 \otimes_s \cdots \otimes_s g_n \rangle \quad (3.19)$$

Der Hilbertraum der als Abschluss aller endlichen Linear kombinationen von Vektoren der Form

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{j=1}^n \alpha^*(f_j) |0\rangle$$

in der durch (3.19) gegebenen Norm entsteht, ist isomorph zum Fockraum.

Die Darstellung der Poincaré Gruppe ist durch die Bedingungen

$$U(\lambda, \alpha)|0\rangle = |0\rangle,$$

$$U(\lambda, \alpha) \alpha^*(p) U(\lambda, \alpha)^{-1} = e^{i(\omega(\vec{p})\lambda^0 - \vec{p} \cdot \vec{\alpha})} \alpha^*(\overrightarrow{\lambda p}) \sqrt{\frac{\omega(\vec{\lambda p})}{\omega(\vec{p})}}, \quad (3.21)$$

$\forall (\lambda, \alpha) \in P_+^\uparrow$, eindeutig charakterisiert.

Nun kommen wir zur Definition des Feldoperators, φ .

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left\{ \alpha^* \left(e^{-i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right) + \alpha \left(e^{-i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega(\vec{p})}} \left\{ \alpha^*(\vec{p}) e^{-i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} + \alpha(\vec{p}) e^{-i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right\} \quad (3.21) \end{aligned}$$

Wir wollen nun die invarianten Distributionen

$$i\Delta^+(x-y) = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle. \quad (2\text{-Punkt Funktion}) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} i\Delta(x-y) &= \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle \quad (\text{Kommutator}) \quad (3.23) \\ &= [\varphi(x), \varphi(y)] \end{aligned}$$

und

$$i\Delta_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) i\Delta^+(x-y) + \Theta(y^0 - x^0) i\Delta^+(y-x), \quad (3.24)$$

(Feynman Propagator)

berechnen.

Wegen (5.41), (5.42) und (5.47) ist

$$\begin{aligned} i\Delta^+(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} e^{-i(\omega(\vec{p})(x^0-y^0)-\vec{p}(\vec{x}-\vec{y}))} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \Theta(p^0) \delta(p^2-m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (3.25) \end{aligned}$$

Dies hätte man auch direkt aus (3.7) und der Konstruktion der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ablesen können. Denn diese ist so eingerichtet, dass (3.25) das invariante Skalarprodukt (3.7) reproduziert.

Aus (3.14) und (3.21) erhalten wir

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} \left\{ e^{-i(\omega(\vec{p})(x^0-y^0)-\vec{p}(\vec{x}-\vec{y}))} \right. \\ &\quad \left. - e^{i(\omega(\vec{p})(x^0-y^0)-\vec{p}(\vec{x}-\vec{y}))} \right\} \\ &= i\Delta^+(x-y) - i\Delta^+(y-x) \quad (3.26) \\ &\equiv i\Delta(x-y) \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt aus einem Vergleich mit (3.25); die dritte Gl. ist die Definition von Δ . Aus (3.25) und (3.26) erschien wir, dass Δ Lorentz-invariant

ist, und dass Δ durch

$$\begin{aligned} i\Delta(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \{ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)}, \quad (3.27) \end{aligned}$$

wo $\varepsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x)$ ist.

Setzen wir $x^0 = y^0$, aber $\vec{x} \neq \vec{y}$, so haben wir

$$i\Delta(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\omega(\vec{p})} \sin(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) \quad (3.28)$$

Nun ist ω gerade in \vec{p} ($\omega(\vec{p}) = \omega(-\vec{p})$), aber $\sin(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}))$ ist ungerade in \vec{p} . Daher folgt für

$x^0 = y^0$, $\vec{x} \neq \vec{y}$, dass $\Delta(x-y) = 0$. Da Δ Lorentz-invariant ist, folgt

$$i\Delta(x-y) = [\varphi(x), \varphi(y)] = 0, \text{ für } (x-y)^2 < 0 \quad (3.29)$$

$(x-y)^2 < 0$ heißt, dass $x-y$ raumartig ist!)

Dies drückt die Einst ein-Rausalität aus: Falls $x-y$ raumartig ist, so vertauschen $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$.

Wir setzen nun

$$\pi(x) = \partial_0 \varphi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi \right)(t, \vec{x}). \quad (3.30)$$

Dann folgt aus (3.26), dass

$$[\pi(0, \vec{x}), \varphi(0, \vec{y})]$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} \left\{ \omega(\vec{p}) e^{-i(\omega(\vec{p})(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}))} \right. \\ \left. + \omega(\vec{p}) e^{i(\omega(\vec{p})(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}))} \right\}_{x^0 = y^0}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \cos \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = -i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.31)$$

Offenbar erfüllen also π und φ kanonische Ver-
tauschungsrelationen. Aus (3.21) schließt man mühe-
los, dass

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (3.32)$$

als Gl. für eine operatorwertige Distribution φ
auf dem Fockraum \mathcal{F} .

Nun wollen wir den in (3.24) definierten Feynman
Propagator Δ_F berechnen. Zuerst zeigen wir, dass Δ_F eine
Lorentz-invariante Distribution ist: Sei $x-y$ raum-
artig. Dann gilt, wie in (3.29) gezeigt, dass

$$\Delta(x-y) \stackrel{\uparrow}{=} \Delta^+(x-y) - \Delta^+(y-x) = 0,$$

(3.26)

d.h. $\Delta^+(x-y) = \Delta^+(y-x)$. Weiter ist

$$\Theta(x^0 - y^0) + \Theta(y^0 - x^0) = 1.$$

Also folgt mit (3.24)

$$\Delta_F(x-y) = \Delta^+(x-y), \text{ für } (x-y)^2 < 0, \quad (3.33)$$

und Δ^+ ist Lorentz-invariant. Falls nun $x-y$ zeit-

artig ist, d.h. $(x-y)^2 \geq 0$, dann ist $\text{sig}(x^0 - y^0)$

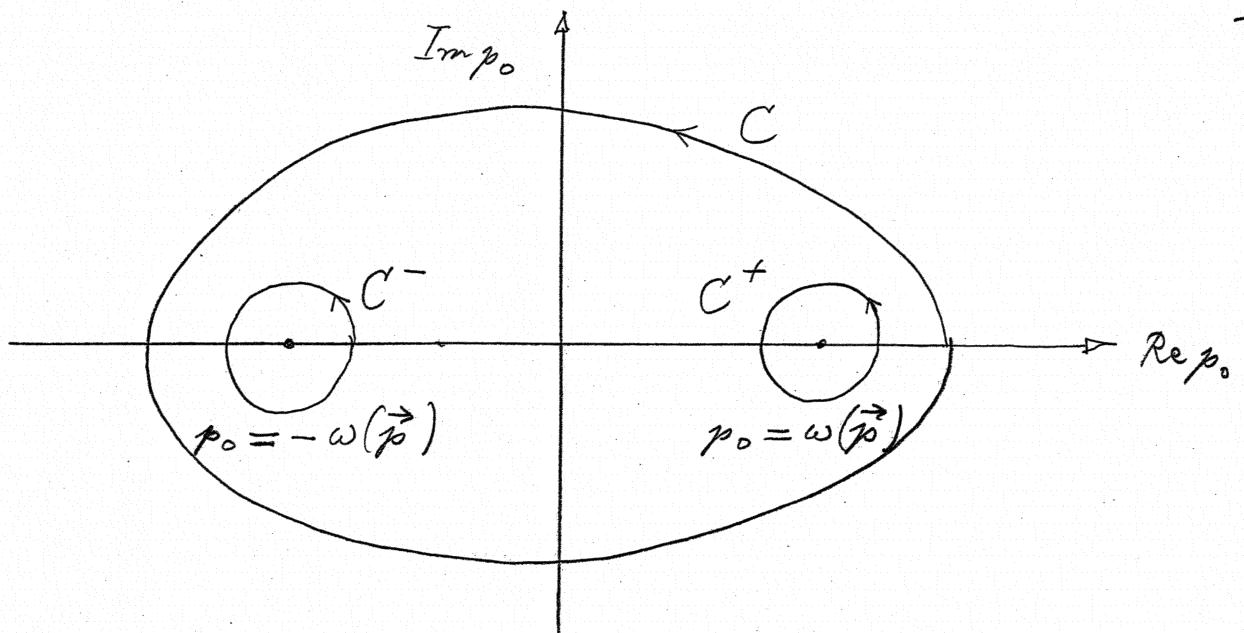
Lorentz-invariant, und es folgt aus (3.24), dass

$$\left. \begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \Delta^+(x-y), \text{ für } (x-y)^2 \geq 0, \text{ sig}(x^0 - y^0) > 0, \\ \Delta_F(x-y) &= \Delta^+(y-x), \text{ für } (x-y)^2 \geq 0, \text{ sig}(x^0 - y^0) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Gln. (3.33) und (3.34) beenden den Beweis der Lorentz-Invarianz von Δ_F .

Schliesslich wollen wir $\Delta, \Delta^+, \Delta^-(x-y) \equiv -\Delta^+(y-x)$

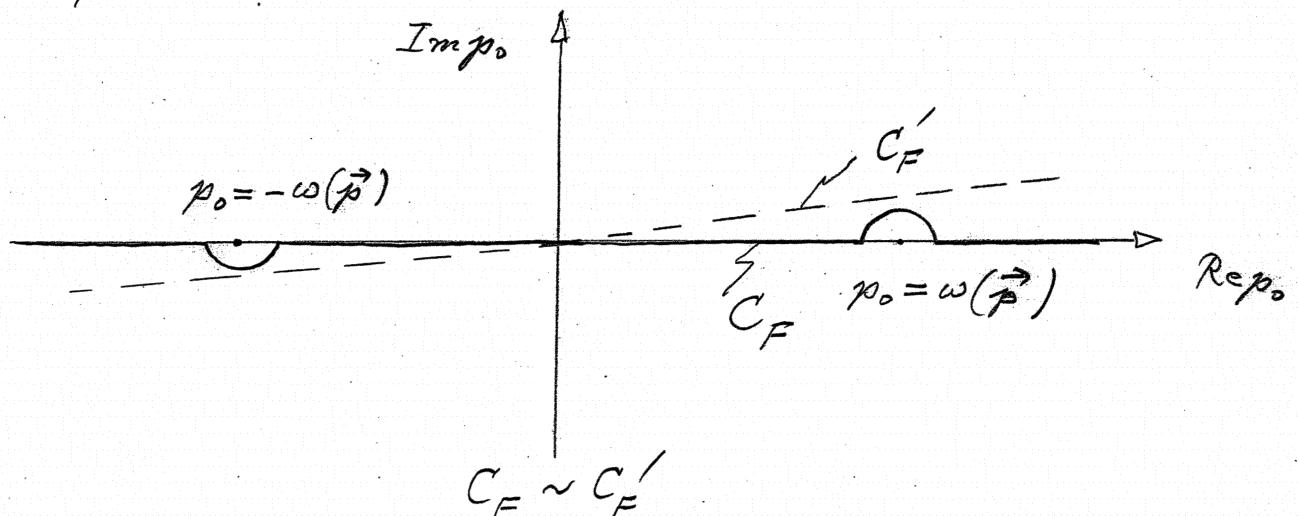
und Δ_F noch durch Kontur-Integrale in der komplexen p_0 -Ebene ausdrücken.



$$\Delta^\pm(x) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2} \quad (3.35)$$

$$\Rightarrow \Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int_C d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2} \quad (3.36)$$

Für Δ_F wählen wir die Kontur



Dann ist

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{M^4} d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (3.37)$$

Gl. (3.35) ist mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes leicht zu verifizieren, (3.36) folgt aus (3.35) und (3.26), (3.37) schliesslich aus (3.24) und (3.35). Einzelheiten seien dem Leser als nützliche Übung überlassen; (siehe auch Mandl & Shaw, pp 52, 53 und 57).

Bemerkung. Statt der Operatoren a, a^* werden in der neuen Literatur oft auch die Operatoren

$$\alpha^\#(\vec{p}) = \sqrt{2\omega(\vec{p})} a^\#(\vec{p}), \quad (3.38)$$

mit

$$[\alpha(\vec{p}), \alpha^*(\vec{p}')] = 2\omega(\vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (3.39)$$

$$[\alpha^\#(\vec{p}), \alpha^\#(\vec{p}')] = 0,$$

benötzt. Man kann auch Operatoren $A(p)$ und

$A^*(p)$ benutzen, wo

$$[A(p), A^*(p')] = \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \delta(p - p'), \dots$$

Dann gilt, dass

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p (A^*(p) e^{-ip \cdot x} + A(p) e^{ip \cdot x}) \Theta(p_0),$$

$$A(p)|0\rangle = 0.$$

Das komplexe Skalarfeld ist eine ganz einfache Verallgemeinerung des bis anhin diskutierten, reellen Skalarfeldes:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega(\vec{p})}} \left\{ a^*(\vec{p}) e^{i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} + b(\vec{p}) e^{-i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right\}, \quad (3.40)$$

$$\varphi^*(x) = (a^* \rightarrow b^*, b \rightarrow a).$$

Wie a, a^* erfüllen auch b und b^* die kanonischen Vertauschungsrelationen (3.14).

4. Quantisierte Dirac- und Majorana Felder

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer etwas detaillierteren Diskussion einer irreduziblen, unitären Darstellung, U^v , der quantenmechanischen Poincaré Gruppe mit Masse $m > 0$ und Spin $s = \frac{1}{2}$, (resp. $m = 0$ und Helizität $\lambda = \pm \frac{1}{2}$). Diese Darstellung gehört zum Massenhypersboloid

$$V = V_m^+ = \{p : p^2 = m^2, p_0 \geq 0\}, \quad m > 0. \quad (4.1)$$

Der Darstellungsraum sei mit \mathcal{H}^v bezeichnet. Für $p \in V_m^+$ bezeichne $H_p \cong SO(3)$ ($m > 0$) die kleine Gruppe in L_+^1 , die p fest lässt. Wie in Kap. 2 gelernt, ist

$$\mathcal{H}^v = \int^\oplus \mathcal{H}_p^v, \quad (4.2)$$

und \mathcal{H}_p^v trägt eine irreduzible Darstellung, $U_v \upharpoonright H_p$, der Überlagerungsgruppe $\tilde{H}_p \cong SU(2)$ (für $m > 0$). Wir untersuchen hier den Fall, wo $U_v \upharpoonright \tilde{H}_p$ äquivalent zur Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung der $SU(2)$ ist.

Darstellungen allgemeinen Spins $s = 1, \frac{3}{2}, \dots$ findet man durch einfache Verallgemeinerung der nun zu skizzierenden Methode.

Für $s = \frac{1}{2}$ ist $\mathcal{H}_p^v \cong \mathbb{C}^2$, der Raum der zweikomponentigen Spinoren. Wir bezeichnen sie mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Der zu v komplex-konjugierte Spinor ist

$\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt in \mathcal{H}_p^v wird durch

$$\langle v', v \rangle_{\mathcal{H}_p^v} := (v', (p \cdot \sigma)v) \equiv \bar{v}'^\alpha (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\alpha\beta} v_\beta. \quad (4.3)$$

definiert. Sei Λ_p eine Lorentz Transformation mit der Eigenschaft, dass $\Lambda_p \begin{pmatrix} m \\ \vec{p} \end{pmatrix} = p$. Dann gilt

nach Kap. 2,

$$p \cdot \sigma = A(\Lambda_p)^{-1} m \sigma_0 (A(\Lambda_p)^{-1})^*, \quad m \sigma_0 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Da $m \sigma_0 > 0$, zeigt diese Gleichung, dass auch die 2×2 Matrix $p \cdot \sigma$ strikte positiv ist, für alle $p \in V_m^+$.

Daher definiert (4.3) ein positiv definites Skalarprodukt auf \mathcal{H}_p^v . [Für $m=0$, hat die Matrix

$p \cdot \varsigma$ die Eigenwerte $2/\vec{p}/$ und 0, ist also positiv-semidefinit. Dies liegt daran, dass für $m=0$ die Darstellung der kleinen Gruppe $H_p \cong E(2)$ zur Helizität $\lambda = -\frac{1}{2}$ eindimensional ist. Der Darstellungsraum ist der vom Eigenvektor von $p \cdot \varsigma$ zum Eigenwert $2/\vec{p}/$ aufgespannte Unterraum von $\mathcal{H}_p^{\omega}.$]

Sei $\Lambda \in H_p$ (i.e., $\Lambda p = p$). Dann gilt auch

$$A(\Lambda)^{-1}(p \cdot \varsigma)(A(\Lambda)^*)^{-1} = p \cdot \varsigma \quad (4.5)$$

Daher

$$\begin{aligned} & \left\langle (A(\Lambda)^*)^{-1}v', (A(\Lambda)^*)^{-1}v \right\rangle_{\mathcal{H}_p^{\omega}} \\ &= (v', A(\Lambda)^{-1}(p \cdot \varsigma)(A(\Lambda)^*)^{-1}v) \\ &= (v', (p \cdot \varsigma)v) \\ &= \langle v', v \rangle_{\mathcal{H}_p^{\omega}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

d.h. das Skalarprodukt von \mathcal{H}_p^{ω} ist invariant unter der zweiwertigen Darstellung $\Lambda \mapsto (A(\Lambda)^*)^{-1}$ der kleinen Gruppe $H_p.$ Diese ist daher unitär

äquivalent zur Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung von $SU(2)$; insbesondere ist sie irreduzibel.

Wir definieren

$$P := p \cdot \sigma, \quad \bar{P} = \overline{p \cdot \sigma} = p_0 \sigma^0 + p_1 \sigma^1 - p_2 \sigma^2 + p_3 \sigma^3 \quad (4.7)$$

Die Matrixelemente von \bar{P} bezeichnen wir konsequenterweise mit $(\bar{p} \cdot \sigma)_{\alpha \beta}$. Nun ziehen wir diese Indizes mit Hilfe der Matrizen $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und ε^{-1} runder:

$$\hat{P} := \varepsilon \bar{P} \varepsilon^{-1} = p_0 \sigma^0 - p_1 \sigma^1 - p_2 \sigma^2 - p_3 \sigma^3, \quad (4.8)$$

denn $\varepsilon \sigma^\mu \varepsilon^{-1} = \sigma^\mu$, $\mu = 0, 2$, und $= -\sigma^\mu$, $\mu = 1, 3$.

Die Matrixelemente von \hat{P} bezeichnen wir mit $(\hat{p} \cdot \sigma)_{\alpha \beta}$,

wo $\hat{p} = (p_0, -\vec{p})$. Offenbar entspricht der Übergang von P nach \hat{P} einer Raumspiegelung. Wir bemerken,

dass für $A \in H_p$: (d.h. $A p = p$)

$$A(\Lambda)^* \hat{P} A(\Lambda) = \hat{P}. \quad (4.9)$$

Nun können wir offenbar eine weitere irreduzible, unitäre Darstellung U_u von \tilde{H}_p auf einem Darstellung.

raum \mathcal{H}_p^u wie folgt konstruieren: Elemente von \mathcal{H}_p^u sind zweikomponentige Spinoren $\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt auf \mathcal{H}_p^u ist durch

$$\langle u', u \rangle_{\mathcal{H}_p^u} := (u', \hat{P} u) = \bar{u}'^\alpha \hat{P}_{\alpha\beta} u^\beta \quad (4.10)$$

gegeben. Aufgrund von (4.9) ist dieses Skalarprodukt unter der zweivertigen Darstellung

$$\Lambda \mapsto A(\Lambda) \quad (4.11)$$

von H_p invariant. D.h. (4.11) definiert eine irreduzible, unitäre Darstellung von \tilde{H}_p .

Nun definieren wir die Skalarprodukte auf den Räumen $\mathcal{H}^v = \int^\oplus \mathcal{H}_p^v$ und $\mathcal{H}^u = \int^\oplus \mathcal{H}_p^u$:

$$\langle v', v \rangle_{\mathcal{H}^v} := \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (v'_p, P v_p), \quad (4.12)$$

$(v_p \in \mathcal{H}_p^v)$, und

$$\langle u', u \rangle_{\mathcal{H}^u} := \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (u'_p, \hat{P} u_p), \quad (4.13)$$

$(u_p \in \mathcal{H}_p^u)$. Definieren wir nun

$$(U^v(\Lambda, \alpha)v)_p := e^{-i(\omega(\vec{p})\alpha^\circ + \vec{p} \cdot \vec{\alpha})} (A(\Lambda)^*)^{-1} v_{\Lambda^{-1}\vec{p}}, \quad (4.14)$$

und

$$(U^u(\Lambda, \alpha)u)_p := e^{-i(\omega(\vec{p})\alpha^\circ + \vec{p} \cdot \vec{\alpha})} A(\Lambda) u_{\Lambda^{-1}\vec{p}}, \quad (4.15)$$

so ist leicht zu verifizieren, dass U^v eine irreduzible,

unitäre Darstellung von \tilde{P}_+^1 auf \mathcal{H}^v und U^u

eine solche auf \mathcal{H}^u ist. Die Irreduzibilität dieser

Darstellungen ist offensichtlich. Die Unitarität von

U^v ersieht man aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} & \langle U^v(\Lambda, \alpha)v', U^v(\Lambda, \alpha)v \rangle \\ &= \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) ((A(\Lambda)^*)^{-1} v'_{\Lambda^{-1}\vec{p}}, P(A(\Lambda)^*)^{-1} v_{\Lambda^{-1}\vec{p}}) \\ &= \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (v'_{\Lambda^{-1}\vec{p}}, A(\Lambda^{-1})(p \cdot \sigma) A(\Lambda^{-1})^* v_{\Lambda^{-1}\vec{p}}) \\ &\stackrel{(2.)}{=} \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (v'_{\Lambda^{-1}\vec{p}}, (\Lambda^{-1}\vec{p} \cdot \sigma) v_{\Lambda^{-1}\vec{p}}) \\ &= \int d^4 q \Theta(q_0) \delta(q^2 - m^2) (v'_{\vec{q}}, Q v_{\vec{q}}) \\ &= \langle v', v \rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

In der zweitletzten Gleichung wurde die Lorentz-Invarianz des Masses $d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2)$ ($\gamma = 1/p$) benutzt.

Die Unitarität von U^u folgt aus einer ähnlichen Rechnung.

Nun gibt es nach der allgemeinen Theorie von Wigner bis auf unitäre Äquivalenz nur eine Darstellung von \hat{P}_+^\uparrow zur Masse $m > 0$ und zum Spin $s = \frac{1}{2}$.

Also müssen U^u und U^v unitär äquivalent sein!

Wir definieren eine unitäre Abbildung, π , von \mathcal{H}^v auf \mathcal{H}^u wie folgt:

$$(\mathbb{P} v)_p = \gamma v_{\hat{p}}, \quad (4.17)$$

mit der Umkehrabbildung

$$(\mathbb{P} u)_p = \gamma u_{\hat{p}}. \quad (4.18)$$

Dabei ist $\gamma = \pm 1$ oder $\pm i$, und $\hat{p} = (p_0, -\vec{p})$.

Man sieht sofort, dass

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{P} v', \mathbb{P} v \rangle_{\mathcal{H}^u} &= \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) ((\mathbb{P} v')_p, \hat{\mathbb{P}} (\mathbb{P} v)_p) \\ &= \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (v'_{\hat{p}}, \hat{\mathbb{P}} v_{\hat{p}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (v'_p, P v_p) \\
 &= \langle v', v \rangle_{\mathcal{H}^v}, \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

wegen der Invarianz von $d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2)$ unter
 $\vec{p} \mapsto -\vec{p}$; etc.. Wie man nun sofort verifiziert, gilt

$$U^u(\Lambda, \alpha) = P U^v(\Lambda, \alpha) P^*, \tag{4.20}$$

was die unitäre Äquivalenz von U^v und U^u beweist.
Aus (4.17) und (4.18) ersehen wir, dass P physika-
lisch die Bedeutung der Raumspiegelung hat.

In den Übungen überlegen wir uns, dass die
Zeitumkehr durch den antunitären Operator,

$$T: \mathcal{H}^u \rightarrow \mathcal{H}^v, \quad \mathcal{H}^v \rightarrow \mathcal{H}^u, \text{ mit}$$

$$(T v)_p = \gamma' \varepsilon \overline{v_p}, \quad \gamma' = \pm 1, \pm i, \tag{4.21}$$

gegeben ist. Dies folgt aus der Gleichung

$$-\varepsilon \overline{A(\Lambda)} \varepsilon = (A(\Lambda)^*)^{-1}, \tag{4.22}$$

siehe (2.25). Schliesslich definiert man noch einen
unitären Operator C , der physikalisch der Hadungs-
konjugation entspricht; (siehe Übungen). Es wurde

von R. Jost allgemein gezeigt, dass das Produkt

$$\theta = PCT$$

(antiumitär!) eine diskrete Symmetrie jeder lokalen QFT ist, selbst wenn P , C und T einzeln keine Symmetrien zu sein brauchen; (schwache WW , K -Zerfall). Der Operation θ entspricht der Übergang von Teilchen zu Antiteilchen.

In den Formeln (4.12) – (4.15) und (4.17), (4.18) verbirgt sich die Dirac Gleichung ($m > 0$), in (4.12) und (4.14) die Weyl Gleichung ($m = 0$). Um zur Dirac Gleichung zu gelangen, ist es zweckmäßig, $\mathcal{H}^v \oplus \mathcal{H}^u$ in zwei neue Unterräume zu zerlegen:

Sei $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^v \oplus \mathcal{H}^u$. Ein Unterraum, \mathcal{H}^D , in $\mathcal{H}^v \oplus \mathcal{H}^u$

ist durch die lineare Gleichung

$$Pv = mu \quad (4.23)$$

definiert, wo $(Pv)_p := (p \cdot \sigma)v_p$. Nun gilt

$$\hat{P}P = P\hat{P} = p^2, \quad (4.24)$$

denn

$$\begin{aligned}
 (\vec{p}_0 \xi^0 + \vec{p} \cdot \vec{\xi})(\vec{p}_0 \xi^0 - \vec{p} \cdot \vec{\xi}) &= p_0^2 - p_0 \xi^0 (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) p_0 \xi^0 \\
 &\quad - (\vec{p} \cdot \vec{\xi})^2 \\
 &= p_0^2 - \vec{p}^2 = p^2 \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Falls $p^2 = m^2$, wie es auf dem Träger des Masses

$$d\rho(p) = \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) d^4 p$$

der Fall ist, so folgt

$$\hat{P} P v = m \hat{P} u, \text{ also, mit (4.24),}$$

$$\hat{P} u = m v.$$

Das Paar von Gleichungen

$$P v = m u, \text{ und } \hat{P} u = m v \tag{4.26}$$

ist gerade die Dirac Gleichung im Bi-Spinor Formalismus

Die Gl. (4.26) sind äquivalent zu den Gl.

$$P v = m u, \quad p^2 = m^2.$$

Wegen (4.12), (4.13) und (4.26) gilt für

$$U := \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^D = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} : P \tilde{v} = m \tilde{u} \right\}, \text{ und}$$

$$U' := \begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^D, \text{ dass}$$

$$\begin{aligned}
 \langle U', U \rangle &= \int d\rho(p) \left\{ (v'_p, P v_p) + (u'_p, \hat{P} u_p) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int d\rho(p) \left\{ (v'_p, P v_p) + m(v'_p, u_p) \right. \\
 &\quad \left. + (u'_p, \hat{P} u_p) + m(u'_p, v_p) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int d\rho(p) \left(U'_p, \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix} U_p \right) \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

Nun definieren wir einen zu \mathcal{H}^D orthogonalen Unterraum $\mathcal{H}^{\bar{D}}$ so, dass

$$\mathcal{H}^D \oplus \mathcal{H}^{\bar{D}} = \mathcal{H}^w \oplus \mathcal{H}^u.$$

Sei $U = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^D$ und $V = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^{\bar{D}}$. Dann muss nach Definition von \mathcal{H}^D und $\mathcal{H}^{\bar{D}}$ gelten, dass

$$\begin{aligned}
 \langle V, U \rangle &= \int d\rho(p) \left\{ (\tilde{v}, P v) + (\tilde{u}, \hat{P} u) \right\} \\
 &\stackrel{(4.26)}{=} \int d\rho(p) \left\{ m(\tilde{v}, u) + (\tilde{u}, \hat{P} u) \right\} \\
 &= \int d\rho(p) \left\{ m(\tilde{v}, u) + (\hat{P} \tilde{u}, u) \right\} \\
 &\stackrel{!}{=} 0 \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

Da diese Gl. für beliebige $U \in \mathcal{H}^D$ gilt, folgt

$$\hat{P} \tilde{u} = -m \tilde{v}, \tag{4.29}$$

für alle $V = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^D$! Daraus folgt, dass auf dem Träger des Masses $d\rho$ gilt:

$$P\tilde{v} = -m\tilde{u}, \text{ für alle } V = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^D; \quad (4.30)$$

(man benütze wieder (4.24)). Nun zeigt man wie in (4.27), dass

$$\langle V', V \rangle = \frac{1}{2} \int d\rho(p) \left(V'_p, \begin{pmatrix} P & -m \\ -m & \hat{P} \end{pmatrix} V_p \right). \quad (4.31)$$

Konventionellweise setzt man in (4.27) und (4.31)

die Faktoren $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2m}$.

Nun bemerken wir, dass für $V \in \mathcal{H}^D$

$$\begin{pmatrix} P & -m \\ -m & \hat{P} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} P\tilde{v}_p - m\tilde{u}_p \\ -m\tilde{v}_p + \hat{P}\tilde{u}_p \end{pmatrix} = 0, \quad (4.32)$$

falls $p^2 = m^2$, wegen (4.26). Genauso sieht man,

dass für $V \in \mathcal{H}^D$

$$\begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} P\tilde{v}_p + m\tilde{u}_p \\ m\tilde{v}_p + \hat{P}\tilde{u}_p \end{pmatrix} = 0, \quad (4.33)$$

falls $p^2 = m^2$. Aus (4.27), (4.31) – (4.33) folgt daher,

dass die 4×4 Matrizen $\begin{pmatrix} P & m \\ m & \tilde{P} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} P & -m \\ -m & \tilde{P} \end{pmatrix}$

positiv-semidefinit, mit Nullräumen \mathcal{H}^D ,

resp. $\mathcal{H}^{\bar{D}}$, sind. Aus der Kovarianz der Glv. (4.26),
(4.29) und (4.30) unter Lorentz Transformationen folgt,

dass \mathcal{H}^D und $\mathcal{H}^{\bar{D}}$ invariant unter der mit \tilde{P}_+^\dagger

Darstellung $U^v \oplus U^u$ von \tilde{P}_+^\dagger sind. Man beacht

dass die Darstellung $U^v \oplus U^u$ zwar reduzibel

als Darstellung von \tilde{P}_+^\dagger , aber irreduzibel als

Darstellung von \tilde{P} ist, da man dann noch die

Operatoren P und T dazu nehmen muss, die \mathcal{H}^v

\mathcal{H}^u vertauschen.

Damit haben wir die relativistische Quantenmechanik
eines freien Teilchens mit Masse m und Spin $\frac{1}{2}$ entwickelt

Seine Zustände können durch Bi-Spinoren nur dann

beschrieben werden, wenn man darauf verzichtet, dass

P und T Symmetrien der Theorie sein sollen. Fordert man

dass P und T Symmetrien sind, dann werden die Zustände durch Paare $\binom{w}{n}$ von Bi-Spinoren, also durch Viererspinoren beschrieben.

Nun wollen wir ein System von $n = 0, 1, 2, \dots$ relativistischen Teilchen mit Masse $m > 0$ und Spin $\frac{1}{2}$ beschreiben, die untereinander keine Wechselwirkungen haben. Dies geschieht wieder über die Fockraumkonstruktion. Wieder müssen wir uns entscheiden, ob diese Teilchen Fermi-Dirac oder Bose-Einstein Statistik erfüllen sollen. Diesmal entscheiden wir uns für Fermi-Dirac Statistik. [Später werden wir lernen wieso.] Um den Kontakt mit der Lehrbuchliteratur herzustellen, benutzen wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und arbeiten mit den Räumen \mathcal{H}^D und $\mathcal{H}^{\bar{D}}$ und den Skalarprodukten (4.27) und (4.31).

Die 4×4 Matrix $\begin{pmatrix} P & m \\ m & \bar{P} \end{pmatrix}$ hat den Rang 2, mit

Nullraum = \mathcal{H}_p^D , und ist positiv-semidefinit. Daraus gibt es zwei sog. Dirac Spinoren, $U_1(p)$ und $U_2(p)$,

mit $U_j(p) = \begin{pmatrix} v^{(j)} \\ p \\ u^{(j)} \\ p \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_p^D$, so, dass

$$U_1(p) \cdot \overline{U_1(p)}^T + U_2(p) \cdot \overline{U_2(p)}^T = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \hat{P} & m \\ m & P \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Diese Gleichung folgt aus der Definition des Skalarprodukts (4.27) und der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2m}\right)^3 \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P} & m \\ m & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix} = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Da $U_1(p)$ und $U_2(p)$ in \mathcal{H}_p^D sind, gilt aufgrund von (4.26), dass für $p^2 = m^2$

$$\begin{pmatrix} -m & \hat{P} \\ P & -m \end{pmatrix} U_j(p) = 0, \text{ für } j=1,2. \quad (4.36)$$

Diese Gleichung muss mit (4.34) kompatibel sein,

was offensichtlich der Fall ist! Die Gleichung

(4.36) ist die Dirac Gleichung für Vierer (Dirac-)Spinoren im Impulsraum.

Die 4×4 Matrix $\begin{pmatrix} P & -m \\ -m & \hat{P} \end{pmatrix}$ hat den Rang 2

(Nullraum \mathcal{H}_p^D) und ist positiv-semidefinit.

Darum gibt es zwei Dirac Spinoren $V_1(p)$ und $V_2(p)$ in \mathcal{H}_p^D so, dass

$$V_1(p) \overline{V_1(p)}^T + V_2(p) \overline{V_2(p)}^T = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \hat{P} & -m \\ -m & P \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Der Beweis ist wie oben. Da $V_1(p)$ und $V_2(p)$ in \mathcal{H}_p^D liegen, erfüllen sie aufgrund von (4.29) und (4.30) die Gleichung

$$\begin{pmatrix} m & \hat{P} \\ P & m \end{pmatrix} V_j(p) = 0, \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} -m & \hat{P} \\ P & -m \end{pmatrix} V_j(-p) = 0, \quad V_j(p) \in \mathcal{H}_{p+}^D, \quad (4.38)$$

für $j=1,2$, ($p^2=m^2$ vorausgesetzt). Gl. (4.38)

ist wieder die Dirac Gleichung im Impulsraum.

Die Lösungen $V_1(p), V_2(p)$ haben positive Energie da sie in \mathcal{H}_p^D sind, für $p=(\omega(\vec{p}), \vec{p})$,

$\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, wo hingegen $V_1(-p)$ und $V_2(-p)$ negative Energie haben, da nur $V_j(p) \in \mathcal{X}_{\vec{p}}^D$,

$$p = (\omega(\vec{p}), \vec{p}).$$

Es ist einfach, natürliche Lösungen $U_j(m, \vec{0})$ und $V_j(-m, \vec{0})$, $j=1,2$, zu (4.36) und (4.38) zu finden. Die allgemeinen Lösungen $U_j(p)$, $V_j(p)$, $j=1,2$, findet man dann durch Anwendung eines Boosts Λ_p , der $\begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ in $p \in V_m^+$ überführt; (siehe Übungen).

Nun führen wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein: Es seien $c_j^*(\vec{p})$, $c_j(\vec{p})$, $d_j^*(\vec{p})$ und $d_j(\vec{p})$ Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die, der Fermi-Dirac Statistik entsprechend kanonische Antivertauschungsrelationen erfüllen

$$\begin{aligned} [c_j(\vec{p}), c_k^*(\vec{p}')]_ &= \{c_j(\vec{p}), c_k^*(\vec{p}')\} \\ &= \delta_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$[d_j(\vec{p}), d_k^*(\vec{p}')]_ = \delta_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (4.40)$$

$$[c_j^\#, c_k^\#]_ = [d_j^\#, d_k^\#]_ = 0, \text{ und} \quad (4.41)$$

$$[c_j, d_k]_ = [c_j, d_k^*]_ = [c_j^*, d_k]_ = [c_j^*, d_k^*]_ = 0. \quad (4.42)$$

Es sei $|0\rangle$ ein Zustand, das Vakuum mit den Eigen-schäften

$$c_j(\vec{p})|0\rangle = d_j(\vec{p})|0\rangle = 0, \quad \forall j=1,2 \text{ und } \vec{p}, \quad (4.43)$$

$$\text{und } \langle 0|0 \rangle = 1. \quad (4.44)$$

Schliesslich sei $c_j^*(\vec{p}) = (c_j(\vec{p}))^*$ die zu $c_j(\vec{p})$ adjungierte operatorwertige Distribution, und $d_j^*(\vec{p}) = (d_j(\vec{p}))^*$, $\forall j, \vec{p}$.

Wir definieren den Dirac Feldoperator durch

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^2 \int d^3 p \sqrt{\frac{m}{\omega(\vec{p})}} \left[c_j(\vec{p}) U_j(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \right. \\ &\quad \left. + d_j^*(\vec{p}) V_j(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right], \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\text{wo } x = (t, \vec{x}), p = (p_0, \vec{p}), p_0 = \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Offensichtlich erfüllt $\psi(x)$ die Klein-Gordon Gleichung;
die Dirac Gleichung verifizieren wir später.

Durch Einführung der Dirac'schen γ -Matrizen
wollen wir nun unsere Notationen den in der Lehr-
buchliteratur üblichen anpassen. Wir definieren

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Dann finden wir leicht, dass

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (4.47)$$

wo $g^{\mu\nu}$ die Lorentzmetrik $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist.

Die Indizes, μ , der Dirac Matrizen, γ^μ , werden
mit der Metrik $g_{\mu\nu}$ untergezogen. Wir finden

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Wir definieren

$$\not{p} := \sum_{\mu=1}^4 p_\mu \gamma^\mu \equiv p_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \hat{P} \\ P & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

und

$$\gamma^0 \not{p} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \hat{P} \end{pmatrix}$$

Die Dirac Gln. für die Spinoren $U_j(p)$, siehe (4.36), und $V_j(p)$, siehe (4.38), können nun wie folgt geschrieben werden

$$(\not{p} - m) U_j(p) = 0, \quad j=1,2 \quad (4.50)$$

und

$$(\not{p} + m) V_j(p) = 0, \quad j=1,2$$

→ Aus diesen Gln. und (4.45) folgt, dass

$$(i\not{p} - m) \psi(x) = 0, \quad (4.51)$$

d.h. ψ erfüllt die Dirac Gleichung im Ortsraum.

Nun definieren wir "konjugierte" Diracspinoren,

$$\overline{U}_j(p) = \overline{U_j(p)}^T \gamma_0, \quad \overline{V}_j(p) = \overline{V_j(p)}^T \gamma_0 \quad (4.52)$$

und den konjugierten Feldoperator

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(x) &= \psi(x)^* \gamma_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^2 \int d^3 p \sqrt{\frac{m}{\omega(\vec{p})}} \left[c_j(p) \overline{V}_j(p) e^{-ip \cdot x} \right. \\ &\quad \left. + c_j^*(\vec{p}) \overline{U}_j(p) e^{ip \cdot x} \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

Daraus folgt die Gl.

$$\overline{\psi}(x) (\not{p} + m) = 0 \quad (4.54)$$

Sei ψ eine beliebige Dirac spinor-wertige Testfunktion auf M^4 . Wir definieren

$$\psi^*(f) := \int d^4x \bar{\psi}(x) \frac{1}{2m} (\not{p} + m) f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \int d^3p \sqrt{\frac{1}{4m\omega(\vec{p})}} \left[d_j(\vec{p}) \bar{V}_j(p) (-\not{p} + m) \hat{f}(-p) \right. \\ \left. + c_j^*(\vec{p}) \bar{U}_j(p) (\not{p} + m) \hat{f}(p) \right]. \quad (4.55)$$

$$\psi(f) := (\psi^*(f))^*$$

Mit Hilfe von (4.34) findet man

$$\langle 0 | \psi(f) \psi^*(g) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{2\omega(\vec{p})} \overline{\hat{f}(p)}^T \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix} \hat{g}(p) \Big|_{p_0 = \omega(\vec{p})} \\ = \int d^4p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\hat{f}(p), \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix} \hat{g}(p)) \\ = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^D} \quad (4.56)$$

Die letzte Gl. folgt durch Vergleich mit (4.27). Zum Beweis der ersten Gleichung haben wir (4.55), (4.34)

und die Identitäten $\gamma_0(\not{p} + m) = \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix}$ und

$$\frac{1}{8m^2} \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P} & m \\ m & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P & m \\ m & \hat{P} \end{pmatrix}, \text{ für}$$

$p_0 = \omega(\vec{p})$ benutzt.

Ähnlich berechnet man $\langle 0 | \psi(f)^* \psi(g) | 0 \rangle$;
siehe Übungen.

Den Fockraum, \mathcal{F}_D , für massive Dirac Teilchen erzeugt man durch Anwendung von Polynomen in $\psi(f)$ und $\psi^*(f)$ auf das Vakuum $|0\rangle$; f ist eine beliebige Dirac spinorwertige Testfunktion. Das Skalarprodukt auf \mathcal{F}_D berechnet sich aus (4.39) - (4.44), (siehe QM II!). Der Fockraum trägt eine (reduzible) unitäre Darstellung, U , der quantenmechanischen Poincaré Gruppe $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$. Sie wird durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$U(\Lambda, \alpha)|0\rangle = |0\rangle \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & U(\Lambda, \alpha) c_j^*(\vec{p}) U(\Lambda, \alpha)^{-1} \\ &= \sum_i \frac{Q(\Lambda, p)_{ij}}{c_i(\omega(\vec{\Lambda} \cdot \vec{p}))} e^{i(\omega(\vec{\Lambda} \cdot \vec{p}) \alpha^0 - (\vec{\Lambda} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{\alpha})} \\ & \quad \times c_i^*(\Lambda^{-1} \vec{p}) \sqrt{\frac{\omega(\vec{\Lambda} \cdot \vec{p})}{\omega(\vec{p})}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} & U(\Lambda, \alpha) d_j^*(\vec{p}) U(\Lambda, \alpha)^{-1} \\ &= \sum_i Q(\Lambda, p)_{ij} e^{i(\omega(\vec{\Lambda} \cdot \vec{p}) \alpha^0 - (\vec{\Lambda} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{\alpha})} \\ & \quad \times d_i^*(\Lambda^{-1} \vec{p}) \sqrt{\frac{\omega(\vec{\Lambda} \cdot \vec{p})}{\omega(\vec{p})}}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

wo die Matrizen $Q(\Lambda, p)$ "Wigner Rotationen" bedeuten.

Sie haben die Eigenschaft, dass

$$\sum_j Q(\Lambda, p)_{ij} U_j(p) = S(\Lambda^{-1}) U_i(\Lambda p), \quad (4.60)$$

und

$$\sum_j Q(\Lambda, p)_{ij} V_j(p) = S(\Lambda^{-1}) V_i(\Lambda p), \quad (4.61)$$

wo gemäss (4.14), (4.15), und aufgrund der Definitionen

nen

$$U_j = \begin{pmatrix} v^{(j)} \\ u^{(j)} \end{pmatrix}, \quad V_j = \begin{pmatrix} \tilde{v}^{(j)} \\ \tilde{u}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$S(\Lambda)$ durch die 4×4 Matrix

$$S(\Lambda) = \left(\begin{array}{c|c} (A(\Lambda)^*)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A(\Lambda) \end{array} \right) \quad (4.62)$$

gegeben ist. Nun folgt mit (4.45) und (4.53)

$$U(\Lambda, \alpha) \psi(x) U(\Lambda, \alpha)^{-1} = S(\Lambda^{-1}) \psi(\Lambda x + \alpha), \quad (4.63)$$

und

$$U(\Lambda, \alpha) \bar{\psi}(x) U(\Lambda, \alpha)^{-1} = \bar{\psi}(\Lambda x + \alpha) S^T(\Lambda^{-1}), \quad (4.64)$$

mit

$$S^T(\Lambda) = \left(\begin{array}{c|c} A(\Lambda)^* & 0 \\ \hline 0 & A(\Lambda)^{-1} \end{array} \right), \quad (4.65)$$

denn aufgrund der Definition von $\bar{\psi}(x)$ gilt

$$S(\Lambda)^* \gamma^0 = \gamma^0 S^*(\Lambda).$$

Vergleich von (4.62), (4.63) mit (4.64), (4.65) zeigt,
dass:

$$\bar{\psi}(x) \cdot \psi(x) \text{ ist ein Skalarfeld.} \quad (4.66)$$

Weiter folgt aus (4.63), (4.64) und der Definition
(4.48) der γ -Matrizen, dass:

$$\bar{\psi}(x) \cdot \gamma^\mu \psi(x) \text{ ist ein Vektorfeld,} \quad (4.67)$$

d.h.

$$U(\Lambda, \alpha) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) U(\Lambda, \alpha)^{-1} = \Lambda^\mu_\nu, \quad \bar{\psi}(\Lambda x + \alpha) \gamma^\nu \psi(\Lambda x + \alpha),$$

denn

$$S^*(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) = \Lambda^\mu_\nu, \quad \gamma^\nu \quad (4.68)$$

Sei

$$\gamma^5 := i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Es ist nun zu zeigen, dass:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x) &: \text{Pseudoskalarfeld,} \\ \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x) &: \text{Axialvektorfeld.} \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x); \quad \text{Axialvektorfeld.}$$

Schliesslich

$$\bar{\psi}(x)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi(x) : \text{antisymmetrischer Tensorfeld; etc.} \quad (4.71)$$

Zum Beweis von (4.70) benutzt man (4.17), (4.18) und (4.45), (4.53).

Die Operatoren $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$ sind Projektionsoperatoren; denn

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v, \quad (4.72)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = u.$$

Man nennt $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\psi$ chirale Spinoren. Aus der Dirac Gleichung (4.26) folgt

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) v_p = \frac{m}{|\vec{p}|} u_p - \frac{\omega(\vec{p})}{|\vec{p}|} \sigma_0 v_p \rightarrow -v_p, \text{ für } |\vec{p}| \rightarrow \infty, \quad (4.73)$$

und

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) u_p = -\frac{m}{|\vec{p}|} v_p + \frac{\omega(\vec{p})}{|\vec{p}|} \sigma_0 u_p \rightarrow v_p, \text{ für } |\vec{p}| \rightarrow \infty. \quad (4.74)$$

Nun beachte man, dass $\left(\vec{e} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$ die Komponente des Spins in der Bewegungsrichtung, $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, ist. Es folgt daher aus (4.73) und (4.74), dass im Hochenergie Limit, $|\vec{p}| \rightarrow \infty$, oder für $m \rightarrow 0$ (Neutrinos!)

$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \text{ rechts h\"andig und}$$

$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi$ links h\"andig transformieren. Von daher

kommt die Bezeichnung "chirale Spinoren".

Andere Darstellungen der Dirac-Clifford Algebra.

In Rechnungen ist es oft n\"utzlich, andere Darstellungen der γ -Matrizen und Dirac-Spinoren zu ben\"utzen, als die oben entwickelte "chirale Darstellung". Man erh\"alt solche neuen Darstellungen durch \"Ahnlichkeitstransformationen:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^\mu &= S \gamma^\mu S^{-1}, \\ \tilde{U}_j &= S U_j, \quad \tilde{V}_j = S V_j \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (4.75)$$

Die 4×4 Matrizen $\tilde{\gamma}^\mu$ erfüllen wieder die Strukturgleichungen der Dirac-Clifford Algebra:

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.76)$$

Beispiel 1. Standard Darstellung.

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

Daher

$$S \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+u \\ v-u \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{st.}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{st.}^i = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_i \\ \epsilon_i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Die Boost Matrix, $S(\Lambda)$, in der chiralen Darstellung für einen Boost, Λ , mit Rapidity φ in Richtung \vec{n} ist

durch

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} ((A(\Lambda)^*)^{-1} & 0 \\ 0 & A(\Lambda)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\vec{G} \cdot \vec{\varphi}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\vec{G} \cdot \vec{\varphi}} \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

mit $\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{n}$, gegeben. In der Standard Darstellung findet man daher

$$S(\Lambda)_{st.} = S S(\Lambda) S^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi/2) & \vec{e} \cdot \vec{n} \sinh(\varphi/2) \\ \vec{e} \cdot \vec{n} \sinh(\varphi/2) & \cosh(\varphi/2) \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

Dabei sind

$$\cosh(\varphi/2) = \left(\frac{\omega(\vec{p}) + m}{2m} \right)^{1/2}, \quad \sinh(\varphi/2) = \left(\frac{\omega(\vec{p}) - m}{2m} \right)^{1/2} \quad (4.81)$$

$$\tanh(\varphi/2) = \frac{|\vec{p}|}{\omega(\vec{p}) + m}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

falls $\Lambda = \Lambda_p$ der Boost ist, der $\begin{pmatrix} m \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} \omega(\vec{p}) \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

überführt. Wählen wir

$$U_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so folgt aus (4.80) und (4.81), dass

$$U_1(p) = \sqrt{\frac{\omega+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{\omega+m} \\ \frac{p_+}{\omega+m} \end{pmatrix}, \quad U_2(p) = \sqrt{\frac{\omega+m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{\omega+m} \\ \frac{-p_z}{\omega+m} \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

und

$$V_1(p) = \sqrt{\frac{\omega+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{\omega+m} \\ \frac{p_+}{\omega+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(p) = \sqrt{\frac{\omega+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{\omega+m} \\ \frac{-p_z}{\omega+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

wobei $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$. Wesentlich sind diese expliziten Formeln nicht. Viel wichtiger sind die folgenden darkel-lungsmäßigigen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \overline{U_i(p)}^T U_j(p) &= \overline{V_i(p)}^T V_j(p) = \frac{\omega(\vec{p})}{m} \delta_{ij} \\ \overline{U_i(p)}^T V_j(p) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

$$\overline{U_i(p)} U_j(p) = - \overline{V_i(p)} V_j(p) = \delta_{ij}.$$

Diese Beziehungen folgen aus den entsprechenden, leicht zu verifizierenden Gln. für $\rho = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Tatsache, dass:

$$\overline{U}_i^T U_j = \bar{U}_i \gamma^0 U_j \quad \text{transformiert wie}$$

die Nullkomponente eines Vektors;

~~$\bar{U}_i U_j$ ist ein Lorentz-Skalar.~~

Beispiel 2. Die Majorana Darstellung.

Es gibt eine Darstellung, die sog. Majorana Darstellung, in der die Symmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen in die Augen springt. Eine Majorana Darstellung ist dadurch charakterisiert, dass

$$\overline{\gamma_M^\mu} = -\gamma_M^\mu, \quad (4.85)$$

d.h. die Dirac Matrizen, γ_M^μ , in einer Majorana Darstellung sind rein imaginär. Daraus folgt, dass der Dirac Operator

$$i \not{D} - m = i \partial_\mu \gamma_M^\mu - m$$

in einer Majorana Darstellung reell ist. Wenn ψ_M eine Lösung der Dirac Gleichung ist, ist daher auch $(\psi_M^*)^\top$ eine Lösung der Dirac Gleichung, d.h. die Dirac Gleichung hat reelle Lösungen. Falls $c_j = d_j$, dann ist das Antiteilchen identisch mit dem Teilchen. Die Dirac Theorie beschreibt dann ein neutrales, massives Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, z.B. ein massives Neutrino. In diesem Fall ist $\psi_M(x) = (\psi_M^*(x))^\top$ reell. Die Impultraum Entwicklung von $\psi_M(x)$ ist durch

$$\psi_M(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^2 \int d^3 p \sqrt{\frac{m}{\omega(\vec{p})}} \left[c_j(\vec{p}) U_j(p) e^{-ip \cdot x} + c_j^*(p) \overline{U_j(p)} e^{ip \cdot x} \right] \quad (4.86)$$

gegeben. Dies versteht man wie folgt: $U_j(p)$ erfüllt die Gleichung (siehe (4.50))

$$(\not{p} - m) U_j(p) = (p_\mu \gamma_M^\mu - m) U_j(p) = 0,$$

$j = 1, 2$. Daher

$$\overline{(\not{p} - m) U_j(p)} = (-p_\mu \gamma_M^\mu - m) \overline{U_j(p)} = 0,$$

oder

$$(\not{p} + m) \overline{U_j(p)} = 0.$$

Dies ist aber die Gl. (4.50) für $U_j(p)$. Also gilt in der Majorana Darstellung

$$V_j(p) = \overline{U_j(p)}. \quad (4.87)$$

Gl. (4.86) folgt aus (4.45) und (4.87).

Die Majorana Bedingung,

$$(\psi(x)^*)^T = \psi(x) \quad (4.88)$$

können wir ohne Mühe in die chirale Darstellung zurück übersetzen, was in der Physik der Neutrinos nützlich ist. Wir schreiben

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

für das Dirac Feld in der chiralen Darstellung.

Dabei transformiert $\varphi(x)$ ($\sim v_\alpha$) unter $(A(1)^*)^{-1}$, und $\chi(x)$ ($\sim u^\alpha$) unter $A(1)$. Daraus folgt, dass $\varepsilon(\psi(x)^*)^T, \varepsilon = (\varepsilon^{\alpha\beta})$, und $\chi(x)$ gleich transformieren. Daher muss die Majorana Bedingung

nen wie folgt lauten:

$$\varepsilon (\varphi(x)^*)^T = \chi(x) \quad (4.90)$$

In die Dirac Gleichung eingesetzt folgt daraus die Gleichung

$$(i\partial_0 \gamma^0 + i \sum_{j=1}^3 \partial_j \gamma^j) \varphi(x) = m \varepsilon (\varphi(x)^*)^T \quad (4.91)$$

Die invarianten Distributionen der Dirac Theorie.

Aus den Ausdrücken (4.45) und (4.53) und den Antiverkettungsrelationen (4.39) – (4.42) erhält man

mit (4.43)

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$$= (i\not{\partial}_x + m) i \Delta^+(x-y) = i S^+(x-y), \quad (4.92)$$

und wir haben dabei (4.34) und

$$\frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \not{P} & m \\ m & \not{P} \end{pmatrix} \gamma^0 = \frac{1}{2m} (\not{p} + m)$$

benutzt. Weiter findet man

$$\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} - m) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ = - (i \not{p}_x + m) i \Delta^+(y-x) \equiv i S^-(x-y) \quad (4.93)$$

Daraus folgt nun

$$\langle 0 | \{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = (i \not{p}_x + m) [i \Delta^+(x-y) - i \Delta^+(y-x)] \\ = (i \not{p}_x + m) i \Delta(x-y) \\ \equiv i S(x-y). \quad (4.94)$$

Nun zeigt man leicht direkt, dass

$$\{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y) \} = i S(x-y). \quad (4.95)$$

Aufgrund der Eigenschaften von Δ und (4.94), (4.95) schliessen wir, dass $\{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y) \} = 0$, falls $(x-y)^2 < 0$, (d.h. x und y räumlich getrennt). Daher ist $\bar{\psi}(x)$ ein lokales Fermifeld.

Für $x = (t, \vec{x})$ und $y = (t, \vec{y})$ erhalten wir

$$\{ \bar{\psi}(\vec{x}, t), \bar{\psi}^*(\vec{y}, t) \} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} \{ (\not{p} + m) \gamma_0 e^{i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ + (\not{p} - m) \gamma_0 e^{-i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega} \left\{ 2\omega \cos \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \mathbb{1}_4 + \text{ungerade} \right\} \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \mathbb{1}_4 \tag{4.96}
 \end{aligned}$$

Offenbar erfüllen ψ und ψ^* kanonische Antivertauschung
relationen im Ortsraum.

Nun berechnen wir noch den Feynman Propagator
 des Dirac Feldes. Er ist durch die Gleichung

$$iS_F(x-y) := \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle \tag{4.97}$$

definiert, wo

$$\begin{aligned}
 T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) = & \Theta(x^0 - y^0) \psi(x) \bar{\psi}(y) \\
 & - \Theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}(y) \psi(x). \tag{4.98}
 \end{aligned}$$

Das " - " Zeichen vor dem zweiten Term auf der R.S.
 von (4.98) entspricht der Tatsache, dass ψ ein Fermi-
 Feld ist. Aus (4.97) und (4.98) folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
 S_F(x-y) &= \Theta(x^0 - y^0) S^+(x-y) - \Theta(y^0 - x^0) S^-(x-y) \\
 &= (i\cancel{D}_x + m) \Delta_F(x-y), \tag{4.99}
 \end{aligned}$$

wo Δ_F in (3.37) gegeben ist.

Aus dieser Gleichung ist die Lorentz-Kovarianz von S_F ersichtlich.

Die Impulsraum-Darstellungen der invarianten Distributionen des Diracfeldes findet man wie für das Klein-Gordon Feld:

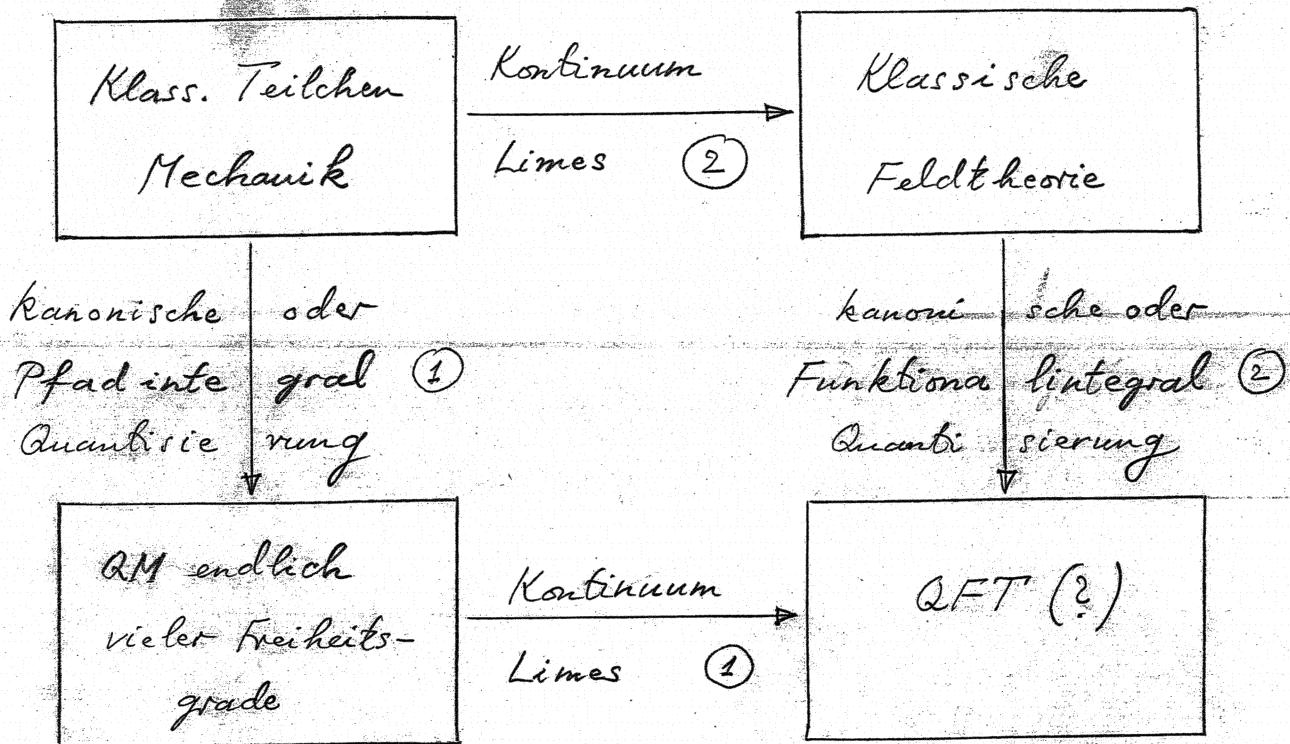
$$\left. \begin{aligned} S^\pm(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_C^\pm d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{p + m}{p^2 - m^2} \\ S(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{p + m}{p^2 - m^2} \end{aligned} \right\} (4.100)$$

und

$$S_F(x) = \dots = \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_C d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

5. Klassische Feldtheorie: Lagrange - und

Hamilton Formalismus, Noether Theorem, Aktion.



Dieses Diagramm zeigt die zwei üblichen Wege zur Konstruktion von Quantenfeldtheorien. Wir werden in dieser Vorlesung den Weg (2) beschreiben und die Funktionalintegral Quantisierung benutzen, obwohl in nicht störungstheoretischen Untersuchungen bisweilen Weg (1) vorzuziehen ist ("Box- und Ultraviolet Cut off"). Weg (2) ist eleganter und konzeptuell befriedigender.

Erinnerung an die Mechanik und nicht-relativistische QM.

Betrachten ein klassisches mechanisches System, dessen Konfigurationen durch verallgemeinerte Lagekoordinaten q^j , $j=1, \dots, N$, beschrieben werden. Die Dynamik sei durch eine Lagrange Funktion vorgegeben:

$$L(q^1, \dots, q^N, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^N; t).$$

Die Aktion ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt \quad (5.1)$$

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen kann das Hamilton'sche Prinzip benutzt werden:

$$\left. \begin{array}{l} \delta S = 0, \text{ mit der Nebenbedingung} \\ \delta q^j(t) = 0, \text{ für } t = t_1 \text{ und } t_2. \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Nun ist

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j \right\} dt$$

Integriert man im zweiten Term partiell und benutzt die Nebenbedingung (5.2), so findet man die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = 0 \quad (5.3)$$

Den zu \dot{q}^j kanonisch konjugierten Impuls definiert man durch

$$p^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}, \quad (5.4)$$

und die Gl. (5.3) lauten dann

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} - \dot{p}_j = 0 \quad (5.5)$$

Definiert man die Hamilton Funktion H als

$$H(p, q; t) = p_j \dot{q}^j - L(q, \dot{q}; t) \quad (5.6)$$

wo man auf der rechten Seite \dot{q} durch Auflösung von (5.4) eliminiert, so findet man

$$\begin{aligned} \delta H &= p_j \delta \dot{q}^j + \dot{q}^j \delta p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j - \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta \dot{q}^j \\ &= \dot{q}^j \delta p_j - \dot{p}_j \delta q^j, \end{aligned}$$

(5.4), (5.5)

aber auch

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j.$$

Koeffizienten Vergleich ergibt die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j, \quad -\frac{\partial H}{\partial q^j} = \dot{p}_j \quad (5.7)$$

Diese Glv. kann man in der Form

$$\dot{F} = \{H, F\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.8)$$

zusammenfassen, wo

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q^j} - \frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial B}{\partial p_j} ; \quad (5.9)$$

F, A und B sind Funktionen auf dem Phasenraum.

Bemerkungen.

i) Der Hamilton Formalismus kann dann benutzt werden, falls (5.4) nach \dot{q} lösbar ist; resp. falls q und p einen vollständigen und unabhängigen Satz von Anfangsbedg. für (5.3) darstellen.

ii) Falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ist, ist $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, also

$\dot{H} = 0$, d.h. H ist die erhaltene Energie.

Quantisierung.

Im Prozess der Quantisierung ersetzt man die Funktionen q und p durch Operatoren auf einem

Hilbertraum und ersetzt Poisson Klammern durch Kommutatoren:

$$\left. \begin{aligned} [q^i, q^j] &= [p_i, p_j] = 0, \\ [q^i, p_j] &= i\hbar \delta_j^i. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

In der Weyl'schen Form gibt es nur eine einzige irreduzible Darstellung der Vertauschungsrelationen (5.10), die uns vom Schrödinger Bild wohl bekannte. Ersetzt man im $H(p, q)$ die kanonischen Impulse und Koordinaten durch die entsprechenden Operatoren, stößt man auf Ordnungsprobleme. Weiterhin ist es wichtig, davon zu erinnern, dass die Quantisierung nicht mit kanonischen Transformationen vertauscht. Es ist also wichtig, dass man angibt, in welchen kanonischen Koordinaten auf dem Phasenraum man ein System quantisiert hat; (siehe Übungen!).

Im in der QFT üblichen Heisenberg Bild lauten die Bewegungsglu. für einen Operator A

$$\frac{dA}{dt} = i\hbar^{-1} [H, A], \quad (5.11)$$

also

$$\frac{dq^j}{dt} = i\hbar^{-1} [H, q^j] = \uparrow \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (5.10)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = i\hbar^{-1} [H, p_j] \downarrow = - \frac{\partial H}{\partial q^j};$$

die Zustände, \underline{q} , sind zeitunabhängig.

Nun entwickeln wir die klassische Feldtheorie in Analogie zur klassischen Mechanik von Punktteilchen:

$$q^j(t) \longleftrightarrow \phi^\alpha(t, \vec{x}) \quad (5.12)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} q & \longleftrightarrow & \phi \\ t & \longleftrightarrow & t \\ j & \longleftrightarrow & \alpha, \vec{x}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right)$$

Die Lagrange Funktion wird dann

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi^\alpha, \vec{\nabla} \phi^\alpha, \partial_t \phi^\alpha; \vec{x}, t)$$

wo \mathcal{L} die sog. Lagrange Dichte ist.

Die Aktion, S , ist dann

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1 < t < t_2} d^4x \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha; x) \quad (5.13)$$

Wie in der Mechanik von Punktteilchen, setzt man

$$\pi^\alpha(\vec{x}) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_t \phi^\alpha)(\vec{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi^\alpha)(\vec{x})} \quad (5.14)$$

etc.

Man könnte die Analogie im Interesse der Poincaré Kovarianz der Theorie auch ein wenig anders fassen:

$$q \longleftrightarrow \phi$$

$$t \longleftrightarrow x = (x^\mu)$$

$$j \longleftrightarrow \alpha$$

$$\pi^\mu_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)}$$

Zur kanonischen Quantisierung von Feldtheorien muss aber der ersten Analogie gefolgt werden.

Die Bewegungsgleichungen erhält man wieder aus dem Hamilton'schen Prinzip:

$$\delta S = 0,$$

mit den Randbedingungen

$$\delta\phi^\alpha(t_{1/2}, \vec{x}) = 0.$$

Also

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial L}{\partial \phi^\alpha} \delta\phi^\alpha + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \delta(\partial_\mu \phi^\alpha)}_{= \Pi_\alpha^\mu} \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial L}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \Pi_\alpha^\mu \right\} \delta\phi^\alpha + \text{Oberflächen} \\ \text{Terme} \quad (4.15)$$

Die OT verschwinden, falls $\phi^\alpha(t, \vec{x})$ genügend schnell gegen 0 strebt, für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Daraus folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \Pi_\alpha^\mu = 0$$

(5.16)

(Euler-Lagrange Gln.)

Beispiel.

Es sei ϕ ein skalares Feld, L ein Lorentz Skalar, der in ϕ und $\partial_\mu \phi$ bilinear ist. Dann ist

$$L = \frac{1}{2} a [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2]$$

und die Bewegungsgl. ist die Klein-Gordon Gl.

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -m^2 \phi \quad (5.17)$$

(Übung!)

In Analogie zur klassischen Mechanik von Punktteilchen definieren wir die Hamilton Funktion H als

$$H = \int d^3x \pi_\alpha(t, \vec{x}) \dot{\phi}^\alpha(t, \vec{x}) - L \\ = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (5.18)$$

wo $\mathcal{H} = \pi_\alpha \dot{\phi}^\alpha - L$ ($\dot{\phi}^\alpha = \partial_t \phi^\alpha$) die Hamilton Dichte ist. In unserem Beispiel ist

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (5.19)$$

(Übung!)

Die Quantisierung der klassischen Feldtheorie wird so versucht, dass man aus ϕ^α und π^α operatorwertige Distributionen macht, für die man die Vertauschungsrelationen

$$\left. \begin{aligned} [\phi^\alpha(t, \vec{x}), \phi^\beta(t, \vec{y})] &= [\pi_\alpha(t, \vec{x}), \pi_\beta(t, \vec{y})] = 0, \\ [\phi^\alpha(t, \vec{x}), \pi_\beta(t, \vec{y})] &= i\hbar \delta_\beta^\alpha \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \right\} (5.20)$$

In der Hamilton Funktion H ersetzt man die klassischen Felder durch Operator-wertige Distributionen, für die man (5.20) fordert. Die Dynamik

des Systems wird durch die Heisenberg'schen Bewegungsgln.

$$\dot{A} = i\hbar^{-1} [H, A] \quad (5.21)$$

ausgedrückt.

Ob und wann diese Prozedur überhaupt Sinn macht, ist ein Hauptthema der Quantenfeldtheorie. Dass sie im obigen Beispiel (freies, massives Skalarfeld) Sinn macht, haben wir in Kap. 3 gelernt. Für den Moment bleiben wir noch bei der klassischen Feldtheorie und besprechen, in Analogie zu dem, was man in der Vorlesung über Mechanik lernt, Symmetrien und Erhaltungssätze und das Noether'sche Theorem.

Symmetrien und Erhaltungssätze.

Eine Symmetrietransformation erzeugt aus Lösungen der E-L Gln. (5.16) neue Lösungen.

Sei

$$\left. \begin{aligned} q^j &\mapsto q_\lambda^j = \Phi_\lambda^j(q) = q^j(\lambda), \\ q^j(0) &= q^j, \quad \forall j, \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

wo λ eine kontinuierliche Variable ist (z.B. Koordinaten auf einer Liegruppe), eine solche Symmetrietransformation. (Beispiele sind Raum- und Zeittranslationen, Rotationen, etc.; in der relativistischen Feldtheorie: beliebige Poincaré Transformationen, innere Symmetrien.) Wir definieren das Vektorfeld

$$Dq^i = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_\lambda^i(q) \Big|_{\lambda=0}.$$

Für Translationen in der j -Richtung, $q^i \mapsto q^i + \delta^{ij}\lambda$,

ist

$$Dq^i = \delta^{ij} e^j, \quad (e^j: \text{Einheitsvektor in } j\text{-Richtung}),$$

und für Rotationen in der jk -Ebene ist

$$Dq^i = 0, \quad i \neq k, j, \quad Dq^j = q^k, \quad Dq^k = -q^j.$$

Die Transformation Φ_λ ist eine Symmetrie des

Systems, falls

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} S(\Phi_\lambda(q), \dot{\Phi}_\lambda(q)) = 0 \quad (5.23)$$

ist. Denn aus (5.23) folgt, dass, wenn $(q(t), \dot{q}(t))$, S extremal macht, (d.h. die E-L Gleichung löst), auch $(q(t, \lambda), \dot{q}(t, \lambda))$ extremal macht, also eine weitere Lösung der E-L Gleichung darstellt. [Die Niveauflächen von S , insbesondere die Extrema von S , sind nach (5.23) invariant unter der Aktion von Φ_λ .] Aus (5.23) folgt nun

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} S(q(\cdot, \lambda), \dot{q}(\cdot, \lambda)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} L(q(\cdot, \lambda); \dot{q}(\cdot, \lambda); t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^j} Dq^j + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} D\dot{q}^j}_{\equiv p_j} \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (p_j Dq^j), \end{aligned} \quad (5.24)$$

falls $(q(\cdot), \dot{q}(\cdot))$ Lösung der E-L Gleichung ist.

Also

$$p_j Dq^j = \text{const.} \quad (5.25)$$

Bemerkung: $(D\dot{q}^j)(t) = \frac{d}{dt} \Phi_\lambda(q(t)) = (D\Phi_\lambda)_i^j(q(t)) \dot{q}^i(t)$,

wo $D\Phi_x$ die Funktionalableitung (Jacobi'sche) von Φ_x ist. 131.

Diese Betrachtungen können wir etwas verallgemeinern, indem wir Abbildungen Φ_x von Raum der Trajektorien, $q(\cdot)$, in sich betrachten: Es sei

$$\Phi_x(q)(t) := q_x(t_{-x}), \quad (5.26)$$

$$t_x := \tau_x(t), \quad (5.27)$$

τ_x eine 1-1 Abbildung von \mathbb{R} auf sich selbst, und

$$q_x := \varphi_x(q), \quad (5.28)$$

φ_x eine 1-1 Abbildung des Konfigurationsraumes auf sich selbst ist. Es sei

$$T_{-x}(s) := (D_t \tau_{-x})(t = \tau_x(s)),$$

mit $D_t \equiv \frac{d}{dt}$. Wir nehmen an, dass

$$\begin{aligned} & L(q_x(s), T_{-x}(s) D_s q_x(s); \tau_x(s)) \cdot D_s \tau_x(s) \\ &= L(q(s), D_s q(s); s) + D_s M_x(q(s), s), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\text{wo } t = \tau_x(s), dt = D_s \tau_x(s) \cdot ds, D_t = T_{-x}(s) D_s. \quad (5.30)$$

Dann finden wir

$$S_\lambda = \int_{\tau_\lambda(t_1)}^{\tau_\lambda(t_2)} dt L(\Phi_\lambda(q)(t), D_t \Phi_\lambda(q)(t); t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} ds L(q_\lambda(s), T_\lambda(s) D_s q_\lambda(s), \tau_\lambda(s)) D_s \tau_\lambda(s)$$

$$\stackrel{(5.29)}{=} \int_{t_1}^{t_2} ds L(q(s), D_s q(s); s) + M_\lambda(q(s), s) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= S + M_\lambda \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (5.31)$$

In der Herleitung der E-L Gln. werden $t_1, t_2, q(t_1)$ und $q(t_2)$ nicht variiert, so dass $\delta M_\lambda \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$.

Es erfülle nun $(q(\cdot), \dot{q}(\cdot))$ die E-L Gln. für S , d.h. $(q(\cdot), \dot{q}(\cdot))$ macht S extremal ($\delta S = 0$).

Dann macht $(\Phi_\lambda(q)(\cdot), D_t \Phi_\lambda(q)(\cdot))$ die Aktion S_λ extremal und löst daher die E-L Gleichung zu S_λ , die aufgrund von (5.31) die gleiche Form hat wie die E-L Gleichung zu S . Es folgt, dass

Φ_λ eine Symmetrie des Systems ist. Zu dieser Symmetrie gehört weder ein Erhaltungssatz, den man aus (5.29) durch Ableiten nach λ bei $\lambda=0$ erhält. Dies werden wir für den Fall der klassischen Feldtheorie explizit ausführen. Hier sei die entsprechende Rechnung dem Leser als Übung überlassen.

Anwendungen.

(1) Translationen: Wir nehmen an, dass

$$L(q+a, \dot{q}; t) = L(q, \dot{q}; t), \text{ für } a = \lambda e,$$

wo e ein Vektor im Konfigurationsraum ist, (der hier ein Vektorraum sein soll). Der Erhaltungssatz (5.25) sagt dann, dass

$$p \cdot e = p_i \cdot Dq^i \text{ erhalten ist.} \quad (5.32)$$

Das ist der Impulsatz.

(2) Rotationen: Wir nehmen an, dass $q = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n)$, $\vec{q}_i \in \mathbb{R}^3$, und dass für alle Rotationen R , mit Drehachse $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$

$$L(\vec{q}^R, \dot{\vec{q}}^R; t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t),$$

wo $\vec{q}^R = (R\vec{q}_1, \dots, R\vec{q}_n)$. Dann ist

$$D\vec{q} = (\vec{e}_1 \vec{q}_1, \dots, \vec{e}_n \vec{q}_n),$$

und es folgt, dass

$$\sum_{j=1}^n \vec{p}_j \cdot (\vec{e}_1 \vec{q}_j) = \vec{e} \cdot \vec{L}, \quad \vec{L} := \sum_{j=1}^n \vec{q}_j \wedge \vec{p}_j \quad (5.33)$$

erhalten ist; (Drehimpulserhaltung in Richtung \vec{e}).

(3) Zeittransformationen: Wir definieren

$$\tau_\lambda(t) = t + \lambda, \quad \Phi_\lambda(q)(t) = q(t - \lambda),$$

d.h. $\Phi_\lambda = \text{Id.}$ Dann ist $T_\lambda(s) = 1$, und (5.29) sagt

für den Fall, dass $M_\lambda = 0$, dass

$$L(q(s), \dot{q}(s); s + \lambda) = L(q(s), \dot{q}(s); s), \quad \forall \lambda.$$

Davon folgt die Erhaltung der Energie, d.h.

$$H(t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) \dot{q}_j(t) - L(q(t), \dot{q}(t)) = \text{const.}, \quad (5.34)$$

für beliebige Lösungen $(q(t), \dot{q}(t))$ der E-L Gleichungen.

Daselbe Problem der Symmetrien und Erhaltungssätze kann nun auch vom Stand-

punkt der Quantenmechanik aus studiert werden.

Falls

$$\frac{\partial}{\partial p_j} Dq^i = 0, \quad \forall i, j$$

dann folgt, nach kanonischer Quantisierung

und mit $Q = p_j Dq^j$,

$$i [Q, q^j] = \hbar \frac{\partial Q}{\partial p_j} = \hbar Dq^j, \quad (5.35)$$

d.h. Q erzeugt quantenmechanisch die

Transformation $q \mapsto \Phi_x(q)$. Da die QM Heisenberg Gln. die gleiche Form wie die Hamilton'schen Bewegungsgln. haben, folgt formal, dass

$$\dot{Q} = i\hbar^{-1} [H, Q] = 0 \quad (5.36)$$

d.h. die von Q erzeugte einparametrische Gruppe veranschlägt mit der Zeit evolution, d.h. ist eine Symmetriegruppe. (Es können aber Ordnungsprobleme auftreten!)

Nun behandeln wir Symmetrien und Erhaltungssätze im Rahmen der klassischen Lagrange'schen Feldtheorie.

$$\text{Es sei } \varphi(x) = (\varphi^\alpha(x))_{\alpha=1,2,\dots} \quad (5.37)$$

Sei $x \mapsto \tau_\lambda(x) = x_\lambda$ eine einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen des Minkowski-Raumes M^4 in sich, die durch ein Vektorfeld X erzeugt werde, d.h.

$$\frac{d}{d\lambda} \tau_\lambda(x) \Big|_{\lambda=0} = X(x) \quad (5.38)$$

Wir studieren eine Transformation der Feldkonfigurationen, $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) \mapsto \Phi_\lambda(\varphi)(x) = \varphi_\lambda(x_\lambda), \quad (5.39)$$

wo $\varphi_\lambda = \psi_\lambda(\varphi)$, und ψ_λ ist eine Abbildung des Feldraumes (Raum der Werte von φ) in sich.

Zunächst wollen wir nun klären, was es bedeutet, Φ_λ sei eine Symmetrie einer Theorie.

Sei Ω irgend ein Gebiet im Minkowski-Raum M^4 , z.B. eine Zeitschicht. Wir definieren

$$\Omega_\lambda = \{x : \tau_{-\lambda}(x) \in \Omega\}. \quad (5.40)$$

Es sei

$$S \equiv \int_{\Omega} d^4x \ L(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x) \quad (5.41)$$

die Aktion, wo L die Lagrange-Dichte ist.

Es sei

$$T_\lambda(x) = \left(\frac{\partial \tau_\lambda^\mu(x)}{\partial x^\nu} \right) \quad (5.42)$$

die Ableitungs matrix von τ_λ . Wir nehmen

nun an, dass

$$\begin{aligned} & L(\varphi_\lambda(x), (T_{-\lambda} \partial)_\mu \varphi_\lambda(x); x) \det(T_\lambda(x)) \\ &= L(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x) + \partial_\mu M_\lambda^\mu(\varphi(x); x), \end{aligned} \quad (5.43)$$

für alle $x \in M^4$, wo

$$(T_{-\lambda} \partial)_\mu = \frac{\partial \tau_{-\lambda}^\nu(y)}{\partial y^\mu} \Bigg|_{y=\tau_\lambda(x)} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (5.44)$$

Dann finden wir

$$S_\lambda = \int_{\Omega_\lambda} d^4x \mathcal{L}(\Phi_\lambda(\varphi)(x), \partial_\mu \Phi_\lambda(\varphi)(x); x) \quad (5.45)$$

$$= \int_{\Omega_\lambda} d^4x \mathcal{L}(\varphi_\lambda(x_\lambda), (\partial_\mu \varphi_\lambda)(x_\lambda); x)$$

Nun setzen wir $x_\lambda = y$, d.h.

$$\left. \begin{aligned} y &= \tau_{-\lambda}(x), \quad x = \tau_\lambda(y) = y_\lambda, \\ d^4x &= \det(T_\lambda(y)) d^4y. \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

Wenn $x \in \Omega_\lambda$, dann ist $\tau_{-\lambda}(x) = x_\lambda = y \in \Omega$.

Damit folgt aus der Invarianzeigenschaft (5.43), dass

$$S_\lambda = \int_{\Omega} d^4y \mathcal{L}(\varphi_\lambda(y), (T_{-\lambda})_\mu \varphi_\lambda(y); y_\lambda) \det(T_\lambda(y))$$

$$= \int_{\Omega} d^4y \{ \mathcal{L}(\varphi(y), \partial_\mu \varphi(y); y) + \partial_\nu M_\lambda^\nu(\varphi(y); y) \}$$

$$= S + \int_{\partial\Omega} M_\lambda^\nu(\varphi(y), y) d\sigma_\nu(y). \quad (5.47)$$

Da $\frac{\delta \varphi(y)}{\delta y|_{y \in \partial\Omega}} = 0$, hat der zweite Term auf der R.S. von (5.47) die Variation 0.

Aus (5.45) und (5.46) folgt, dass, wenn $\varphi(\cdot)$

$S = S_{\Omega}$ extremal macht, dann macht

$\Phi_x(\varphi)(\cdot) \quad S_{\Omega-x}$ extremal. D.h., löst $\varphi(x)$

die zu λ gehörigen E-L Gln. (Feldgleichungen,

dann löst $\Phi_x(\varphi)(x) = \varphi_x(x_\lambda)$ die ihrer

Form nach identischen E-L Gln. Also ist

die Abbildung

$$\varphi(x) \rightarrow \Phi_x(\varphi)(x)$$

eine Symmetrie der Theorie.

Nun zeigen wir, dass zu jeder solchen Symmetrie ein Erhaltungssatz der Theorie

gehört: Zunächst bemerken wir, dass (5.45) und (5.47) für beliebige Ω äquivalent zu (5.43) ist. Wir dürfen im Folgenden also von (5.43) ausgehen. Wir definieren

$$\Delta \varphi_x(x) = \varphi_x(x) - \varphi(x)$$

$$= [\varphi_x(x) - \varphi(x_\lambda)] + [\varphi(x_\lambda) - \varphi(x)]$$

$$= \delta \varphi_x(x_\lambda) + [\varphi(x_\lambda) - \varphi(x)], \quad (5.48)$$

$$\text{d.h. } \varphi_\lambda(x) = \varphi(x_2) + \delta\varphi_\lambda(x_2) \quad (5.49)$$

Wir entwickeln diese Größen in eine Taylorreihe in λ und setzen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_\lambda(x) &= \lambda \Delta\varphi(x) + O(\lambda^2) \\ \delta\varphi_\lambda(x_2) &= \lambda \delta\varphi(x) + O(\lambda^2) \\ x_2 &= x + \lambda X(x) + O(\lambda^2) \\ \det(T_\lambda(x)) &= 1 + \lambda \partial_\mu X^\mu(x) + O(\lambda^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Nun entwickeln wir die linke Seite von (5.43) in λ und benutzen (5.48)–(5.50). Das ergibt

$$\begin{aligned} & L(\varphi_\lambda(x), (\tau_{-\lambda} \partial)_\mu \varphi_\lambda(x); x_2) \det(T_\lambda(x)) \\ &= L(\varphi(x_2) + \delta\varphi_\lambda(x_2), \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} (\varphi(x_2) + \delta\varphi_\lambda(x_2)); x_2) \\ & \quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \times \det(T_\lambda(x)), \\ & (5.49), (5.44) \qquad \qquad \qquad (5.51) \end{aligned}$$

denn nach (5.44) ist

$$(\tau_{-\lambda} \partial)_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \frac{\partial}{\partial x_2^\mu},$$

da $y = \varphi_\lambda(x) = x_2$ ist.

Nach Entwicklung der R.S. von (5.51) bis zur ersten
Ordnung in $\delta\varphi_\lambda$ und Benützung von (5.43) erhalten
wir

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x) + \partial_\nu M_\lambda^\nu(\varphi(x); x) \\
 &= \left\{ \mathcal{L}(\varphi(x_2), \frac{\partial}{\partial x_\lambda^\mu} \varphi(x_2); x_2) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x_2)} \delta\varphi_\lambda(x_2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda^\mu} \varphi(x_2) \right)} \frac{\partial}{\partial x_\lambda^\mu} \delta\varphi_\lambda(x_2) \right\} \det(T_\lambda(x)) \\
 &\quad + O(\delta\varphi_\lambda(x_2)^2). \tag{5.52}
 \end{aligned}$$

Die R.S. von (5.52) entwickeln wir nun bis zur ersten
Ordnung in λ , indem wir (5.50) anwenden. Das ergibt

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x) + \partial_\nu M_\lambda^\nu(\varphi(x); x) \\
 &= \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x) + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} (\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x) X^\mu(x) \\
 &\quad + \lambda \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x) \partial_\mu X^\mu(x) \\
 &\quad + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta\varphi(x) + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \partial_\mu \delta\varphi(x) + O(\lambda^2) \tag{5.53}
 \end{aligned}$$

Falls $\varphi(\cdot)$ die E-L Gleichungen löst, haben wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))}$$

Da (5.53) für alle $\varphi(\cdot)$ und alle λ gilt, folgt daher für $\varphi(\cdot)$'s, die die E-L Gln. lösen:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x) X^\mu(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \delta \varphi(x) - \frac{\partial M_\lambda^\mu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} (\varphi(x); x) \right\} = 0 \quad (5.54)$$

Hier haben wir benutzt, dass aus (5.53) folgt, dass

$$M_{\lambda=0}^\mu = 0; \text{ dann haben wir } \partial_\mu M_\lambda^\mu \text{ durch } \lambda \partial_\mu \frac{\partial M_\lambda^\mu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$$

ersetzt. Die Größe in geschweiften Klammern nennen wir $J^\mu(x)$. Gl. (5.54) hat die Form einer Kontinuitätsgl.

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (5.55)$$

Den erhaltenen Strom J^μ schreiben wir nun noch etwas um: Wir definieren

$$T_\nu^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} (\partial_\nu \varphi)(x) - \mathcal{L}(\dots; x) \delta_\nu^\mu,$$

oder

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} (\partial^\nu \varphi)(x) - \mathcal{L}(\dots; x) g^{\mu\nu}(x) \quad (5.56)$$

Aus (5.48) - (5.50) folgt in erster Ordnung in λ :

$$\Delta\varphi(x) = \delta\varphi(x) + (\partial_\mu\varphi)(x) X^\mu(x), \quad (5.57)$$

mit Notationen wie in (5.50). Mit (5.54) und (5.56) folgt daher, dass

$$J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))} \Delta\varphi(x) - T^{\mu\nu}(x) X_\nu(x) - \left. \frac{\partial M_2^{\mu\nu}}{\partial\lambda} \right|_{\lambda=0} (\varphi(x); x),$$

und

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0$$

(5.58)

Mit Hilfe des Gauss'schen Satzes kann die Kontinuitätsgl. für J^μ als Integralsatz geschrieben werden:

$$Q := \int_{t=\text{const.}} d^3x J^0(t, \vec{x}) = \text{const.}, \quad (5.59)$$

unabh. von t , falls $\varphi(t, \vec{x})$ und $\partial_\mu \varphi(t, \vec{x})$ für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ schnell nach 0 streben. Dies ist das Noether'sche Theorem.

Bemerkungen:

(1) J^μ ist i.A. kein Lorentzvektor! Die tensoriellen Eigenschaften von J^μ hängen von den Eigenschaften von \mathcal{F}_2 unter Lorentz Transformationen ab.

(2) Die Definitionen von $T^{\mu\nu}$ und J^μ sind nicht eindeutig: Wir können zu J^μ eine Grösse

$$\partial_\nu A^{\mu\nu}, \quad A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$$

dazu addieren, d.h. wir definieren

$$J^\mu := J^\mu + \partial_\nu A^{\mu\nu}.$$

Dann haben wir

$$Q_A = \int_{t=\text{const.}} d^3x J_A^\circ(t, \vec{x})$$

$$\stackrel{A^{00}=0}{=} \int d^3x \{ J^\circ(t, \vec{x}) + \partial_i A^{0i}(t, \vec{x}) \}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss}}}{=} Q - \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\partial K_R} A^{0i}(t, \vec{x}) d\sigma_i(\vec{x})}_{=0},$$

also $Q_A = Q. \quad (5.60)$

Diese Freiheit kann es uns erlauben, durch geschickte Wahl von M_x und $A^{\mu\nu}$ den Tensor $T^{\mu\nu}$ symmetrisch in μ und ν zu machen. Dieser symmetrische Tensor heisst Energie - Impuls Tensor. Seine Symmetrie ist in der allgemeinen Relativitätstheorie wichtig!
Anwendungen.

(1) Raum - Zeit Translationen:

Wir setzen

$$x_\lambda = x + \lambda e, \text{ also } X(x) = e;$$

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(\varphi(x)) = \varphi(x).$$

Dann folgt aus (5.48), (5.49), dass

$$\Delta \varphi(x) = 0.$$

Weiter reduziert sich (5.43), mit $M_\lambda^\mu = 0$, zu

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x + \lambda e) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x), \quad (5.61)$$

d.h. \mathcal{L} soll nicht explizit von x (spezieller von der e -Komponente von x) abhängen. Nach (5.58) ist der erhaltene Strom dann

$$-J^\mu(x) = -T^{\mu\nu}(x)e_\nu$$

Gilt (5.61) für alle e , so folgt aus (5.59),

dass

$$P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \ T^{\mu 0}(t, \vec{x}) \quad (5.62)$$

erhaltene Größen sind. Das ist der Energie-

Impuls erhaltungssatz; ($P^0 \equiv E$ (Energie)),

$$\vec{P} = (P^1, P^2, P^3) \text{ (Impuls)}.$$

(2) Lorentz Transformationen:

Was sind infinitesimale Lorentz Transformationen?

$$x \rightarrow x + \lambda \varepsilon x, \quad \varepsilon \text{ eine } 4 \times 4 \text{ Matrix.}$$

$x \cdot x = x^\mu x_\mu$ soll invariant sein. Also

$$x^\mu x_\mu = x^\mu x_\mu + \lambda x_\mu \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu + \lambda x^\mu \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu + O(\lambda^2).$$

d.h.

$$x_\mu \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu = x^\mu \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu = 0, \quad \text{oder}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}.$$

Bsp.: $\varepsilon^{12} = 1, \varepsilon^{21} = -1, \text{ übrige} = 0$: Infinitesimale Rotation in (12)-Ebene; oder

$\varepsilon^{01} = 1, \varepsilon^{10} = -1, \text{ übrige} = 0$: Boost in der (01)-Ebene:

Jetzt setzen wir

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x + \lambda \varepsilon \cdot x + O(\lambda^2) \\ \varphi_2(x) &= \varphi(x) + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon \cdot S) \varphi(x), \end{aligned} \right\} (5.63)$$

wo $\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$, $S_{\mu\nu}$ ist eine Matrix auf dem Feldraum, $\varepsilon \cdot S = \varepsilon^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$.

Dann folgt

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi(x) &= \frac{1}{2} (\varepsilon \cdot S) \varphi(x) \\ X^\mu(x) &= \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

Die Gleichung (5.43) sagt dann, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi(x) + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon \cdot S) \varphi(x), (1 - \lambda \varepsilon)_{\mu\nu} \partial^\nu [\varphi(x) + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon \cdot S) \varphi(x)]; x + \lambda \varepsilon x) \\ = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); x), \end{aligned} \quad (5.65)$$

d.h. \mathcal{L} soll ein Lorentz-Skalar sein. Dann ist der erhaltene Strom, J^μ , wegen (5.63) und (5.64) und (5.58)

$$J^\mu = M^{\mu\lambda\rho} \varepsilon_{\lambda\rho},$$

wo

$$M^{\mu\lambda\rho}(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))}}_{S^{\lambda\rho} \varphi(x)} \quad (5.66)$$

\nearrow
Spin Tensor

$$+ \underbrace{[x^\lambda T^{\mu\rho}(x) - x^\rho T^{\mu\lambda}(x)]}_{\text{Bahn drehimpuls tensor}}$$

Bahn drehimpuls tensor

$M^{\mu\lambda\rho}(x)$: Drehimpuls tensor.

Gilt (5.65) für alle ε , so folgt, dass die Größen

$$J^{1\rho} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x M^{0\rho}(t, \vec{x}) \quad (5.67)$$

enthalten sind.

$J^{12} = \text{const.} \Leftrightarrow$ Erhaltung des Gesamt-drehimpulses in 3-Richtung.

$$J^{01} = \text{const.} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} J^{01} &= \int d^3x M^{001}(t, \vec{x}) \\ &= \int d^3x \left\{ t T^{01}(t, \vec{x}) - x^1 T^{00}(t, \vec{x}) \right\} \\ &\quad + S^{01} \\ &\quad \swarrow \text{Spin-Anteil} \\ &= t P^1 - \frac{\int d^3x x^1 T^{00}(t, \vec{x})}{\int d^3x T^{00}(t, \vec{x})} \cdot E + S^{01} \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

Falls φ ein Skalarfeld ist, dann ist $S^{\mu\nu} = 0$, und es folgt

$$\frac{\vec{P}}{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\int d^3x \vec{x} T^{00}(t, \vec{x})}{\int d^3x T^{00}(t, \vec{x})} \right) \quad (5.68)$$

Das ist die relativistische Version des Schwerpunkt-
satzes.

(3) Innere Symmetrien:

Sei

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 (\partial_\mu \phi^\alpha \partial^\mu \phi^\alpha - m^2 \phi^\alpha \phi^\alpha) - g \left(\sum_{\alpha=1}^2 (\phi^\alpha)^2 \right)^2 \quad (5.69)$$

\mathcal{L} ist offensichtlich invariant unter
Drehungen im Feldraum, d.h. in der (ϕ^1, ϕ^2) -

Ebene:

$$\begin{aligned} \phi^1(x) &\rightarrow \phi^1(x) \cos \lambda + \phi^2(x) \sin \lambda \\ \phi^2(x) &\rightarrow -\phi^1(x) \sin \lambda + \phi^2(x) \cos \lambda \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (5.70)$$

$$x_\lambda = x$$

Damit finden wir nach (5.57) und (5.58)
den erhaltenen Strom

$$J^\mu(x) = (\partial^\mu \phi^1(x)) \phi^2(x) - (\partial^\mu \phi^2(x)) \phi^1(x)$$

Allgemeiner folgt aus (5.70), (5.57) und (5.58)
für den erhaltenen Strom

$$J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^1(x))} \phi^2(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^2(x))} \phi^1(x) \quad (5.71)$$

Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf N -komponentige Felder ausdehnen; (innere $O(N)$ -Symmetrie!) Für $N=2$ fasst man oft ϕ^1 und ϕ^2 zu einem komplexen Skalarfeld zusammen:

$$\underline{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^1 + i\phi^2)$$

$$\underline{\Phi}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^1 - i\phi^2)$$

Im Beispiel (4.69) wird dann

$$\mathcal{J}^\mu = (\partial^\mu \underline{\Phi}^*) \underline{\Phi} - \underline{\Phi}^* \partial^\mu \underline{\Phi} \equiv \underline{\Phi}^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^\mu \underline{\Phi} \quad (5.72)$$

Übung: Sei \mathcal{L} eine skalare Lagrange Dichte auf einer Lorentz Mannigfaltigkeit, M^4 , mit Lorentz-Metrix $g_{\mu\nu}(x)$. Sei

$$S = \int_{M^4} d^4x \sqrt{|g(x)|} \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x); g_{\mu\nu}(x); x).$$

Man zeige

$$\left. \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \right|_{g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}} = T^{\mu\nu}(x) \quad (5.73)$$

(4) Dilatationen.

Setzen $x_\lambda = (1+\lambda)x$, $\varphi_\lambda(x) = (1+\lambda)^{-\gamma} \varphi(x)$

Damit folgt: $X(x) = x$,

$$\Delta \varphi(x) = -\gamma \varphi(x).$$

Also:

$$\underset{D}{J^\mu}(x) = -\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \varphi(x) - T^{\mu\nu}(x) x_\nu, \quad (5.74)$$

(mit $M^\mu_\lambda = 0$). Für

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - V(\varphi)$$

folgt:

$$\underset{D}{J^\mu}(x) = -\frac{\gamma}{2} \partial^\mu (\varphi(x))^2 - T^{\mu\nu}(x) x_\nu. \quad (5.75)$$

Übung: Zeige, dass für $d=4$, $\gamma=1$, $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$,

$\partial_\mu \underset{D}{J^\mu} = 0$; (benutze, dass $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Es gibt einen direkten und indirekten (was für einen?) Beweis!)

Daraus folgt, dass die Theorie dilatationsinvariant ist.

Falls $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{m^2}{2} \varphi^2$, dann gilt

$$\partial_\mu \underset{D}{J^\mu} = m^2 \varphi^2 \neq 0. \quad (5.76)$$

Reweise diese Gleichung!

Man beachte, dass die Definition von $T^{\mu\nu}$ nicht eindeutig ist. Wenn wir $T^{\mu\nu}$ durch z.B.

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + a (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho) \phi^2$$

ersetzen, so gilt immer noch, dass $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$.

Wir wählen a so, dass für dilatationsinvariante Theorien, d.h. falls $\partial_\mu J^\mu_\nu = 0$, $\Theta^{\mu\nu}$ spurfrei ist.

Für $V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$ finden wir

$$\partial_\mu \Theta^\mu = (1+6a) [-\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - \phi \partial_\rho \partial^\rho \phi],$$

und wir haben die E-L (Bewegungs-)Gln. für ϕ benutzt. Aus $\partial_\mu \Theta^\mu = 0$ folgt also $a = -\frac{1}{6}$.

Da $\Theta^{\mu\nu}$ und $T^{\mu\nu}$ sich nur um einen Ableitungsterm unterscheiden, ändern die erhaltenen Ladungen

nicht! Nun können wir einen neuen Dilatations-
strom

$$J'^\mu_\nu := x_\nu \Theta^{\mu\nu} \quad (5.77)$$

definieren und finden, da $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$,

$$\partial_\mu J'^\mu_\nu = \partial_\mu \Theta^\mu \quad (5.78)$$

Man sieht, dass sich T_D^μ und T'^μ_D nur um einen Ableitungs term $\partial_\nu A^{\mu\nu}$ unterscheiden, so dass die Dilatations Ladung unverändert ist.

Übung: Berechne $A^{\mu\nu}$ für $V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$.

Man nennt $\Theta^{\mu\nu}$ den "(neuen) verbesserten Energie-Impuls Tensor".

Lagrange Formalismus für Spinor Felder.

In dieser Sektion benützen wir die chirale Darstellung der Dirac Spinoren und -Matrizen:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

$\psi_L = (\varphi_\alpha)$, $\psi_R = (\chi^\alpha)$; (siehe (4.3), (4.10), (4.27), (4.28), (4.45) und (4.89)). Die γ -Matrizen sind dann

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

Nach Reinstallierung von \hbar lauten die kanonischen Antivertauschungsrelationen für das Dirac Feld:

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi^*(\vec{y}, t)\} = \hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \mathbb{1}_4, \quad (5.81)$$

$$\{\psi^\#(\vec{x}, t), \psi^\#(\vec{y}, t)\} = 0.$$

Im klassischen Limes, $\hbar \rightarrow 0$, folgt formal, dass

die ψ 's und ψ^* 's miteinander antivertauschen.

Es ist daher natürlich, im Lagrange Formalismus die ψ 's und ψ^* 's oder ψ 's als unabhängige Grassmann Variablen zu behandeln; (siehe Serie 3).

Als Lagrange-Dichten für masselose, freie Fermionen

bieten sich an:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L &= \frac{i}{2} \psi_L^* \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L \\ &= \frac{i}{2} \psi_L^* \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L - \frac{i}{2} (\partial_\mu \psi_L^*) \sigma^\mu \psi_L, \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Genauso:}$$

$$\mathcal{L}_R = \frac{i}{2} \psi_R^* \hat{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R. \quad (5.83)$$

Es folgt formal, dass $\mathcal{L}_L^* = \mathcal{L}_L$ und $\mathcal{L}_R^* = \mathcal{L}_R$. Verlangt man, dass die Parität eine Symmetrie der Theorie ist, so

addiert man \mathcal{L}_L und \mathcal{L}_R und erhält

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi. \quad (5.84)$$

Verlangt man, dass die Theorie neutrale Teilchen beschreibe, so fordert man die Majorana Bedingung (4.90), d.h. $\epsilon (\psi_L^*)^\tau = \psi_R$. In diesem Falle gilt, dass $\mathcal{L}_L = \mathcal{L}_R$, bis auf eine totale Divergenz, und man hat

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = \frac{i}{4} \bar{\psi}_M \gamma_M^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_M \quad (5.85)$$

Die Lagrange - Dichten in (5.82) – (5.85) definieren dilatations-(konform-)invariante Theorien. Des Weiteren sind sie invariant unter globalen Eichtransformationen:

$$\psi_L \rightarrow e^{i\chi} \psi_L, \quad \psi_R \rightarrow e^{i\delta} \psi_R.$$

Daraus und aus (4.69), d.h. $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, folgt,

dass $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ zwei globale Eichinvarianten besitzt:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \psi \rightarrow e^{i\beta \gamma^5} \psi \quad (5.86)$$

Mit Hilfe des Noether'schen Theorems findet man dazu die erhaltenen Ströme

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \psi_L^* \sigma^\mu \psi_L + \psi_R^* \hat{\sigma}^\mu \psi_R$$

und

$$j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = \psi_L^* \sigma^\mu \psi_L - \psi_R^* \hat{\sigma}^\mu \psi_R \quad (5.87)$$

und die erhaltenen Ladungen

$$Q = \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int d^3x (\psi_L^* \psi_L + \psi_R^* \psi_R) \quad (5.88)$$

$$Q_5 = \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi = \int d^3x (\psi_L^* \psi_L - \psi_R^* \psi_R)$$

Für ein Majorana Feld muss $\varepsilon(\psi_L^*)^T = \psi_R$ vor undnach der Symmetrie Transformation gelten. Dann ist
nur noch $\psi_M \rightarrow e^{i\beta \gamma^5} \psi_M$ eine Symmetrie der Theorie.

Details dazu werden in den Übungen studiert.

Nun betrachten wir mögliche Massenterme für die
Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_L^{\text{mass}} = i \frac{m}{2} (\psi_L^T \varepsilon \psi_L + \psi_L^* \varepsilon (\psi_L^*)^T), \quad (5.89)$$

und

$$\mathcal{L}_{L5}^{\text{mass}} = \frac{m}{2} (\psi_L^T \varepsilon \psi_L - \psi_L^* \varepsilon (\psi_L^*)^T). \quad (5.90)$$

Ebenso $\mathcal{L}_R^{\text{mass}} = \dots$, $\mathcal{L}_{R5}^{\text{mass}} = \dots$. Addiert man diese
Terme zur Lagrange-Dichte, so ist die Symmetrie

$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha} \psi_L$ zerstört, und es bleibt nur $\psi_L \rightarrow -\psi_L$.

Benutzt man Majorana Spinothen, so lauten die Massenterme:

$$\mathcal{L}_L^{\text{mass}} = \frac{m}{2} \bar{\psi}_M \psi_M , \quad (5.91)$$

$$\mathcal{L}_{L5}^{\text{mass}} = \frac{m}{2} \bar{\psi}_M \gamma_5 \psi_M .$$

Für ein Dirac Feld bilden sich alle Massenterme aus:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{mass}} = m \bar{\psi} \psi = m (\bar{\psi}_L^* \psi_R + \bar{\psi}_R^* \psi_L) \quad (5.92)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}5}^{\text{mass}} = im \bar{\psi} \gamma^5 \psi = im (\bar{\psi}_L^* \psi_R - \bar{\psi}_R^* \psi_L)$$

Diese sind immer noch unter globalen Eichtransformationen

$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ invariant, nicht aber unter den sog.

chiralen Transformationen $\psi \rightarrow e^{i\beta \gamma^5} \psi$. Für

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{mass}}$ findet man aus (5.87)

$$\partial_\mu j_5^\mu = -2m \bar{\psi} \gamma^5 \psi .$$

Aingegen gilt immer noch, dass $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Eine Lagrange-Dichte wie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi + ig \bar{\psi} [\sigma + ig \gamma^5 \pi] \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma$$

$$+ \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - V(\sigma^2 + \pi^2) \quad (5.93)$$

ist invariant unter chiralen Transformationen, falls

$$[\sigma + i\gamma^5 \pi] \rightarrow e^{-i\beta \gamma^5} [\sigma + i\gamma^5 \pi] e^{i\beta \gamma^5} \quad (5.94)$$

die chirale Transformation des Doublets (σ, π) beschreibt und V unter (5.94) invariant ist.

Eine Lagrange-Dichte mit Supersymmetrie

(Wess-Zumino Modell) ist z.B. im Buch von Ramond beschrieben. Benützung der supersymmetrischen QM = supersymmetrische $(0+1)$ -dim QFT zum Beweis von Index Theoremen findet man z.B. in einem Artikel von Alvarez-Gaume. Wir können hier nicht darauf eingehen.

Der in diesem Kapitel eingeführte Begriff der Aktion, der Lagrange'sche Formalismus für die klassische Feldtheorie und sein Zusammenhang mit dem Hamilton'schen Formalismus werden in den folgenden Kapiteln in der Pfadintegral-Quantisierung von wechselwirkenden QFT's eine zentrale Rolle spielen.

Appendix to Chapter 4.

The naive approach to Dirac's theory.

According to de Broglie (1923), the wave function of a free, relativistic particle with a fixed 4-momentum, p , is given by

$$\psi(x) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = e^{-ik \cdot x}, \quad (1)$$

$x = (x^0 = ct, \vec{x})$, $k = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$, with

$$p = \hbar k, \text{ i.e. } p_0 = \frac{E}{c} = \hbar \frac{\omega}{c}, \vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (2)$$

The special theory of relativity demands that

$$p_0^2 - \vec{p}^2 = (mc)^2, \quad (3)$$

where m is the mass of the particle. Thus

$$\omega(\vec{k}) = c \sqrt{\vec{k}^2 + \frac{(mc)^2}{\hbar^2}}$$

is the dispersion law. It is equivalent to

$$p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + (mc)^2}$$

The resulting group velocity of de Broglie's waves

is then found to be

$$\vec{v}(p) = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = c \frac{\partial p_0}{\partial \vec{p}} = c \frac{\vec{p}}{p_0}; \quad (4)$$

i.e., it is given by the classical expression for the velocity of a particle with mass m and momentum \vec{p} . The rapidity, φ , corresponding to \vec{v} is found from the equation

$$\tanh \varphi = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{|\vec{v}|}{c} = \frac{\vec{p}}{\omega(\vec{p})}, \quad (5)$$

with $\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + (mc)^2}$. [Using the identities

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1 \text{ and } \cosh \varphi = \cosh\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2 \cosh^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1, \text{ in combination with (5), and}$$

setting $c = 1$, we find expressions (4.81)–(4.83)!]

General states of free, relativistic quantum-mechanical particles are given by superpositions of

de Broglie's plane waves (1):

$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} \hat{\psi}(\vec{p}) e^{-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar}} \quad (6)$$

The functions $\psi(x)$ in (6) are the most general positive-energy solutions of the Klein-Gordon equation

$$\left(\square + \frac{(mc)^2}{\hbar^2} \right) \psi(x) = 0. \quad (7)$$

They are determined by their initial values $\psi(0, \vec{x})$,

which determine $\hat{\psi}(\vec{p})$ via Fourier transformation.

They solve the 1st order relativistic "Schrödinger equation"

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (8)$$

$$\text{where } H = c \sqrt{-\hbar^2 \Delta + (mc^2)} = \mathcal{F} c \sqrt{\vec{p}^2 + (mc)^2} \mathcal{F}^{-1}.$$

Equation (8) describes the time evolution of the state of one free, relativistic q. m. particle without spin.

In 1926, Dirac attempted to find a relativistic Schrödinger equation of the form (8) for electrons, i.e. for particles with spin $\frac{1}{2}$, that implies the Klein-Gordon equation (7) (just like Maxwell's equations for \vec{E} and \vec{B} in the vacuum imply the

wave equation for \vec{E} and \vec{B}). His "ansatz" was an equation of the form

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (9)$$

with

$$H = c \vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \beta mc^2, \quad (10)$$

where ψ is an n -component column vector, and $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ and β are $n \times n$ square matrices chosen such that (9) and (10) imply the Klein-Gordon equation (7). Differentiating (9) with respect to t and plugging in (9) and (10), we find that

$$H^2 = -(\hbar c)^2 \Delta + (mc^2)^2, \quad (11)$$

in order for (7) to be satisfied. Eq. (11) follows iff, for $k, l = 1, 2, 3$, with $k \neq l$,

$$\alpha_k^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0, \quad \alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 0, \quad (12)$$

For H to be selfadjoint (as it ought to be), it

suffices that $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ and β are hermitian

$n \times n$ matrices. By trial and error, Dirac (and,

by the way, independently Kramers) found the solution : $n = 4$,

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$k = 1, 2, 3$, where $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ are the usual Pauli matrices.

Thus $H = H^*$ is a selfadjoint operator on the Hilbert space $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ with scalar product

$$(\psi, \varphi) := \int d^3x \psi^*(\vec{x}) \varphi(\vec{x}), \quad (14)$$

where $\psi^*(\vec{x}) = \overline{\psi(\vec{x})}^T$ is a four-component

row vector. It is easy to see that (9), (10) are

equivalent to the 1st order PDE (Dirac equation)

$$(g^\mu \hat{p}_\mu + mc) \psi(x) = 0, \quad (15)$$

where $\hat{p}_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, with

$$g^0 = \beta, \quad g^k = -\beta \alpha_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (16)$$

so that, by (12),

$$\{g^\mu, g^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4, \quad (17)$$

and, by (13),

$$(\gamma^0)^* = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^* = -\gamma^k. \quad (18)$$

Explicitly,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

which is the "standard representation" of Dirac's γ -matrices introduced in (4.78). Other representations of these matrices (with the scalar product (14) kept fixed) are obtained from (19) by setting

$$\tilde{\gamma}^\mu := S \gamma^\mu S^*, \quad (20)$$

where $S^* = S^{-1}$ (i.e., S is unitary), $\tilde{\psi} = S\psi$; see (4.75), (4.76). A plane wave solution of (15) has

the form

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x / \hbar}, \quad (21)$$

with

$$(\not{p} - mc) u(p) = 0, \quad (22)$$

where

$$\not{p} := \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu p_\mu. \quad (23)$$

One verifies using (17), (19) that

$$\not{p}^2 = p^2 \cdot \mathbb{1}_4 = (mc)^2 \cdot \mathbb{1}_4, \quad \text{tr } \not{p} = 0. \quad (24)$$

Hence \not{p} has the eigenvalues $\pm mc$, which are 2-fold degenerate. It follows that (22) has two solutions $u(p) = U_1(p), U_2(p)$, for $p \in V_m^+$, and two solutions $u(p) = V_1(-p), V_2(-p)$, for $p \in V_m^-$. Explicit expressions are given in (4.82), (4.83). The 2-fold degeneracy of the eigenvalues $\pm mc$ of the matrix \not{p} (with $p^2 = (mc)^2$) is due, according to Dirac, to the spin ($s = \frac{1}{2}$) of the particle! General solutions of the Dirac equation (15) are obtained from solutions of (22) by superposition; compare to (4.45)!

Since $H = H^*$ is selfadjoint on $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$, the scalar product (14) is conserved under time evolution ($\exp[-i\frac{tH}{\hbar}]$ is unitary on \mathcal{H}). In particular, $\|\psi_t\|^2$, with $\psi_t(\vec{x}) = \psi(ct, \vec{x})$ a solution of (9) or (15), is independent of time t . We can therefore interpret

$$j^0(x) := \psi_t^*(\vec{x}) \psi_t(\vec{x}) \quad (25)$$

as a probability density in configuration space of a single relativistic electron; (not a great idea, though). Expression (25) is the 0-component of a 4-vector current density

$$j^\mu(x) := \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad (26)$$

with

$$\bar{\psi}(x) := \psi^*(x) \gamma^0. \quad (27)$$

One verifies easily (see Chapter 4) that

$$\bar{\psi}(x) \left(\frac{\hbar}{i} \gamma^\mu \overset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} - mc \right) = 0, \quad (28)$$

and, with (15),

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (\text{continuity equation}). \quad (29)$$

While these features of the Dirac equation are virtues, Dirac perceived it as a draw-back that the Dirac equation (9), (10) has negative-energy solutions. The spectrum, $\sigma(H)$, of the Dirac Hamiltonian H in eq. (10) is given by

$$\sigma(H) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty). \quad (30)$$

(The generalized eigenvalues of H are, according to (22),

given by $E = \pm c\sqrt{\vec{p}^2 + (mc)^2}$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$!) After some earlier misconceptions, and with a little help from H. Weyl, Dirac decides to fill all states corresponding to a negative energy with one particle, in accordance with the Pauli principle. The vacuum then corresponds to the completely filled "Dirac sea".

A hole in the Dirac sea at energy $-E < -mc^2$ then corresponds to a particle of energy $E > mc^2$, but with an electric charge opposite to that of an electron, (a hole is a "missing electron"). Exciting an electron from a state with energy $-E < -mc^2$ to a state with energy $E' > mc^2$, thereby creating a hole in the Dirac sea at energy $-E$, amounts to creating a pair of particles with energies E and E' and electric charges e and $-e$, respectively.

Thus, the Dirac equation led Dirac to predict a new particle, the anti-electron or positron, with the same mass as the electron, but opposite electric

charge. This particle was discovered in 1932.

The Poincaré covariance of Dirac's theory can be understood as explained in Chapter 4: If ψ_Λ denotes the Dirac spinor in a Poincaré-transformed inertial frame ($y = \Lambda x + a$) then

$$\psi_\Lambda(\Lambda x + a) = S(\Lambda) \psi(x), \quad (31)$$

with

$$S(\Lambda) g^{\mu\nu} S^\dagger(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\rho}; \quad (32)$$

(see (4.62), (4.65), (4.68); note that $S^\dagger(\Lambda) = S(\Lambda)^{-1}$).

Then the Dirac equation,

$$\left(\frac{\hbar}{i} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc \right) \psi(x) = 0$$

implies that

$$S(\Lambda) \left(\frac{\hbar}{i} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc \right) \underbrace{S^\dagger(\Lambda) S(\Lambda)}_{= \mathbb{1}_4} \psi(x) = 0.$$

By (31), (32), this equation is equivalent to

$$\left(\frac{\hbar}{i} \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc \right) \psi_\Lambda(\underbrace{\Lambda x + a}_{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\hbar}{i} g^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} + mc \right) \psi_\Lambda(y) = 0. \quad (33)$$

Moderately tedious, but straight forward calculations lead to the following expressions for the infinitesimal generators of Poincaré transformations:

$$\hat{p}_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{generators of translations})$$

$$\hat{M}_{\mu\nu} = \frac{\hbar}{i} \left(x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) - \hbar \delta_{\mu\nu}, \quad (34)$$

where $\delta_{\mu\nu} := \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ ($\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$). In particular, rotations are generated by

$$\vec{J} = \vec{x} \wedge \vec{p} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \equiv \vec{L} + \vec{S}. \quad (35)$$

The spin operator, \vec{S} , satisfies

$$\vec{S}^2 = \hbar^2 s(s+1) = \hbar^2 \frac{3}{4}, \quad \text{i.e. } s = \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Coupling a Dirac particle to an external electromagnetic field described by a 4-vector potential A_μ can be accomplished by "minimal substitution":

$$\left[\gamma^\mu \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu(x) \right) - mc \right] \psi(x) = 0, \quad (37)$$

where e is the electric charge of the particle.

Equation (37) is gauge-invariant: If

$$A_\mu \mapsto {}^X A_\mu = A_\mu + \partial_\mu X,$$

and

$$\psi \mapsto {}^X \psi = e^{-ieX/c} \psi$$
(38)

then (37) implies

$$\left[\gamma^\mu \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} {}^X A_\mu \right) - mc \right] {}^X \psi = 0,$$

for an arbitrary function $X(x)$ on space-time M^4 .

In an external electromagnetic field, the Dirac Hamiltonian H corresponding to eq. (37) takes the form

$$H = c \vec{\alpha} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}(x) \right) + \beta mc^2 + e\varphi, \quad (39)$$

where $\varphi = A_0$, and, formally, $H = H^*$, in the scalar product (14).

As our last topic in this appendix, we discuss

The non-relativistic limit of Dirac's theory.

Subtracting the rest energy mc^2 from the Hamiltonian H in (39), and using the representation (13) for the $\vec{\alpha}$ - and β -matrices, we find that

$$H - mc^2 = \begin{pmatrix} e\varphi \mathbb{1}_2 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & e\varphi - 2mc^2 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

with $\vec{\pi} = \frac{\hbar}{i} \vec{V} - \frac{e}{c} \vec{A}$; ($m \times$ velocity operator).

We set

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \quad u(x), v(x) \in \mathbb{C}^2. \quad (41)$$

We are interested in states, ψ , of a Dirac particle of small energy, as compared to the rest energy mc^2 , in the sense that

$$\| (H - mc^2) \psi \| \ll mc^2 \| \psi \| . \quad (42)$$

With (41) we have that

$$(H - mc^2) \psi = \begin{pmatrix} e\varphi u + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} v \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} u + (e\varphi - 2mc^2) v \end{pmatrix} \quad (43)$$

The contribution of the lower two components to (42) is

$$\| \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} u + (e\varphi - 2mc^2) v \| \ll mc^2 (\| u \|^2 + \| v \|^2)^{1/2}.$$

Assuming that $e\varphi \ll mc^2$, this condition yields

$$v \simeq \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2mc} u. \quad (44)$$

Thus, the upper two components u alone determine the solution v of the Dirac equation in the non-relativistic regime (42), at least approximately, and

$$\|v\| \approx \left\| \frac{\vec{G} \cdot \vec{\pi}}{2mc} u \right\| \ll \|u\|$$

if (42) holds; (this is why the components v are called the "small components"). Plugging (44) into the upper two components of (43), we find that $H - mc^2$ acts on u like

$$H_{\text{Pauli}} := \frac{(\vec{G} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + e\varphi, \quad (45)$$

(assuming that (42) and hence (44) hold).

As verified in Series 3 of our Exercises,

$$H_{\text{Pauli}} = \frac{(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A})^2}{2m} + e\varphi - \frac{eh}{2mc} \vec{G} \cdot \vec{B}, \quad (46)$$

where $\vec{B} = \text{curl } \vec{A}$ is the magnetic field. The last term on the right side of eq. (46) should be compared with the Zeeman term in the Pauli Hamiltonian of a non-relativistic spinning electron,

which is given by

$$-g \frac{e}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B}, \quad (47)$$

where g is the gyromagnetic factor. By (35),

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (\text{spin } \frac{1}{2}).$$

Comparing (47) with (46), we thus find that

$$g = 2. \quad (48)$$

It is a triumph of Dirac's theory (with "minimal substitution") that it automatically yields the correct magnetic moment, corresponding to $g=2$, of the electron.

For a systematic treatment of relativistic corrections to Pauli's theory, see, e.g., Graf's lecture notes on QFT I. For predictions of Dirac's theory concerning the hydrogen spectrum, see any good book on QFT.

SRT.

T: Trsf. zwischen Koo. systemen 2^{er} inertialer
Beobachter; Abb. von \mathbb{R}^4 auf \mathbb{R}^4 . ①

T: Inertialsystem \rightarrow Inertialsystem.

$\Rightarrow T$ geradenrecht $\Rightarrow T: x \rightarrow x'$ affin.

$$\Rightarrow x' = Ax + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^4$$

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z; \vec{x} = (x, y, z).$$

Differenzen: $\vec{z} = x - y$ (Vierervektoren)

transformieren homogen, i.e.,

$$\vec{z}' = A \vec{z}. \quad (1)$$

Postulate (a) - (d) (Einstein 1905) sollen in allen Inertialsystemen gelten:

(a) $c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = 0$

ist Gl. für Lichtausbreitung in allen Inertialsystemen; (c unabh. vom System!)

(b) $\ddot{x}(t)$ ist Trägheitsbahn in allen Inertialsystemen.

(c) Signalgeschwindigkeit $\leq c$.

(d) Gesetze der Mechanik und ED lauten in allen Inertialsystemen gleich.

(a) \Rightarrow Lichtkegel, $(\vec{z}^0)^2 - \vec{z}^2 = 0$, invariant
unter T .

$$(\vec{z}^0)^2 - \vec{z}^2 =: \gamma_{\mu\nu} \vec{z}^\mu \vec{z}^\nu, \quad (2)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow A^T \gamma A = \alpha \gamma, \quad \alpha \neq 0 \quad (3)$$

Sylvester $\Rightarrow \alpha > 0$.

$$\Rightarrow A = \lambda \Lambda, \text{ wo } \Lambda^T \gamma \Lambda = \gamma \quad (4)$$

Λ : Lorentz Trsf. (Lorentz Gruppe L)

$$A(\lambda) = \lambda(\lambda) \Lambda$$

A 's bilden eine Gruppe \Rightarrow

$$\lambda(\lambda_1) \lambda(\lambda_2) = \lambda(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \quad (5)$$

Poincaré Gruppe: $\rho \ni (\Lambda, \alpha)$ mit

$$x' = \Lambda x + \alpha \quad (6)$$

3.

Struktur der Lorentzgruppe.

$$\Lambda^T \gamma \Lambda = \gamma \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

$$\gamma_{\mu\nu} = 1 = \Lambda^\mu_\nu \gamma_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\mu = (\Lambda^\circ)_\nu (\Lambda^i)_\nu - \sum_i (\Lambda^i)_\nu)^2$$

$$\Rightarrow \pm \Lambda^\circ \geq 1.$$

Zusammenhangskomponenten von L :

$$\Rightarrow L = L_+^\uparrow \cup L_-^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_+^\downarrow$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \Psi \\ \downarrow \\ T \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ P \\ \downarrow \\ PT = -1 \end{matrix}$$

UG's von L :

$$L_+ = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow, \quad L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow, \quad L_+^\uparrow -$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ T \\ P \\ TP \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 \in L_+^\uparrow.$$

UG von L_+^\uparrow : Raumdrehungen, $SO(3)$.

Boosts:

$$\Lambda_x(x) = \left(\begin{array}{cc|c} \text{ch}x & -\text{sh}x & 0 \\ -\text{sh}x & \text{ch}x & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

(4)

Lemma. Jedes $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ hat Form

$$\Lambda = \Lambda(R_1) \Lambda_x(x) \Lambda(R_2).$$

Beweis:

$$x \mapsto y = \Lambda x$$

ist geradentreue Abb. von M^4 auf sich selbst.

$$M = M_x \cap M_y, \quad (\Rightarrow 2 \leq \dim M \leq 3)$$

$$M_x := \{x \mid x^\circ = 0\}, \quad M_y = \{x \mid y = \Lambda x, y^\circ = 0\}$$

3 -dim. Ebene $\subset M^4$ 3 -dim. Ebene $\subset M^4$

$$(a) \quad \underline{\dim M = 3} \quad \Rightarrow \quad M_x = M_y$$

$\Rightarrow M_x = M$ invariant unter Λ

$$\Rightarrow M_x^\perp = \{x \mid x^1 = x^2 = x^3 = 0\} = \text{Zeitachse}$$

ist auch invariant unter Λ .

$\Rightarrow \Lambda$ ist Raumdrehung.

$$(b) \quad \underline{\dim M = 2}$$

Durch Raumdrehung, R , können wir erreichen, dass

$$M = \{x^\circ = x^1 = 0\}.$$

$$\Leftrightarrow M_x \cap M_y = (2,3)\text{-Ebene}.$$

$\Rightarrow \Lambda' := R^T \Lambda R$ lässt $(2,3)$ -Ebene invariant

$\Rightarrow \Lambda'$ lässt auch orth. Komplement der $(2,3)$ -Ebene invariant.

$$\Rightarrow \Lambda' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

$\Lambda' \in L_+^\uparrow \Rightarrow A^{\circ} \geq 1, \det A = \det B = \pm 1$.

(i) $\det A = \det B = 1 \Rightarrow$

$$\Lambda' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

$\overset{\uparrow}{\text{Boost}} \quad \overset{\uparrow}{\text{Drehung der } (2,3)\text{-Ebene}}$

$$\Rightarrow \Lambda = R \Lambda' R^T = R \underbrace{(\text{Boost} \times \text{Drehung})}_{\substack{\text{der } (0,1)-\text{Ebene} \\ \text{Drehung}}} R^T$$

(ii) $\det A = \det B = -1 \Rightarrow$

$$\Lambda' = \left(\begin{array}{c|c} AC & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} AC & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \text{ Boost der } (0,1)\text{-Ebene}$$

(6)

$$\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \text{Raumdrehung}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \text{Drehung} \times \Lambda_x(x) \times \text{Drehung}.$$

Q.E.D.

Lemma. $\lambda(\Lambda) = 1$.

Beweis. (i) Λ Raumspiegelung $\Rightarrow \Lambda^2 = 1$

$$\Rightarrow \lambda(\Lambda) = 1 \quad (\lambda(\Lambda) = -1 \Rightarrow \lambda(\Lambda)\Lambda = \text{Zeitumkehr})$$

(ii) Λ Raumdrehung um feste Achse, Dreh $\vec{x} = \phi$

$$\lambda(\phi_1)\lambda(\phi_2) = \lambda(\phi_1 + \phi_2) \Rightarrow \lambda(\phi) = e^{k\phi}$$

$$\lambda(\phi) \text{ hat Periode } 2\pi, \text{ ist } \underline{\text{reell}} \Rightarrow k=0!$$

(iii) $\Lambda = \text{Boost in } (0, z) - \text{Ebene}$

$$\lambda(x_1)\lambda(x_2) = \lambda(x_1 + x_2) \Rightarrow \lambda(x) = e^{kx}$$

$$R \Lambda_x(x) R^T = \Lambda_x(-x),$$

falls R Drehung um \hat{z} -Achse mit Dreh $\vec{x} = \pi$

$$\Rightarrow \lambda(-x) = \lambda(x)$$

$$\Rightarrow k=0.$$

Q.E.D.

Boost in $(0, 1)$ -Ebene:

$$ct' = ct \operatorname{Ch} X - x^1 \operatorname{Sh} X$$

$$x'^i = x^i, \quad i=2,3.$$

$$x'' = -ct \operatorname{Sh} X + x^1 \operatorname{Ch} X$$

\Rightarrow Ein im gestr. Koo.-system ruhender Massenpunkt hat Bahn

$$x'(t) = \underbrace{x''(\operatorname{Ch} X)^{-1}}_{\text{const.}} + ct \operatorname{Th} X$$

$$x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3$$

$\Rightarrow v = c \operatorname{Th} X, (\chi: \text{Rapidity})$

ART

1) Raum - Zeit in klass. (vor-relat.) Mechanik (NM)
SRT (M^4)

ART

2) Invarianten und Symmetriegruppen der NM
SRT

3) Begriff des Beobachters.

4) Bouncing photon; Zeit - Dilatation
Lorentz - Kontraktion

Lorentz-Frisch und Fermiamente, (\mathbb{CP}^1)

$$x \mapsto x^0 \sigma_0 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^2 - ix^1 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \equiv x \cdot \sigma$$

$$\det(x \cdot \sigma) = (x^0)^2 - (x^3)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow (x \cdot \sigma)^* = x \cdot \sigma$$

$$x \mapsto Ax \Leftrightarrow A(x \cdot \sigma)A^* = (A(A)x) \cdot \sigma$$

Dann ist $\det(x \cdot \sigma) = \det((Ax) \cdot \sigma) \Leftrightarrow \det A = 1 \quad (2)$

$$(\vec{x} \cdot \vec{\sigma}) z = |\vec{x}| z \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^1$$

$$= \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\phi + i \sin\vartheta \sin\phi \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

für $\vec{x} = |\vec{x}| \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \sin\phi \\ \sin\vartheta \cos\phi \end{pmatrix} \quad (3)$

Verification of (3):

2

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Suppose that

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \cos\varphi + i \sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cos\varphi - i \sin\vartheta \sin\varphi & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}$$

$$\left(z = \exp\left(i \frac{\vartheta}{2} G_3\right) \exp\left(i \frac{\vartheta}{2} G_2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Then

$$\cos\vartheta z_1 + (\sin\vartheta \cos\varphi + i \sin\vartheta \sin\varphi) z_2 = z_1' \quad (4)$$

$$(\sin\vartheta \cos\varphi - i \sin\vartheta \sin\varphi) z_1 - \cos\vartheta z_2 = z_2'$$

Solution of (4):

$$\frac{(\sin\vartheta \cos\varphi - i \sin\vartheta \sin\varphi)(\sin\vartheta \cos\varphi + i \sin\vartheta \sin\varphi)}{1 - \cos\vartheta} z_2$$

$$-\cos\vartheta z_2 = z_2'$$

$$(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta) z_2 = (1 - \cos\vartheta) z_2 \quad \checkmark$$

Hence,

$$z_2 = 1, \quad z_1 = \frac{\sin\vartheta \cos\varphi + i \sin\vartheta \sin\varphi}{1 - \cos\vartheta} \quad (5)$$

solves (4)!

$1 + \frac{\sin^2\vartheta}{1 - 2\cos\vartheta + \cos^2\vartheta} = z $
--

(6)

Call soln. (5) $z = \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right) = z(\vec{n})$, for $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$1 - 2 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{(1 - \cos \vartheta)^2}$$

$$= \frac{2(1 - \cos \vartheta)}{(1 - \cos \vartheta)^2} = \frac{2}{1 - \cos \vartheta}$$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2}}, z_1 = \frac{\sin \vartheta \cos \varphi + i \sin \vartheta \sin \varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \vartheta)}}$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{\sin^2 \vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} + \frac{1 - \cos \vartheta}{2}$$

$$= \frac{\sin^2 \vartheta + 1 - 2 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} = 1.$$

$$(x^\circ \vec{e}_0 + \vec{x} \cdot \vec{e}) \equiv \left(\frac{\vec{x}}{|x|} \right) = (x^\circ + |\vec{x}|) \equiv \left(\frac{\vec{x}}{|x|} \right)$$

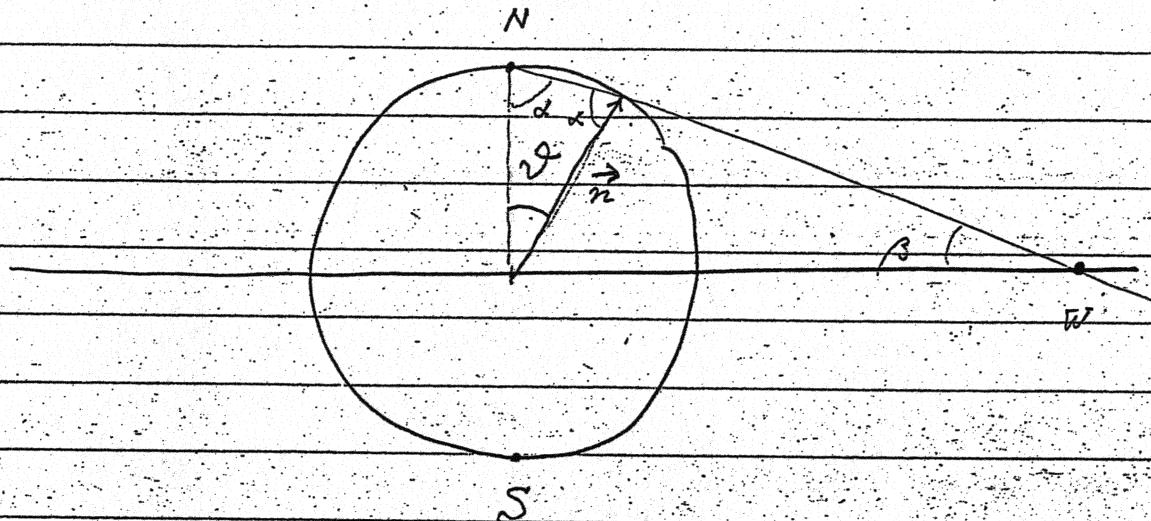
$$w \equiv \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sin \vartheta \cos \varphi + i \sin \vartheta \sin \varphi}{1 - \cos \vartheta}$$

= Pl. in complex plane corrsp. (7)

to unit vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$,

under stereographic projection!

Verification of (7): W.l.o.g., may set $\varphi = 0$. Then 4



$$\alpha = \frac{\pi - \vartheta}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2}$$

$$\tan \beta = \tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{w}$$

$$= \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2}}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= w = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \right)} \\ &= \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \end{aligned}$$

$$\sin \vartheta = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

$$\cos \vartheta = \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^2 = 1 - 2 \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2}{1 - \cos \vartheta} = \frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}}{2 (\sin \frac{\vartheta}{2})^2} = \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \quad \checkmark$$

Lorentz trsf. = circle pres. maps of Riemann sphere

= Möbius trsf. of complex plane } (2)

$$= SL(2, \mathbb{C})$$

\Rightarrow Same result as in (2)!

Converse: (2) \Rightarrow (1) is an invariant!

C

Zusammenfassung zur Dirac Theorie.

$$V_m^+ = \{ p : p^2 = m^2, p_0 > 0 \}$$

Für $p \in V_m^+$ gibt es zwei linear unabh.

Lösungen zur Gleichung

$$(p - m) U(p) = 0,$$

Basis: $\{ U_s(p), s=1,2 \}$; und zwei linear unabh.

Lösungen zur Gleichung

$$(p + m) V(p) = 0,$$

Basis $\{ V_s(p), s=1,2 \}$.

Es gilt dann

$$\sum_{s=1}^2 U_s(p) \bar{U}_s(p) = \frac{p + m}{2m}$$

$$-\sum_{s=1}^2 V_s(p) \bar{V}_s(p) = -\frac{p + m}{2m}$$

$$\sum \dots = \mathbb{I}$$

Sei $x = (t, \vec{x})$ ($c=1$), und

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 \int d^3 p \sqrt{\frac{m}{\omega(\vec{p})}} \left[c_s(\vec{p}) U_s(p) e^{-ip \cdot x} + d_s^*(\vec{p}) V_s(p) e^{ip \cdot x} \right]_{p_0 = \omega(\vec{p})}.$$

Dann gilt

$$(i\nabla - m) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}(\vec{x}, t) (-i\nabla - m) = 0.$$

Quantisierung

$$\{ c_s^\#(\vec{p}), c_{s'}^\#(\vec{q}) \} = 0$$

$$\{ d_s^\#(\vec{p}), d_{s'}^\#(\vec{q}) \} = 0$$

$$c_s^\# \leftrightarrow d_{s'}^\#$$

$$\{ c_s(\vec{p}), c_{s'}^*(\vec{q}) \} = \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$$

Analog für d_s, d_s^* !

$$\Rightarrow \{ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{y}, t) \} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Fockraum Darstellung.

$$\mathcal{F}, \Omega, c_s(\vec{p}) \Omega = d_s(\vec{p}) \Omega = 0, \forall s, \vec{p}.$$

$$H, \vec{P}$$

Poincaré Kovarianz (Siehe Übungen)

$U(\lambda, \alpha)$: unitäre Darstellung von $iL_+^\uparrow (\equiv P_+^\uparrow)$

auf \mathcal{F} mit Eigenschaften:

$$(1) \quad U(\lambda, \alpha) \Omega = \Omega$$

$$(2) \quad U(\lambda, \alpha) \psi(x) U(\lambda, \alpha)^{-1} = S(\lambda) \psi(\lambda x + \alpha).$$

Transformation von $c_s^\#$, $d_s^\#$:

$$\begin{aligned} c_s^{(\lambda, \alpha)}(\vec{p})^\# &= U(\lambda, \alpha) c_s^\#(\vec{p}) U(\lambda, \alpha)^{-1} \\ &= e^{\pm i(\vec{\lambda}^{-1}\vec{p}) \cdot \alpha} \sqrt{\frac{\omega(\vec{\lambda}^{-1}\vec{p})}{\omega(\vec{p})}} \end{aligned}$$

$$\times \left(\sum_{s'} Q_{s's}(\lambda, \vec{p}) c_{s'}^\#(\vec{\lambda}^{-1}\vec{p}) \right)$$

Ebenso für $d_s^\#(\vec{p})$. ↑ Wigner Rotation.

(4.)

Beachte, dass

$$\Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_{\Lambda^{-1} p} = R(\Lambda, p)$$

eine Raumdrehung ist!

$$\Rightarrow S(\Lambda_p)^{-1} S(\Lambda) S(\Lambda_{\Lambda^{-1} p}) U_s(0)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A(R(\Lambda, p)) & 0 \\ \hline 0 & A'(R(\Lambda, p)) \end{array} \right) U_s(0)$$

$$= \sum_{s'} Q_{ss'}(\Lambda, p) U_{s'}(0).$$

$$\Rightarrow \sum_{s'} Q_{ss'}(\Lambda, p) U_{s'}(p) = \sum_{s'} Q_{ss'}(\Lambda, p) S(\Lambda_p) U_{s'}(0)$$

$$= S(\Lambda_p) \sum_{s'} Q_{ss'}(\Lambda, p) U_{s'}(0)$$

$$= S(\Lambda_p) (S(\Lambda_p)^{-1} S(\Lambda) S(\Lambda_{\Lambda^{-1} p})) U_s(0)$$

$$= S(\Lambda) U_s(\Lambda^{-1} p) !$$

Rest: Übungen!

Invariante Distributionen der Dirac Theorie.

$$\langle \Omega, \psi(x) \bar{\psi}(y) \Omega \rangle$$

$$= \sum_s \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{m}{\omega(\vec{p})} [U_s(p) \cdot \bar{U}_s(p) e^{-ip(x-y)}] \Big|_{p_0 = \omega(\vec{p})}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \Big|_{p_0 = \omega(\vec{p})} \quad (1)$$

$$\langle \Omega, \bar{\psi}(x) \psi(y) \Omega \rangle = \dots$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} (\not{p} - m) e^{-ip(x-y)} \Big|_{p_0 = \omega(\vec{p})} \quad (2)$$

(1) \Rightarrow

$$\langle \Omega, \psi(x) \bar{\psi}(y) \Omega \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$$= (i\not{\partial}_x + m) i\not{\Delta}^+(x-y) = i S^+(x-y). \quad (3)$$

(2) \Rightarrow

$$\langle \Omega, \bar{\psi}(x) \psi(y) \Omega \rangle = (i\not{\partial}_x - m) i\not{\Delta}^+(x-y) = i S^-(y-x). \quad (4)$$

(6.)

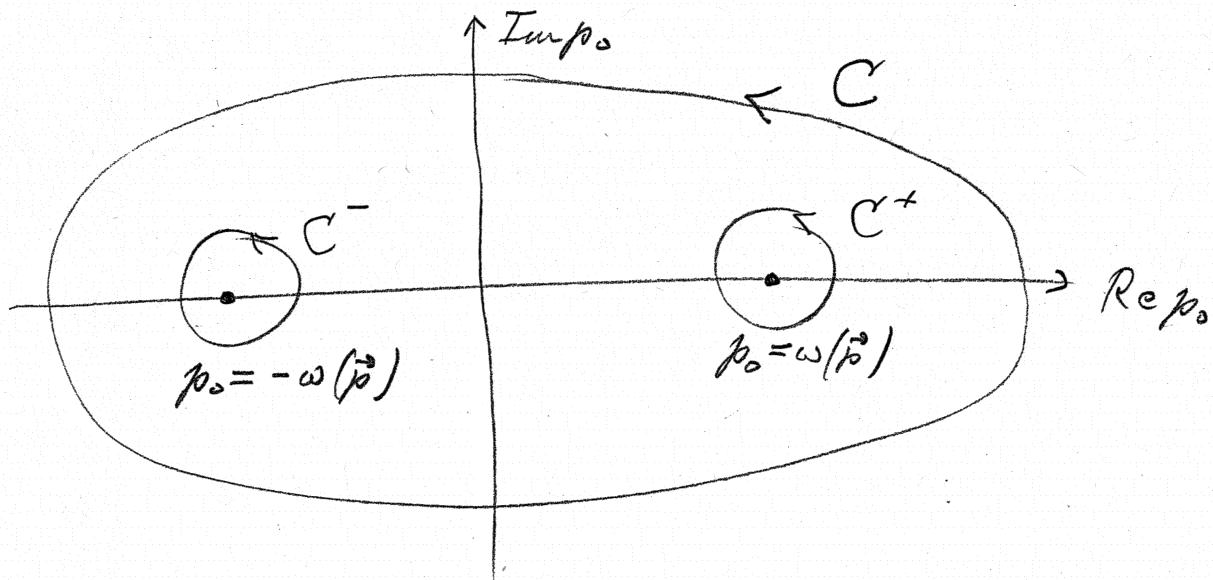
$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \langle \Omega, \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \Omega \rangle \\
 &= (i\not\nabla_x + m) i\Delta^+(x-y) + (i\not\nabla_y - m) i\Delta^+(y-x) \\
 &= (i\not\nabla_x + m) i [\Delta^+(x-y) - \Delta^+(y-x)] \\
 &= (i\not\nabla_x + m) i \Delta(x-y) = i S(x-y) \\
 &= \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Propagator.

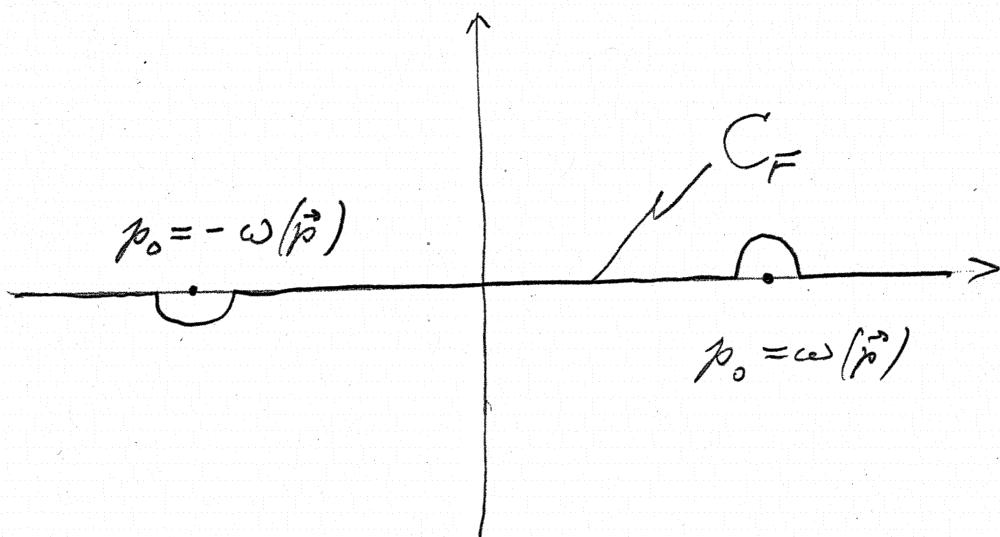
$$\begin{aligned}
 i S_F(x-y) &= \langle \Omega, T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] \Omega \rangle \\
 T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] &\equiv \Theta(x^0 - y^0) \psi(x) \bar{\psi}(y) \\
 &\quad - \Theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}(y) \psi(x). \\
 \Rightarrow S_F(x-y) &= \Theta(x^0 - y^0) S^+(x-y) - \Theta(y^0 - x^0) S^-(x-y) \\
 &= (i\not\nabla_x + m) \Delta_F(x-y)
 \end{aligned}$$

$$i\Delta^\pm(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \Theta(\pm p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^\pm} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2} d^4 p$$



$$i\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2} d^4 p$$



$$i\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_F} d^4 p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2}$$

(8.)

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$= \begin{cases} i\Delta^+(x), & x^2 \geq 0, \operatorname{sgn} x^0 > 0 \\ i\Delta^+(-x), & x^2 \geq 0, \operatorname{sgn} x^0 < 0. \end{cases}$$

Spin und Statistik.

(1) Skalarfeld.

$$\{\alpha(\vec{p}), \alpha^*(\vec{p}')\} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\{\alpha^\#(\vec{p}), \alpha^\#(\vec{p}')\} = 0.$$

$$\alpha(\vec{p}) \Omega = 0, \forall \vec{p}; \quad \varphi(x) = \dots$$

$$\langle \Omega, \varphi(x) \varphi(y) \Omega \rangle = i \Delta^+(x-y).$$

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \langle \Omega, \{\varphi(x), \varphi(y)\} \Omega \rangle$$

$$= i(\Delta^+(x-y) + \Delta^+(y-x)).$$

Lorentz-Invarianz von $\Delta^+ \Rightarrow x^0 = y^0 \Rightarrow$ (9)

$$\{ \varphi(x), \varphi(y) \} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\omega(\vec{p})} 2 \cos(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}))$$

$$\neq 0$$

\Rightarrow Lokalität verletzt!

(2) Dirac Feld.

Benützen Kommutatoren \Rightarrow

$$\langle \mathcal{L}, [\bar{\psi}(y), \psi(x)] \mathcal{L} \rangle$$

$$= (-i \not{D}_x - m) \underbrace{[i \Delta^+(y-x) + i \Delta^+(x-y)]}_{\neq 0}$$

$$\neq 0, \text{ für } (x-y)^2 < 0$$

\Rightarrow Lokalität verletzt!

(3) Chirale, massive Felder von beliebigem Spin.

$\varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{i_1 \dots i_r}(x); \quad u_{\beta_1}^{\alpha}, v^{\alpha} \dots$
 (Bem. zur Darstellungs-
 theorie!)

$$\hat{P}^{\alpha\beta} = (p_0 \hat{\sigma}_0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\alpha\beta}$$

$$\hat{P}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (p_0 \hat{\sigma}_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$$

Zweipunkt funktion von $\varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{i_1 \dots i_r}$,

$$\int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) P^{\delta_1 i_1} \dots P^{\delta_r i_r}$$

$$\hat{P}_{\dot{\delta}_1 \beta_1} \dots \hat{P}_{\dot{\delta}_s \beta_s} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$$= \prod_{j=1}^r (-i \hat{\sigma} \cdot \nabla_x)^{\delta_j i_j} \prod_{l=1}^s (-i \hat{\sigma} \cdot \nabla_x)_{\dot{\delta}_l \beta_l} e^{i \Delta^+(x-y)}$$

$$= D_{\dot{\delta} \beta}^{\frac{x}{\Delta^+}(y)} e^{i \Delta^+(x-y)}$$

$$\Rightarrow \langle \Omega, [\varphi_{\dot{\delta}}^{\frac{x}{\Delta^+}(y)}]^*, \varphi_{\dot{\beta}}^{\frac{x}{\Delta^+}(x)}]_{\pm} \Omega \rangle$$

$$= D_{\dot{\delta} \beta}^{\frac{x}{\Delta^+}} \underbrace{[i \Delta^+(y-x) \pm (-1)^{n+s} i \Delta^+(x-y)]}_{! = 0, \text{ für } (x-y)^2 < 0}$$

Richtig, falls

$$\pm (-1)^{r+s} \stackrel{!}{=} -1$$

Spin : $S = \frac{r+s}{2}$

S halbganz $\Rightarrow r+s$ ungerade $\Rightarrow +$

S ganz $\Rightarrow r+s$ gerade $\Rightarrow -$

Das ist der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik (Fierz, axiomatische Feldtheorie).

Discrete Symmetries P, C and T.

A : e.m. Vektorpotential (\rightarrow Kugel)

$$A_0^P(x) = A_0(\hat{x}), \quad \vec{A}^P(x) = -\vec{A}(\hat{x})$$

$$\hat{x} := (x^\circ, -\vec{x})$$

$$(eA)_\mu^C(x) = -(eA)_\mu(x) \quad (C: e \rightarrow -e!)$$

$$A_0^T(x) = -A_0(-\hat{x}), \quad \vec{A}^T(x) = \vec{A}(-\hat{x}),$$

d.h. A_μ transf. wie ein Vektorfeld!

P für Spinoren: Vertauscht α mit ν ,

d.h. obere Komponenten von ψ mit unteren!

$$\Rightarrow \boxed{\psi^P(x) = \gamma_p \gamma^0 \psi(\hat{x}), \quad |\gamma_p| = 1.}$$

(Aus Darstellungstheorie!)

C für Spinoren: $\psi \rightarrow \psi^C$ so wählen,

dass

$$(i\not\nabla - e A - m)\psi = 0 \Rightarrow (i\not\nabla + e A - m)\psi^C = 0.$$

Das geht wie folgt:

$$(i\not\nabla - e A - m)\psi = 0 \quad (\gamma_0^* = \gamma_0, \quad \gamma_j^* = -\gamma_j)$$

$$\Rightarrow \psi^*(-i\hat{\not\nabla} - e\hat{A} - m) = 0$$

$$\Rightarrow \psi^*(-i\hat{\not\nabla} - e\hat{A} - m)\gamma_0 = 0$$

$$= \bar{\psi} (-i\not{D} - eA - m) = 0 \quad |^t$$

$$\Rightarrow (-i\partial_0\gamma_0 + i\partial_1\gamma_1 - i\partial_2\gamma_2 + i\partial_3\gamma_3$$

$$-eA_0\gamma_0 + eA_1\gamma_1 - eA_2\gamma_2 + eA_3\gamma_3 - m) \bar{\psi}^t = 0$$

Von links mit γ_0 multiplizieren:

$$(-i\partial_0\gamma_0 - i\partial_1\gamma_1 + i\partial_2\gamma_2 - i\partial_3\gamma_3$$

$$-eA_0\gamma_0 - eA_1\gamma_1 + eA_2\gamma_2 - eA_3\gamma_3 - m) \gamma_0 \bar{\psi}^t = 0$$

Von links mit γ_2 multiplizieren:

$$\Rightarrow (+i\not{D} + eA - m) \gamma_2 \gamma_0 \bar{\psi}^t = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi^c = (\text{Phase}) \times \gamma_2 \gamma_0 \bar{\psi}^t}$$

$$(\text{Phase}) = \gamma_c$$

Beweis für P:

$$(i\nabla_x - eA - m) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

Von links mit γ_0 multiplizieren:

$$(i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^1 \partial_1 - i\gamma^2 \partial_2 - i\gamma^3 \partial_3$$

$$- e\gamma^0 A_0 + e\gamma^1 A_1 + e\gamma^2 A_2 + e\gamma^3 A_3 - m) \gamma_0 \psi(\vec{x}, t) = 0$$

Setzen $\vec{x} = -\vec{y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial}{\partial y^i}$

$$A_{,0}^P(\vec{y}, t) = A_0(-\vec{y}, t) = A_0(\vec{x}, t)$$

$$A_{,j}^P(\vec{y}, t) = -A_j(-\vec{y}, t) = -A_j(\vec{x}, t)$$

$$\Rightarrow (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^j \partial_j^P - eA^P(\vec{y}, t) - m) \gamma_0 \psi(-\vec{y}, t) = 0,$$

d.h.

$$(i\nabla_y - eA^P(\vec{y}, t) - m) \underbrace{\gamma_0 \psi(-\vec{y}, t)}_{= \gamma_P^* \psi^P(\vec{y}, t)} = 0$$

$$= \gamma_P^* \psi^P(\vec{y}, t)$$

CPT für Spineuren.

$$(i\not\nabla - e A(\vec{x}, t) - m) \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad !$$

$$(i\not\nabla + e A^{PT}(\vec{x}, t) - m) \psi^{CPT}(\vec{x}, t) = 0 \quad *$$

Dies geht wie folgt: Wissen schon, dass

$$(i\not\nabla + e A(\vec{x}, t) - m) \psi^c(\vec{x}, t) = 0$$

Setzen $(\vec{x}, t) = (-\vec{y}, -s)$. Dann folgt:

$$(-i\not\nabla_y + e A(-\vec{y}, -t) - m) \psi^c(-\vec{y}, -s) = 0$$

Nun ist

$$A(-\vec{y}, -s) = -A^{PT}(\vec{y}, s)$$

Also folgt:

$$(-i\not\nabla_y - e A^{PT}(\vec{y}, s) - m) \psi^c(-\vec{y}, -s) = 0$$

Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit y^5 :

(16.)

$$(i\partial_y + eA^{PT}(\vec{y}, s) - m) \gamma^5 \psi^C(-\vec{y}, -s) = 0$$

Vergleich mit *:

$$\psi^{CPT}(\vec{x}, t) = \gamma^5 \psi^C(-\vec{x}, -t).$$

Nun ist

$$\psi^{CPT}(\vec{x}, t) = \gamma_T T \psi^C(\vec{x}, -t)$$

$$= \gamma_T T \gamma_P \gamma_0 \psi^C(-\vec{x}, -t)$$

$$\stackrel{!}{=} \gamma^5 \psi^C(-\vec{x}, -t)$$

$$\Rightarrow \gamma_T \gamma_P = 1, \quad T \gamma_0 = \gamma^5$$

$$\Rightarrow T = -i \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

Damit haben wir auch T gefunden!

Theorem.

$$(1) \langle \Omega, \psi^X(x) \psi^X(y) \Omega \rangle \\ = \langle \Omega, \psi^*(x) \psi(y) \Omega \rangle,$$

für $X = P$ und C ; jedoch

$$(2) \langle \Omega, \psi^T(x) \psi^T(y) \Omega \rangle \\ = \langle \Omega, \psi^*(y) \psi(x) \Omega \rangle$$

Korollar.

P und C unitär implementierbar;

T antiunitär implementierbar.

$\Rightarrow PCT$ anti unitär!

6. Kovarianter Formalismus für das e.m. Feld.

Die Lagrange Dichte für die Maxwell Gln.
im Vakuum ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x). \quad (6.1)$$

Benutzt man die üblichen Regeln zum Übergang
in den Hamiltonschen Formalismus, so findet man

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))} = -F^{\mu 0}(x).$$

Daraus folgt

$$\pi^0(x) = 0, \quad (6.2)$$

d.h. der zu $A_0(x)$ konjugierte Impuls verschwindet identisch. Deswegen kann man nicht direkt zum Hamiltonschen Formalismus übergehen. Dieser Umstand ist eng mit der Eichinvarianz der Maxwell'schen Theorie verknüpft: Die Maxwell-Gln. sind invariant unter der Transformation

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad (6.3)$$

Diese Invarianz erlaubt es nur eine Eichbedingung zu fordern, z.B. die Lorentz Eichung

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (6.4)$$

In der Lorentz-Eichung lauten dann die freien Maxwell Gln.

$$\square A^\mu(x) = 0, \quad (6.5)$$

die man aus einer zuerst von Fermi vorgeschlagenen Lagrange Dichte herleiten kann:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)). \quad (6.6)$$

(6.6) ist ein guter Ausgangspunkt zur kanonischen Quantisierung. Es werden sich aber Schwierigkeiten daraus ergeben, dass A^μ wie ein Vektorfeld transformieren soll, und die Metrik $g^{\mu\nu}$ indefinit ist.

Wir lösen (6.5) durch Fourier Transformation:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{r=0}^3 \left\{ \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r^*(\vec{k}) e^{ik \cdot x} + \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} \right\} \quad (6.7)$$

Die Polarisationsvektoren $\varepsilon_r^\mu(\vec{k})$ werden reell gewählt und erfüllen die Orthogonalitäts- und

Vollständigkeitsrelationen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{r\mu}(\vec{k}) \varepsilon_s^\mu(\vec{k}) &= -\xi_r \delta_{rs}, \\ \text{wo } \xi_0 &= -1, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

und

$$\sum_r \xi_r \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) \varepsilon_r^\nu(\vec{k}) = -g^{\mu\nu}. \quad (6.9)$$

Wir wählen

$$\varepsilon_0(\vec{k}) = n = (1, 0, 0, 0),$$

d.h. ε_0 ist zeitartig,

$$\varepsilon_r(\vec{k}) = (0, \vec{\varepsilon}_r(\vec{k})), \quad r = 1, 2, 3,$$

$$\text{wo } \varepsilon_3(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{k}, \quad k = |\vec{k}|; \quad \vec{\varepsilon}_1(\vec{k}), \vec{\varepsilon}_2(\vec{k}) \perp \vec{k}.$$

Diese Polarisationsvektoren sind raumartig.

Man bemerke, dass

$$\varepsilon_3^\mu(\vec{k}) = \frac{k^\mu - (\vec{k} \cdot \vec{n}) n^\mu}{[(\vec{k} \cdot \vec{n})^2 - k^2]^{1/2}} \quad (6.11)$$

Um die Theorie zu quantisieren, fordern wir die
Vertauschungsrelationen:

$$\left. \begin{aligned} [\alpha_r(\vec{k}), \alpha_s^*(\vec{k}')] &= \xi_r \delta_{rs} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \\ \text{und } [\alpha_r^\#(\vec{k}), \alpha_s^\#(\vec{k}')] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Weiter fordern wir die Existenz eines Vakuumzustandes, $|0\rangle$, mit der Eigenschaft, dass

$$\alpha_r(\vec{k})|0\rangle = \vec{0}, \quad \forall r, \vec{k}. \quad (6.13)$$

Gemäss (6.12) und (6.13) finden wir

$$\langle 0 | \alpha_0(\vec{f}) \alpha_0^*(\vec{f}) | 0 \rangle = \xi_0 \int \frac{d^3k}{2k} | f(\vec{k})|^2 < 0. \quad (6.14)$$

Da $\xi_0 = -1$ ist, ist also $\alpha_0^*(\vec{f})|0\rangle$ ein Zustand, dessen Norm-im-Quadrat negativ ist. Solche Zustände heißen Geisterzustände. Der Fockraum für die nach (6.12), (6.13) quantisierten Photonen trägt also eine indefinita Metrik.

Wieso muss $\xi_0 = -1$ gesetzt werden? Der Grund ist, dass $\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle$ wegen der Lorentzkovarianz von A^μ proportional zu $g^{\mu\nu}$ sein muss. Mit Hilfe von (6.7), (6.12) und (6.13) rechnet man leicht nach, dass dies impliziert, dass

$$\xi_0 = -\xi_1 = -\xi_2 = -\xi_3 < 0. \quad (6.15)$$

Ein Hilbertraum von Zuständen mit indefiniter

Metrik ist ein Ärger aus, denn es ist inkompatibel mit der üblichen quantenmechanischen Interpretation der Theorie. Die Gegenwart von Zuständen mit negativer Norm - im Quadrat im Photonen Fockraum ist eine Folge davon, dass wir die Eichbedingung

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (6.16)$$

nicht berücksichtigt haben. Anders ausgedrückt, ist sie eine Folge des Umstandes, dass ein relativistisches Teilchen mit Masse $m=0$ und Helizität 1 nur zwei Polarisationszustände, und nicht deren vier, hat. (Das haben wir in der allgemeinen Darstellungstheorie von \bar{P}_+^\dagger gelernt.)

Nun müssen wir zeigen, wie man die Situation durch Berücksichtigung der Lorentz-Eichbedingung (6.16) retten kann. Wir definieren

$$A^{\mu+}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} \sum_{r=0}^3 \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} \quad (6.17)$$

Wir definieren einen Unterraum, $\mathcal{F}_{\text{phys.}}$, des gesamten Fockraumes \mathcal{F} durch die Bedingung

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x) \psi = 0, \quad \forall x, \quad (6.18)$$

$\forall \psi \in \mathcal{F}_{\text{phys}}$. Diese Bedingung ist linear und Lorentz-invariant. Daher ist $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ ein linearer, Lorentz-invarianter Teilraum von \mathcal{F} . Die Bedingung (6.18) überträgt sich wie folgt in den Impulsraum:

$$[\alpha_3(\vec{k}) - \alpha_0(\vec{k})] \psi = 0, \quad \forall \vec{k}, \quad (6.19)$$

für alle $\psi \in \mathcal{F}_{\text{phys}}$. Dabei haben wir benutzt, dass $k_\mu \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) = 0$, $r=1,2$, und $k_\mu \varepsilon_0^\mu(\vec{k}) = -k_\mu \varepsilon_3^\mu(\vec{k}) = k$; wie aus (6.10) und (6.11) folgt.

Nun müssen wir ein wichtiges Lemma beweisen:

Lemma. Für alle $\psi \in \mathcal{F}_{\text{phys}}$ gilt,

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0. \quad (6.20)$$

Beweis. Zunächst beweisen wir (z. B. induktiv), dass der allgemeinste Zustand $\psi \in \mathcal{F}$, der (6.19) erfüllt, eine beliebige Linearkombination von Zuständen der Form

$$\psi = \prod_{j=1}^m \alpha_{r_j}^*(f_j) \prod_{l=1}^n (\alpha_3^*(g_l) - \alpha_0^*(g_l)) / 0 \rangle, \quad (6.21)$$

$r_j = 1$ oder 2 , $\forall j = 1, \dots, m$, ist. (Dies zeigt man mit Hilfe vollständiger Induktion in n !) Da

$$(\alpha_3^*(\vec{k}) - \alpha_0^*(\vec{k}))^* = \alpha_3(\vec{k}) - \alpha_0(\vec{k}), \text{ folgt, dass}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 0, \text{ es sei denn } n = 0. \quad (6.22)$$

Für $n = 0$ gilt:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle 0 | \prod_{j=m}^1 \alpha_{r_j}^*(\bar{f}_j) \prod_{j=1}^m \alpha_{r_j}^*(f_j) / 0 \rangle > 0, \quad (6.23)$$

da $r_j = 1$ oder 2 , $\forall j = 1, \dots, m$. Damit ist das Lemma bewiesen!

Aus (6.7), (6.17) und (6.18) folgt, dass

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \varphi \rangle = 0,$$

$\forall \psi, \varphi$ in $\mathcal{F}_{\text{phys.}}$, d.h. die Lorentz-Eichung ist für Erwartungswerte in Zuständen, die zu $\mathcal{F}_{\text{phys.}}$ gehören, erfüllt.

Die Lorentz-Eichung fixiert die Eichung von A_μ nicht vollständig. Ist X eine Funktion

auf M^4 , die die Wellengleichung

$$\square \chi(x) = 0 \quad (6.24)$$

erfüllt, so erfüllt $A^\mu(x) + (\partial^\mu \chi)(x)$ mit $A^\mu(x)$ die Lorentz-Eichbedingung. Diesem Umstand trägt unser Formalismus wie folgt Rechnung:

Sei $\psi \in \mathcal{F}_{\text{phys.}}$. Dann ist auch

$$\psi' = \left\{ 1 + [\alpha_3^*(f) - \alpha_0^*(f)] \right\} \psi \in \mathcal{F}_{\text{phys.}}$$

(siehe (6.21)), und es gilt $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass Erwartungswerte von Observablen in ψ und in ψ' identisch sind. Nun rechnen wir

$$\langle \psi' | A^\mu(x) | \psi' \rangle = \langle \psi | A^\mu(x) | \psi \rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2k}} \left\{ \sum_{r=0}^4 \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} [\alpha_r(\vec{k}), \alpha_3^*(f) - \alpha_0^*(f)] \right. \\ \left. + \text{h.c.} \right\} \langle \psi | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) | \psi \rangle,$$

wo

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3 k}{k^{3/2}} \left\{ f(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + \text{h.c.} \right\}, \quad (6.25)$$

und wir haben benutzt, dass

$$[a_r(\vec{k}), a_3^*(\vec{k}')] = \delta_{r3} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$[a_r(\vec{k}), a_0^*(\vec{k}')] = -\delta_{r0} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \text{ und}$$

$$\varepsilon_3^\mu(\vec{k}) + \varepsilon_0^\mu(\vec{k}) = \frac{1}{k} k^\mu.$$

Der Erwartungswert von A^μ in ϕ unterscheidet sich also von demjenigen in ϕ' durch eine Eichtransformation, χ , die nach (6.25) offensichtlich (6.24) genügt. Es ist leicht zu verstehen, wieso eichinvariante Observablen in ϕ und in ϕ' die gleichen Erwartungswerte haben: Solche Observablen sind Funktionale von $F^{\mu\nu}(x)$. Nach (6.7) haben wir, dass

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} \sum_{r=0}^3 \left\{ (k^\mu \varepsilon_r^\nu(\vec{k}) - k^\nu \varepsilon_r^\mu(\vec{k})) \times i(a_r^*(\vec{k}) e^{ikx} - a_r(\vec{k}) e^{-ik \cdot x}) \right\} \quad (6.26)$$

Nun gilt aber:

$$k^\mu \varepsilon_0^\nu - k^\nu \varepsilon_0^\mu = \delta_0^\nu k^\mu - \delta_0^\mu k^\nu, \text{ und}$$

$$k^\mu \varepsilon_3^\nu - k^\nu \varepsilon_3^\mu = -(\delta_3^\nu k^\mu - \delta_3^\mu k^\nu),$$

so dass

$$F^{\mu\nu}(x) = F_T^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} (\delta_0^\mu k^\nu - \delta_0^\nu k^\mu) \times \\ \times i ([a_3^*(\vec{k}) - a_0^*(\vec{k})] e^{ik \cdot x} - [a_3(\vec{k}) - a_0(\vec{k})] e^{-ik \cdot x}) \quad (6.27)$$

Wegen (6.19) hat der zweite Term auf der rechten Seite von (6.27) Erwartungswert 0 in allen Zuständen von $\mathcal{F}_{\text{phys.}}$. Man kann nun (6.21) auch so interpretieren, dass alle Zustände in $\mathcal{F}_{\text{phys.}}$ durch Anwendung von Polynomen in $F^{\mu\nu}$ auf das Vakuum $|0\rangle$ entstehen.

Wenn wir von der Lagrange-Dichte (6.6) ausgehen, erhalten wir für den Hamilton-(Energie-)Operator H den Ausdruck

$$H = \int d^3k \left\{ \sum_{r=1}^3 k(a_r^*(\vec{k})a_r(\vec{k}) - a_0^*(\vec{k})a_0(\vec{k})) \right\} \quad (6.28)$$

Benutzt man nun, dass

$$a_3^*(\vec{k})a_3(\vec{k}) - a_0^*(\vec{k})a_0(\vec{k}) \\ = a_3^*(\vec{k})(a_3(\vec{k}) - a_0(\vec{k})) + (a_3^*(\vec{k}) - a_0^*(\vec{k}))a_0(\vec{k}), \quad (6.29)$$

so findet man wegen (6.19)

$$\langle \psi, H \psi \rangle = \left\langle \psi, \int d^3k \sum_{r=1}^2 k a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) \psi \right\rangle, \quad (6.30)$$

d.h. nur die transversalen Feldoszillatoren tragen zur Energie von Zuständen bei. Dies gilt auch für Erwartungswerte, wie $\langle \psi, e^{itH} \psi \rangle$ und für die anderen Erzeugenden von Poincaré Transformationen.

Damit haben wir den sog. Gupta - Bleuler Formalismus zur covarianten Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes diskutiert.

Es bleibt nun die Aufgabe, die invarianten Distributionen des Vektorpotentials $A_\mu(x)$ zu berechnen. Aus (6.7), (6.12) und (6.13) ergibt sich sofort, dass

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = -g^{\mu\nu} i \Delta^+(x-y) \equiv D^{\mu\nu+}(x-y) \quad (6.31)$$

$$\langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \} | 0 \rangle = -g^{\mu\nu} i \Delta_F(x-y) \quad (6.32)$$

Im Impulsraum also

$$D_F^{\mu\nu}(k) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{A}^\mu(k) \hat{A}^\nu(-k) \} | 0 \rangle = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i0} \quad (6.33)$$

Schliesslich

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | [A^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle &= [A^\mu(x), A^\nu(y)] \\
 &= -g^{\mu\nu} i\Delta(x-y) \\
 &\equiv D^{\mu\nu}(x-y). \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $A^\mu(x)$ ein lokales Feld ist.

Das ist in der in QM II diskutierten "naiven Quantisierung" des e.m. Feldes, (Coulomb Eichung), nicht der Fall. Wichtig ist aber nur, dass $F^{\mu\nu}(x)$ ein lokales Feld ist. Da $F^{\mu\nu}$ eichinvariant ist, ist dies in jeder korrekten Quantisierung der Fall.

Es ist interessant, $D_F^{\mu\nu}$ in verschiedene Beiträge zu zerlegen und den Zusammenhang zur Coulomb-Eichung explizit herzustellen. Wegen (6.9) und (6.10), und (6.12), (6.13), gilt

$$\begin{aligned}
 D_F^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{k^2 + i0} \left\{ \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(k) \varepsilon_r^\nu(k) \right\} \\
 &+ \frac{1}{k^2 + i0} \frac{[k^\mu - (k \cdot n)n^\mu][k^\nu - (k \cdot n)n^\nu]}{(k \cdot n)^2 - k^2} \\
 &- \frac{1}{k^2 + i0} n^\mu n^\nu
 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Der erste Term, $\tau D_F^{\mu\nu}(k)$, ist identisch mit dem Propagator in der Coulomb-Eichung; (Propagation transversaler, also physikalischer Photonen). Die zwei letzten Terme können wie folgt zusammengefasst werden:

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \tau D_F^{\mu\nu}(k) + c D_F^{\mu\nu}(k) + R D_F^{\mu\nu}(k), \quad (6.36)$$

wo

$$c D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2 - k^2} = \delta_0^\mu \delta_0^\nu \frac{1}{|\vec{k}|^2} \quad (6.37)$$

und

$$R D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\frac{k^\mu k^\nu - (k \cdot n)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{|\vec{k}|^2} \right] \quad (6.38)$$

$c D_F^{\mu\nu}(k)$ beschreibt ein statisches Coulomb-Feld,

dann

$$c D_F^{\mu\nu}(x) = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \delta(x^0).$$

Der letzte Ausdruck zerfällt in Terme, die entweder proportional zu k^μ oder zu k^ν (oder zu $k^\mu k^\nu$) sind. Daher ist

$$\int d^4x \int d^4y j_\mu(x) R D_F^{\mu\nu}(x-y) \tilde{j}_\nu(y) = 0,$$

falls j und \tilde{j} erhaltene Ströme sind, also der Kontinuitätsgleichung genügen. Das wird in der QED immer der Fall sein. Der Term $R D^{\mu\nu}_F$ kann also vergessen werden! Die Glv. (6.36) und (6.37) zeigen dann die Äquivalenz des Gupta - Bleuler Formalismus mit denjenigen von QM II in einer Theorie wo alle elektrischen Ströme erhalten sind, etwa der QED.

Es gibt manigfache weitere Quantisierungen des freien e.m. Feldes, in denen andere Eichbedingungen benutzt werden. Wichtig ist nur, dass

$$\int d^4x \int d^4y j_\mu(x) D^{\mu\nu}_F(x-y) \tilde{j}_\nu(y)$$

unabhängig von der benutzten Eichung, E , ist, falls j und \tilde{j} erhaltene Ströme sind.

8) Spin und Statistik; P, C und T; PCT.

Wir zeigen nun, dass ein nach der Fermi-Statistik quantisiertes Skalarfeld, $\varphi(x)$, ein nach der Bose-Statistik quantisiertes Dirac Feld $\psi(x)$, allgemeiner ein nach der Bose-Statistik quantisiertes Feld mit halbzahligem Spin, etc. nicht lokal sein können.

Wir beginnen mit dem Skalarfeld von Kapitel 5).

Wir nehmen an, dass, im Gegensatz zu (5.41)

$$\begin{aligned} \{a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')\} &= \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \\ \{a^\#(\vec{p}), a^\#(\vec{p}')\} &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Es soll dabei bleiben, dass $a(\vec{p})|0\rangle = \vec{0}, \forall \vec{p}$, und $\varphi(x)$ sei weiterhin durch (5.47) gegeben.

Dann folgt sofort, dass

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = i \Delta^+(x-y). \tag{8.2}$$

Dies ist aus Gründen der relativistischen Invarianz der Theorie unabdingbar; (8.2) ist eine

unvermeidliche Konsequenz der Darstellungstheorie von \bar{P}_+^\dagger !) Eine einfache Rechnung, in welcher wir (8.1) benützen, zeigt nun, dass

$$\begin{aligned}\{\varphi(x), \varphi(y)\} &= \langle 0 | \{\varphi(x), \varphi(y)\} | 0 \rangle \\ &= i \Delta^+(x-y) + i \Delta^+(y-x) \quad (8.3)\end{aligned}$$

ist. Wir zeigen, dass die rechte Seite für räumlich getrennte x und y nicht verschwindet.

Wegen der Lorentz-Invarianz von Δ^+ dürfen wir annehmen, dass $x^0 = y^0$ ist. Dann folgt

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} 2 \cos(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) \quad (8.4)$$

Die rechte Seite fällt zwar exponentiell schnell nach 0 ab, wenn $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$ (Payley-Wiener Theorem), aber da $\omega(\vec{p})$ und $\cos(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}))$ gerade in \vec{p} sind verschwindet sie nicht identisch in $\vec{x} - \vec{y}$! Man könnte sich nun fragen, ob vielleicht doch $[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$, für $(x-y)^2 < 0$.

Wegen (8.1) ist $[\varphi(x), \varphi(y)]$ nicht mehr ein Vielfaches des Einheitsoperators. Deswegen genügt es nun nicht mehr $\langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle$ auszurechnen und zu zeigen, dass diese Distribution verschwindet, wenn $(x-y)^2 < 0$. Als Übung zeige man, dass der Erwartungswert von $[\varphi(x), \varphi(y)]$ für $(x-y)^2 < 0$ in einem Einzelchenzustand nicht verschwindet.

Die eben durchgeführte Untersuchung überträgt sich in natürlicher Weise auf das elektromagnetische Feld, obwohl die Rechnungen etwas komplizierter werden; (man betrachte $\langle 0 | \{F^{\mu\nu}(x), F^{\lambda\rho}(y)\} | 0 \rangle$, wo $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, und A^μ mit Antikommutatoren quantisiert werde).

Nun wenden wir uns dem Dirac Feld zu.

Wir wollen die Anti-Viertauschungsrelationen (6.49)–(6.52) durch Vertauschungsrelationen ersetzen. Dann finden wir nach (6.57), (6.57'), resp. (6.92)

$$\langle 0 | [\bar{\psi}(y), \psi(x)] | 0 \rangle = (-i \partial_x - m) [\bar{i} \Delta^+(y-x) + i \Delta^+(x-y)]$$

(8.5)

Wir haben schon gezeigt, dass die Distribution

$$i (\Delta^+(x-y) + \Delta^+(y-x))$$

für $(x-y)^2 < 0$ nicht identisch verschwindet

und das bleibt auch nach Anwendung von
 $(-i \partial_x - m)$ auf diese Distribution so.

Diese Betrachtungen kann man auf (massive)
Felder von beliebigem Spin ausdehnen. Die Zweipunkt-funktion eines chiralen Feldes $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\beta_1 \dots \beta_r}$
ist proportional zu

$$\int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) p^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \hat{p}_{\beta_1}^{\gamma_1} \dots \hat{p}_{\beta_s}^{\gamma_s} e^{ip(x-y)}$$

$$= \prod_{j=1}^r (-i \vec{\sigma} \cdot \partial_x)^{\alpha_j \dot{\alpha}_j} \prod_{l=1}^s (-i \hat{\vec{\sigma}} \cdot \partial_x)^{\gamma_l \dot{\beta}_l} \delta_{\alpha_j \beta_l} i \Delta^+(x-y)$$

$$\equiv D_x^{\frac{\gamma \dot{\alpha}}{\beta}} i \Delta^+(x-y).$$

$$P^{\alpha \beta} = (p_0 \sigma_0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\alpha \beta}, \quad \hat{P}_{\dot{\alpha} \dot{\beta}} = (p_0 \sigma_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\dot{\alpha} \dot{\beta}}$$

Daraus folgt

$$\langle 0 | [\varphi_{\frac{\delta}{\beta}}^{\frac{\alpha}{\beta}}(y)^*, \varphi_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\alpha}{\beta}}(x)]_+ | 0 \rangle$$

$$= D_{x \frac{\delta}{\beta} \beta}^{\frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha}{\beta}} \left[i \Delta^+(x-y) \pm (-1)^{r+s} i \Delta^+(y-x) \right]$$

Diese Distribution verschwindet für $(x-y)^2 < 0$,

falls $\pm (-1)^{r+s} = -1$; (andernfalls verschwindet sie nicht für alle $x-y$, mit $(x-y)^2 < 0$!)

Also müssen wir für $r+s$ gerade mit Kommutatoren, für $r+s$ ungerade mit Anti-Kommutatoren quantisieren, falls wir die Lokalität nicht verletzen wollen.

Nun besprechen wir die diskreten Symmetrien P , C und T . Für $A^\mu(x)$ ist die Wirkungsweise von P , C und T wohlbekannt:

$$A_p^\circ(x) = A^\circ(\hat{x}), \quad \vec{A}_p(x) = -\vec{A}(\hat{x})$$

$$A_C^\mu(x) = -A^\mu(-x) \quad (8.6)$$

$$A_T^\circ(x) = -A^\circ(-\hat{x}), \quad \vec{A}_T(x) = \vec{A}(-\hat{x}).$$

Für Dirac Spinothen haben wir P schon diskutiert.

Diese Operation wurde bis dahin mit \mathbb{P} bezeichnet.

Sie ordnet, wie wir gelernt haben, $\psi(x)$

$$\psi_p(x) = \gamma_p \gamma^0 \psi(\vec{x}), \quad |\gamma_p| = 1 \quad (8.7)$$

zu.

Die Ladungskonjugation $\psi \rightarrow \psi_c$ soll so gewählt werden, dass, falls ψ die Gl.

$$(i\gamma - eA - m) \psi = 0 \quad (8.8)$$

erfüllt, ψ_c die Gl.

$$(i\gamma + eA - m) \psi_c = 0 \quad (8.9)$$

erfüllt. Man zeigt durch einfache Manipulationen an (8.8), dass (8.9) für

$$\psi_c = \gamma_c C \bar{\psi}^T, \quad \text{mit} \quad (8.10)$$

$$C = i\gamma^2 \gamma^0, \quad |\gamma_c| = 1$$

erfüllt ist. Schliesslich definiert man

$$\psi_T(t, \vec{x}) = \gamma_7 A \psi(-t, \vec{x}), \quad \text{mit} \quad (8.11)$$

$$A = i\gamma^1 \gamma^3 = -i\gamma^5 C, \quad |\gamma_7| = 1$$

wie man aus (8.6) und (8.8) schliessen kann.

Als Beispiel verifizieren wir, dass für ψ_C wie in (8.10) definiert (8.9) gilt.

Zur Definition von C: Wir gehen von der Dirac

Gl.

$$(i \not{D} - e \not{A} - m) \psi = 0$$

aus. Daraus folgt

$$\psi^* \stackrel{\leftarrow}{(-i \not{D} - e \not{A} - m)} = 0$$

$$\Rightarrow \psi^* \stackrel{\leftarrow}{(-i \not{D} - e \not{A} - m)} \gamma^0 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\psi} \stackrel{\leftarrow}{(-i \not{D} - e \not{A} - m)} = 0 \quad | \quad {}^T$$

$$\Rightarrow (-i \partial_0 \gamma^0 + i \partial_1 \gamma^1 - i \partial_2 \gamma^2 + i \partial_3 \gamma^3 - e A_0 \gamma^0 + e A_1 \gamma^1 - e A_2 \gamma^2 + e A_3 \gamma^3 - m) \bar{\psi} {}^T = 0$$

Wir multiplizieren von links mit γ^0 . Daraus folgt:

$$(-i \partial_0 \gamma^0 - i \partial_1 \gamma^1 + i \partial_2 \gamma^2 - i \partial_3 \gamma^3 - e A_0 \gamma^0 - e A_1 \gamma^1 + e A_2 \gamma^2 - e A_3 \gamma^3 - m) \gamma^0 \bar{\psi} {}^T = 0$$

$$-e A_0 \gamma^0 - e A_1 \gamma^1 + e A_2 \gamma^2 - e A_3 \gamma^3 - m) \gamma^0 \bar{\psi} {}^T = 0$$

Nun multiplizieren wir von links mit γ^2 und ziehen γ^2 nach rechts durch. Dann erhalten wir:

$$(i\partial + eA - m)\varphi_2 \varphi_0 \bar{\varphi}^T = 0$$

Wir müssen also

$$\varphi_C = (\text{Phase}) \times \varphi_2 \varphi_0 \bar{\varphi}^T$$

setzen!

Es gilt nun der Satz, dass man für freie Felder P und C unitär und T anti-unitär implementieren kann. Dieser Satz beruht auf einigen Identitäten für die Zweipunktfunktionen.

$$\langle 0 | \varphi_X^*(x) \varphi_X(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi^*(x) \varphi(y) | 0 \rangle,$$

für $X = P$ oder C , und

$$\langle 0 | \varphi_P^*(x) \varphi_T(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi^*(y) \varphi(x) | 0 \rangle$$

Für freie Felder folgt daraus die Invarianz

aller Vakuum Erwartungswerte von $\varphi, \bar{\varphi}$ unter

$\varphi \rightarrow \varphi_X, \bar{\varphi} \rightarrow \bar{\varphi}_X, X = P \text{ oder } C$, und

daraus folgt die unitäre Implementierbarkeit

von P und C ; (siehe auch Übungen und Kap. 9, (9.25).)

Ähnlich argumentiert man für T .

Man kann sich ohne grosse Schwierigkeiten überlegen, dass T nur anti-unitär implementiert werden kann, falls der Energie-Operator positiv sein soll.

Tost hat gezeigt, dass das Produkt

$$\Theta = P \cdot C \cdot T$$

für alle lokalen Feldtheorien eine anti-unitäre Symmetrie ist. Sein Beweis wird im nächsten Kapitel angedeutet. Für weitere Details betreffend P, C und T wende man sich an die Lehrbuchliteratur.

9. Eine allgemeine Formulierung der Quantenfeldtheorie.

In diesem Kapitel wollen wir eine allgemeine Formulierung der QFT vorstellen, deren Züge durch die Theorie der freien Felder geprägt sind. Wir konzentrieren uns auf den Fall eines Skalarfeldes; die Ausdehnung auf Felder mit Spin ist "offensichtlich".

Eine skalare Quantenfeldtheorie besteht aus einem Hilbertraum, \mathcal{H} , einer unitären Darstellung, U , der quantenmechanischen Poincaré Gruppe $\bar{\mathcal{P}}_+^\dagger$, einem Feldoperator φ und einem dichten Teilraum D in \mathcal{H} , die zusammen acht Postulate genügen.

(W1) \mathcal{H} ist ein separabler Hilbertraum, auf welchem eine stetige, mit der Darstellung, U , von $\bar{\mathcal{P}}_+^\dagger$ statt findet.

In der allgemeinen Theorie ist \mathcal{H} das Analogon

des in der Theorie freier Felder diskutierten Fockraumes \mathcal{F} . Wenn man \mathcal{U} auf die Untergruppe der Raum-Zeittransformationen restriktiert, schliesst man, dass

$$\mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{U}(1=1, \alpha)$$

eine stetige, unitäre Darstellung von \mathbb{R}^4 auf \mathcal{H} ist.

Die vier infinitesimalen Erzeugenden von $\{\mathcal{U}(\alpha); \alpha \in \mathbb{R}^4\}$ sind vertauschende, selbstadjungierte Operatoren $P_0 = H, P_1, P_2, P_3$; $P = (H, \vec{P})$ ist der Energie-Impuls Operator. Nach dem Spektraltheorem gilt

$$\mathcal{U}(\alpha) = e^{i\alpha \cdot P} = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\alpha \cdot p} dE_p, \quad (9.1)$$

wo E_p das Spektralmass ist.

(W2) Das Mass E_p auf \mathbb{R}^4 hat seinen Träger in abgeschlossenen Vorauslichtkegeln

$$\bar{V}_+ = \{p; p^2 \geq 0, p_0 \geq 0\}.$$

Diese Aussage ist äquivalent zur Forderung,
dass

$$H \geq 0, \quad H^2 - \vec{P}^2 \equiv M^2 \geq 0. \quad (9.2)$$

(W3) Es gibt einen eindeutigen Strahl

$\Omega = |0\rangle$ in \mathcal{H} so, dass

$$U(a)\Omega = \Omega, \quad \forall a \in \mathbb{R}^4.$$

Ω heißt Vakuum.

Aus dieser Forderung folgt, dass $E_{\{p=0\}}$ ein eindimensionaler Projektor (Projektor auf Ω) ist. Da $U(1,0)$ mit $E_{\{p=0\}}$ vertauscht ($\lambda p = p, \forall \lambda$, falls $p=0$), gilt

$$U(1,0)\Omega = \Omega, \quad \forall \lambda \in L_+^\uparrow.$$

Denn die triviale ist die einzige eindimensionale, unitäre Darstellung von L_+^\uparrow . Es folgt, dass

$$U(1,a)\Omega = \Omega, \quad \forall (1,a) \in P_+^\uparrow \quad (9.3)$$

(W4) Es gibt einen dichten Teilraum $D \subset \mathcal{H}$
und eine Abbildung φ vom Raum der
Testfunktionen, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, auf den Raum unbeschränkter Operatoren auf \mathcal{H} so, dass

(i) $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ist D in $D(\varphi(f))$ und
in $D(\varphi(f)^*)$, und $\varphi(f)^* \upharpoonright D = \varphi^*(\bar{f}) \upharpoonright D$;

($\varphi^* = \varphi$, falls φ ein reelles Skalarfeld ist).)

(ii) $\Omega \in D$, $\varphi(f)\Omega \subseteq D$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$.

(iii) Für jedes $\varphi \in D$ ist die Abbildung

$$f \mapsto \varphi(f)\varphi \in D$$

linear.

φ ist der Feldoperator und ist offenbar
eine operatorwertige Distribution. Aus (4), (ii)
schliessen wir, dass die Vakuumerwartungswerte

$$\langle \Omega, \varphi^{r_1}(f_1) \cdots \varphi^{r_n}(f_n) \Omega \rangle \quad (9.4)$$

für beliebiges $n < \infty$, f_1, \dots, f_n in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, wohldefiniert sind. Hier sind $r_1, \dots, r_n = \pm 1$,

$$\varphi^2 = \varphi, \varphi^{-1} = \varphi^*$$

210.

(W5) Für ψ_1 und ψ_2 in \mathcal{D} ist

$$f \mapsto \langle \psi_1, \varphi^r(f) \psi_2 \rangle, r = \pm 1,$$

eine temperierte Distribution.

(W6) Für jedes $(\lambda, \alpha) \in P_+^\uparrow$ gilt, dass

$$U(\lambda, \alpha) \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$$

und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt, dass

$$U(\lambda, \alpha) \varphi^r(f) U(\lambda, \alpha)^{-1} \varphi = \varphi^r(f_{(\lambda, \alpha)}) \varphi, \quad (9.5)$$

wo

$$f_{(\lambda, \alpha)}(x) = f(\lambda^{-1}(x - \alpha)).$$

Formal können wir (9.5) auch wie folgt schreiben

$$U(\lambda, \alpha) \varphi^r(x) U(\lambda, \alpha)^{-1} = \varphi^r(\lambda x + \alpha).$$

(W7) Wenn die Träger von f und von g räumlich getrennt sind, dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}$, dass

$$[\varphi^r(f), \varphi^r(g)] \varphi = 0 \quad (9.6)$$

(Lokale Kommutativität oder "Mikrokausalität")

(W8) Man kann \mathcal{D} als den Raum aller endlichen
Linearkombinationen von Vektoren der Form
 $\varphi^{r_1}(f_1) \cdots \varphi^{r_n}(f_n) \Omega$
auffassen.

Diese Forderung bedeutet, dass \mathcal{H} nicht zu gross ist, d.h. dass das Feld φ genügt, die physikalischen Zustände aus dem Vakuum zu erzeugen.
 In einer QFT mit mehreren Feldern ist (W8) natürlich geeignet zu modifizieren.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die bis anhin diskutierten freien Felder alle Forderungen (W1)-(W8) erfüllen. Es geht nun darum, aus diesen Forderungen ein paar allgemeine Folgerungen herzuleiten. Das geschieht am besten durch Betrachtung der Vakuum Erwartungswerte, oder Wightman Distributionen:

$$W_n(r_1, f_1, \dots, r_n, f_n) = \langle \Omega, \varphi^{r_1}(f_1) \cdots \varphi^{r_n}(f_n) \Omega \rangle \quad (9.7)$$

Wegen (4) und (5) ist W_n in jedem Argument stetig. Also ist W_n wegen des "nuklearen

Theorems" eine temperierte Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$. Formal gilt

$$W_n(r_1, x_1, \dots, r_n, x_n) = \langle \varrho, \prod_{\alpha=1}^n \varphi^{r_\alpha}(x_\alpha) \varrho \rangle.$$

Wegen (3) und (6) ist W_n eine Poincaré-invariante Distribution. Insbesondere ist W_n translationsinvariant. Es gibt daher eine Distribution $W_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n-4})$ so, dass

$$W_n(r_1, x_1, \dots, r_n, x_n) = W_n(r_1, x_2 - x_1, \dots, r_{n-1}, x_n - x_{n-1}, r_n) \quad (9.8)$$

Im Folgenden spielen die Variablen r_1, \dots, r_n keine Rolle und sind deswegen weggelassen.

Wir setzen $x = x_1, x_2 = x + \xi_1, x_3 = x + \xi_1 + \xi_2, \dots, x_n = x + \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}$,

$$f_x(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = f(x, x + \xi_1, \dots, x + \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}).$$

Dann gilt nach (9.8)

$$W_n(f) = \int d^4x W_n(f_x).$$

Sei

$$V_+^{(n)} = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{4n} : p_i \in V_+, \forall i\}.$$

213.

Wir definieren die Vorwärtsröhre \mathcal{T}_n als

$$\mathcal{T}_n = \mathbb{R}^{4n} + i V_+^{(n)}$$

Sei $\hat{\varphi}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ip \cdot x} \varphi(x) d^4x$.

Dann ist

$$\hat{w}_n(p_1, \dots, p_n) = \langle \Omega, \hat{\varphi}(p_1) \dots \hat{\varphi}(p_n) \Omega \rangle. \quad (9.9)$$

(-) Wegen der Spektralbedingung gilt

$$q_{k-1} \equiv \sum_{j=k}^n p_j \in \overline{V_+}, \quad \forall k. \quad (9.10)$$

$$q_0 = 0$$

Mit den oben eingeführten Notationen haben wir

$$\begin{aligned} w_n(x_1, \dots, x_n) &= \int_{j=1}^n \pi d^4 p_j e^{ip_j x_j} \hat{w}_n(p_1, \dots, p_n) \\ &= \int_{j=1}^n \pi d^4 p_j e^{ix \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) + \sum_{k=1}^{n-1} i \beta_k \left(\sum_{i=k+1}^n p_i \right)} \\ &\quad \hat{w}_n(p_1, \dots, p_n) \\ &= w_n(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \\ &= \int_{j=1}^{n-1} \pi d^4 q_j e^{i \beta_j q_j} \hat{w}_n(q_1, \dots, q_{n-1}) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\sum_1^n p_j = 0$ auf dem Träger von \hat{W}_n , und

$$\text{supp } \hat{W}_n \subseteq \bar{V}_+^{(n)}$$

Falls nun $z_j = \xi_j + i\eta_j$, $\eta_j \in V_+$, $\forall j$,

dann ist

$$e^{iz_j \cdot q_j} = e^{i\xi_j \cdot q_j} e^{-\eta_j \cdot q_j}.$$

Da $q_j \in \bar{V}_+$, $\eta_j \in V_+$, fällt $e^{-\eta_j \cdot q_j}$ im Unendlichen auf dem Träger von \hat{W}_n exponentell ab.

Daher ist

$$W_n(z_1, \dots, z_{n-1}) = \int_{j=1}^{n-1} \pi d^4 q_j e^{i z_j \cdot q_j} \hat{W}_n(q_1, \dots, q_{n-1}) \quad (9.11)$$

für $z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathcal{T}_{n-1}$ wohldefiniert und analytisch.

Wegen Forderung (6) gilt

$$W_n(\lambda \xi_1, \dots, \lambda \xi_{n-1}) = W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \quad \forall \lambda \in L_+^\uparrow, \quad (9.12)$$

und diese Invarianz-Eigenschaft setzt sich auf ganz \mathcal{T}_{n-1} fort.

Wir definieren die komplexe Lorentzgruppe $L_+(\mathbb{C})$ als den Raum aller komplexen 4×4 Matrizen mit Determinante 1 mit der Eigenschaft, dass

$$\Lambda z \cdot \Lambda z' = z \cdot z', \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}^4, \quad (9.13)$$

$$(\text{wo } z \cdot z' = z^0 z'^0 - \vec{z} \cdot \vec{z}').$$

Der Satz von Bargmann, Hall und Nightman besagt nun, dass auf Grund von (9.12) W_n zu einer eindeutig definierten, analytischen Funktion auf

$$\mathcal{T}_{n-1}^{\text{ext.}} \equiv \{(z_1, \dots, z_{n-1}); (\Lambda^{-1} z_1, \dots, \Lambda^{-1} z_{n-1}) \in \mathcal{T}_{n-1}, \Lambda \in L_+(\mathbb{C})\} \quad (9.14)$$

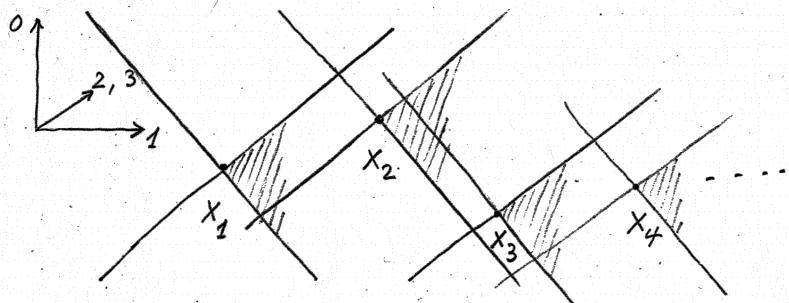
fortgesetzt werden kann, und auf $\mathcal{T}_{n-1}^{\text{ext.}}$ (9.12) erfüllt ist.

$\mathcal{T}_{n-1}^{\text{ext.}}$ enthält reelle Punkte, die sog. Jost-Punkte: $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathcal{T}_{n-1}^{\text{ext.}} \cap \mathbb{R}^{4n-4}$ dann

und nur dann, wenn alle Vektoren der Form

$$Z = \sum_1^{n-1} \lambda_j z_j, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum \lambda_j > 0$$

raumartig sind.



Die Matrix $M_{\pi/2} \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist ein Element von $L_+(\mathbb{C})$,

(Boost um den imaginären Boost-Winkel $i\frac{\pi}{2}$ in der (01) -Ebene), und bildet die in der Figur angedeuteten Jost Punkte ($z_1 = x_2 - x_1, z_2 = x_3 - x_2, \dots, z_{n-1} = x_n - x_{n-1}$) offensichtlich auf Punkte in der Vorwärtsröhre $\mathcal{T}_{n-1}^{\text{ext}}$ ab. Nun benutze man (9.14). Falls $(x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$ ein Jost Punkt ist, dann ist $x_j - x_i$ raumartig, $\forall i \text{ und } j$. Wegen der lokalen Kommutativität gilt daher

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = W_n(x_n, \dots, x_1), \text{ d.h.}$$

$$W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = W_n(-\xi_{n-1}, \dots, -\xi_1). \quad (9.15)$$

Da $-\mathbb{1} \in L_+(\mathbb{C})$, folgt aus (9.15) und (9.14), dass

$$W_n(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n-1}) = W_n(\bar{\xi}_{n-1}, \dots, \bar{\xi}_1).$$

Da W_n auf $\mathcal{T}_{n-1}^{\text{ext}}$ analytisch ist, und $\mathcal{T}_{n-1}^{\text{ext}}$ die Jost Punkte enthält, folgt

$$W_n(z_1, \dots, z_{n-1}) = W_n(z_{n-1}, \dots, z_1),$$

$$\nexists (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathcal{T}_{n-1}^{\text{ext}}.$$

Falls $z_j = \xi_j + i\eta_j$, $\eta_j \in V_+$, $\forall j$, dann

konvergiert $W_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ gegen $W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$

und $W_n(z_{n-1}, \dots, z_1)$ gegen $W_n(\xi_{n-1}, \dots, \xi_1)$,

für $\eta_j \rightarrow 0$ in V_+ , $\forall j$. Also folgt

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = W_n(-x_n, \dots, -x_1),$$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{4n}$. Mit den Variablen r_1, \dots, r_n

lautet diese Identität

$$W_n(r_1, x_1, \dots, r_n, x_n) = W_n(r_n, -x_n, \dots, r_1, -x_1) \quad (9.16)$$

Wir definieren nun einen Operator Θ durch

die Gln. $\Theta \Omega = \Omega$ und

$$\Theta \varphi^{r_1}(f_1) \cdots \varphi^{r_n}(f_n) \Omega = \varphi^{-r_1}(\bar{f}_1) \cdots \varphi^{-r_n}(\bar{f}_n) \Omega, \quad (9.17)$$

wo $\check{f}(x) = f(-x)$ und \bar{f} die zu f komplexe konjugierte Testfunktion ist. Formal also

$$\Theta \varphi^{r_1}(x_1) \cdots \varphi^{r_n}(x_n) \Omega = \varphi^{-r_1}(-x_1) \cdots \varphi^{-r_n}(-x_n) \Omega.$$

Nun betrachten wir das Skalarprodukt zweier solcher Vektoren:

$$\langle \theta \varphi^{s_1}(y_1) \dots \varphi^{s_\ell}(y_\ell) \Omega, \theta \varphi^{r_1}(x_1) \dots \varphi^{r_k}(x_k) \Omega \rangle$$

$$= \langle \varphi^{-s_1}(-y_1) \dots \varphi^{-s_\ell}(-y_\ell) \Omega, \varphi^{-r_1}(-x_1) \dots \varphi^{-r_k}(-x_k) \Omega \rangle$$

$$= W_{k+\ell}(s_\ell, -y_\ell, \dots, s_1, -y_1, -r_1, -x_1, \dots, -r_k, -x_k)$$

(9.16)

$$= W_{k+\ell}(-r_k, x_k, \dots, -r_1, x_1, s_1, y_1, \dots, s_\ell, y_\ell)$$

$$= \langle \varphi^{r_1}(x_1) \dots \varphi^{r_k}(x_k) \Omega, \varphi^{s_1}(y_1) \dots \varphi^{s_\ell}(y_\ell) \Omega \rangle$$

(9.18)

Wegen Forderung (8) gilt also für alle Vektoren

ψ, x in \mathcal{D}

$$\langle \theta \psi, \theta x \rangle = \langle x, \psi \rangle, \quad (9.19)$$

und wegen (9.17) $\theta(x\psi) = \bar{x}\psi$. Offensicht-

lich ist θ anti-lineär. Daher folgt mit (9.19),

dass θ ein anti-unitärer Operator auf \mathcal{H} ist.

Wegen (9.17) gilt

$$\theta \varphi^r(f) \theta^{-1} = \varphi^{-r}(\bar{f}), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4). \quad (9.20)$$

Das zeigt, dass θ die physikalische Bedeutung der PCT Operation hat.

In jeder lokalen, relativistischen QFT ist die PCT Operation also durch einen anti-unitären Operator Θ auf \mathcal{H} implementiert. Das ist das berühmte PCT Theorem, (in dieser Allgemeinheit von Fost bewiesen).

Mit ähnlichen (tatsächlich etwas einfacheren) Argumenten kann man auch das allgemeine Spin-Statistik Theorem von Haag und Zimin beweisen; (siehe Vorlesung).

Jetzt wollen wir die sog. Källen-Lehmann Darstellung der Zweipunktfunktion

$$W_2(x, y) = W_2(x-y)$$

besprechen. Da $\langle \varphi(f)\Omega, \varphi(f)\Omega \rangle \geq 0$ ist, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, haben wir

$$W_2(\bar{f}, f) = \int d^4 p \hat{W}_2(p) |f(p)|^2 \geq 0, \quad (9.21)$$

d.h. $\hat{W}_2(p) d^4 p$ ist ein positives Mass. Weiter gilt nach (9.12), dass $\hat{W}_2(\lambda p) = \hat{W}_2(p)$, $\forall \lambda \in L_+^\uparrow$.

Wegen der Spektrumssbedingung (Forderung (2)) ist der Träger von $\hat{W}_2(p)$ im abgeschlossenen Vorwärtskegel \overline{V}_+ enthalten.

Satz (Källen - Lehmann Darstellung)

Ein positives Mass $\hat{W}_2(p) d^4p$ mit den oben erwähnten Eigenschaften ist von der Form

$$\hat{W}_2(p) d^4p = \int_0^\infty d\rho(m^2) \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) d^4p,$$

wo $d\rho$ ein positives Mass auf $[0, \infty)$ ist.

Im Ortsraum lautet diese Aussage also

$$W_2(x) = \int_0^\infty d\rho(m^2) i\Delta_m^+(x) \quad (9.22)$$

wo $i\Delta_m^+$ die Zweipunkt Funktion eines freien Feldes mit Masse m ist. (Siehe (5.48), (5.51)!). Der Beweis der Källen - Lehmann Darstellung beruht auf dem Spektraltheorem für den Operator $M^2 = H^2 - \vec{p}^2$ und der Eindeutigkeit der Lorentz - invarianten Masse

auf den Massenschalen V_m^+ . (Siehe z.B. Reed & Simon, Vol. II.)

Eine QFT besitzt einen isolierten Einzelparticlen Zustand der Masse m_0 , falls $d\rho(m^2)$ von der Form

$$d\rho(m^2) = Z \delta(m^2 - m_0^2) dm^2 + \int_{(m_0+\mu)^2}^{\infty} d\rho'(m^2) \quad (9.23)$$

Aus der Källen-Lehmann Darstellung für $\langle W_2 \rangle$

folgt die Spektraldarstellung für den Vakuumerwartungswert des Kommutators:

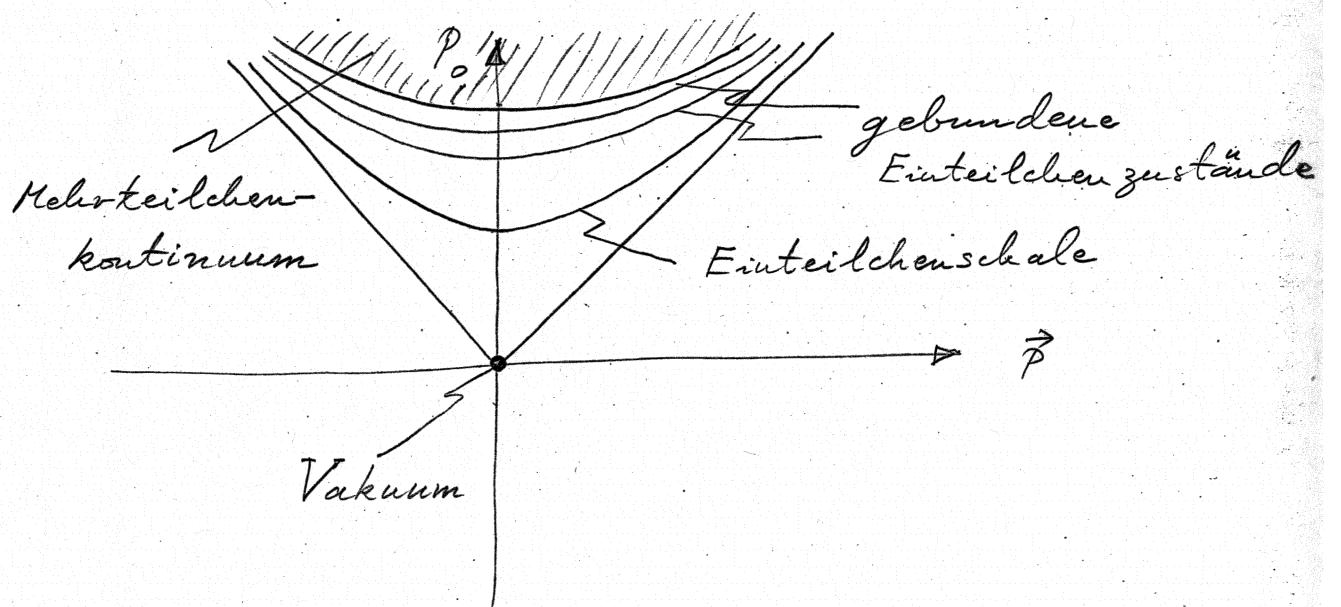
$$\langle \mathcal{S}_2, [\varphi(x), \varphi(y)] \mathcal{S}_2 \rangle = \int_0^{\infty} d\rho(m^2) i\Delta_m(x-y), \quad (9.24)$$

wo $i\Delta_m(x)$ die in (3.27), (3.36) berechnete

Kommutatorfunktion eines freien Feldes der Masse m ist. In einer lokalen, relativistischen QFT mit Wechselwirkung gilt aber nie, dass

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \langle \mathcal{S}_2, [\varphi(x), \varphi(y)] \mathcal{S}_2 \rangle.$$

Ein typisches Energie - Impuls Spektrum für eine relativistische QFT mit Einzteilchen Zuständen sieht wie folgt aus:



Es ist wichtig, abschliessend zu bemerken, dass man eine QFT vollständig aus ihren Vakuusexpektationswerten $W_n(x_1, \dots, x_n)$ rekonstruieren kann. (Die Postulate (1) - (8) werden dazu in Postulate für die W_n 's übersetzt.) Das ist der Wightman'sche Rekonstruktionsatz. Angewandt auf das (verallgemeinerte) freie Feld, sagt dieser Satz, dass dieser vollständig durch $W_2(x)$ bestimmt ist. Denn für freie Felder ist

$$\mathcal{W}_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\text{Paarungen, } P} \prod_{i=1}^n \mathcal{W}_2(x_{P(2i-1)}, x_{P(2i)}) \quad (9.25)$$

Der Beweis dieser Gleichung sei dem Leser als Übungsaufgabe empfohlen. (Don't panic: It isn't hard!)

10. Die LSZ Reduktionsformeln.

In diesem Kapitel wollen wir die in Kap. 9 ange deutete allgemeine Theorie quantisierter Felder so ergänzen, dass sie uns gestattet die Streu theorie im Rahmen einer relativistischen QFT zu entwickeln. Dies wird uns auf eine allgemeine Formel zur Berechnung von Streuamplituden führen, die für das Studium von Elementarteilchen-Streuprozessen zentral ist.

Wir beschränken uns im allgemeinen Teil auf die Behandlung eines einzigen, reellen Skalarfeldes, q. Der allgemeine Fall hat die gleiche logische

Struktur.

Die Grundidee der Streutheorie ist, dass vor und nach langen Zeiträumen ein physikalischer System (bei Temperatur 0 und Dichte 0) sich wie ein System (wechselwirkungs-) freier Teilchen verhält. In der relativistischen QFT werden im einfachsten Fall diese freien Teilchen durch ein freies Feld beschrieben. Wechselwirkende Teilchen werden durch das Feld φ beschrieben. Es ist also recht plausibel anzunehmen, dass

$$\varphi(t, \vec{x}) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Z^{1/2} \varphi_{in}(t, \vec{x}) \quad (10.1)$$

$$\varphi(t, \vec{x}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Z^{1/2} \varphi_{out}(t, \vec{x})$$

wo φ_{in} und φ_{out} freie Felder sind. Wir stossen unmittelbar auf folgende Fragen:

In welchem Sinne sind die Limiten in (10.1) zu verstehen? Wie berechnet man den Faktor $Z^{1/2}$?

Das Vakuum Ω ist ein Zustand des Systems, der gar keine Teilchen enthält und Poincaré-invariant ist. Deshalb soll gelten

$$|0\rangle_{\text{in}} = \Omega = |0\rangle_{\text{out}}. \quad (10.2)$$

Für φ_{in} und φ_{out} ist also Ω nicht vom Fock-vakuum $|0\rangle_{\text{in}}$ zu unterscheiden.

Sei $|p\rangle$ ein Zustand, der ein einziges, stabiles Teilchen mit Masse m_0 und Energie-Impuls-Vektor $p = (\sqrt{p^2 + m_0^2}, \vec{p})$ beschreibt. Ein solcher Zustand erfährt keine Streuung, d.h.

$$|p\rangle_{\text{in}} = |p\rangle = |p\rangle_{\text{out}}. \quad (10.3)$$

Nun benützen wir die Källen-Lehmann-Darstellung für $\langle \Omega, \varphi(x) \varphi(y) \Omega \rangle$. Sei E_1 der Projektator auf den Teilraum von \mathcal{H} , der orthogonal zu den Einteilchenzuständen ist. Dann gilt

^{*}) D.h. $|p\rangle = a_{\text{in}}^*(\vec{p})\Omega = a_{\text{out}}^*(\vec{p})\Omega$, wo a_{in}^* die Erzeugungsoperatoren zu φ_{in} sind.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}, \varphi(x) \varphi(y) \mathcal{L} \rangle &= \langle \mathcal{L}, \varphi(x) \mathcal{L} \rangle \langle \mathcal{L}, \varphi(y) \mathcal{L} \rangle \\ &+ \int \langle \varphi(x) \mathcal{L} / p \rangle \langle p / \varphi(y) \mathcal{L} \rangle d^3 p \\ &+ \langle \varphi(x) \mathcal{L}, E_{\perp} \varphi(y) \mathcal{L} \rangle \quad (10.4) \end{aligned}$$

Ohne Verlust an Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $\langle \mathcal{L}, \varphi(x) \mathcal{L} \rangle = 0$; (man ersetze andernfalls $\varphi(x)$ durch $\varphi'(x) = \varphi(x) - \langle \mathcal{L}, \varphi \mathcal{L} \rangle$).

Der zweite Term auf der rechten Seite von (10.4) ist von der Form

$$\text{const. } i \Delta_{m_0}^+(x-y).$$

Vergleich von (10.4) mit der Källen-Lehmann-Darstellung (9.22), (9.23) zeigt, dass

$$\begin{aligned} \int \langle \varphi(x) \mathcal{L} / p \rangle \langle p / \varphi(y) \mathcal{L} \rangle d^3 p &= \sum_{m_0} i \Delta_{m_0}^+(x-y), \\ \text{und} \quad &\quad \infty \quad (10.5) \\ \langle \varphi(x) \mathcal{L}, E_{\perp} \varphi(y) \mathcal{L} \rangle &= \int d p' (m^2) i \Delta_m^+(x-y). \end{aligned}$$

$(m_0 + \mu)^2$

Falls die Felder φ_{in} und φ_{out} kanonische Vertauschungsrelationen erfüllen ("kanonisch normalisiert" sind), gilt mit (10.2), (10.3)

$$\int \langle \varphi_{as.}(x) \Omega | p \rangle \langle p | \varphi_{as.}(y) \Omega \rangle d^3p = i \Delta_m^+(x-y), \quad (10.6)$$

wo $as = in$ oder out . Vergleich mit (10.5) zeigt, dass

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x) \Omega | p \rangle &= Z^{1/2} \langle \varphi_{in}(x) \Omega | p \rangle \\ &= Z^{1/2} \langle \varphi_{out}(x) \Omega | p \rangle \end{aligned} \quad (10.7)$$

Wir nehmen daher an, dass

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t, \vec{x}) = Z^{1/2} \varphi_{out}^{\text{in}}(t, \vec{x}) \quad (10.8)$$

im Sinne von Matrix Elementen zwischen Zuständen, die man durch Anwendung von Polynomen in φ_{in} oder φ_{out} auf Ω erzeugen kann, (von Zuständen in D_{in} und/oder D_{out} also).

Die hier getroffenen Annahmen lassen sich

tatsächlich aus den Postulaten (1) - (8) von Kap. 9 und der Existenz eines isolierten Einzelchenzustandes herleiten. Das ist der Inhalt der sog. Haag - Ruelle Streutheorie, wobei eine bestimmte Form von (10.8) von Hepp aus der Haag - Ruelle Theorie hergeleitet wurde.

Die LSZ Asymptotenbedingung (10.8)

gestattet uns nun die Streuamplituden durch zeitgeordnete Vakuumserwartungswerte von φ anzudrücken; (LSZ Reduktionsformeln).

Wir erinnern an die Darstellung (3.38), (3.39) des freien reellen Skalarfeldes:

$$\varphi_{as}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^4 p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) \left\{ \alpha_{as}^*(\vec{p}) e^{ip \cdot x} + \alpha_{as}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \right\}, \quad (10.9)$$

wo "as" = "in" oder "out", und

$$\alpha_{as}^\#(\vec{p}) = \sqrt{2\omega(\vec{p})} \alpha_{as}^\#(\vec{p}), \quad \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2}$$

(α_{as}^* und α_{as} sind die von uns in Kap. 3 üblicher-

weise benützten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren); also

$$[\alpha_{as}(\vec{p}), \alpha_{as}^*(\vec{p}')]=2\omega(\vec{p})\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'), \quad (10.10)$$

$$[\alpha_{as}^*(\vec{p}), \alpha_{as}^*(\vec{p}')]=0.$$

Ein in-Zustand ($t \rightarrow -\infty$) von n Teilchen mit

Vierer-Impulsen q_1, \dots, q_n , ($q = (\omega(\vec{q}), \vec{q})$) wird durch

$$\prod_{j=1}^n \alpha_{in}^*(\vec{q}_j) \Omega \equiv |q_1, q_2, \dots, q_n\rangle_{in} \quad (10.11)$$

dargestellt. Dies ist ein bestimmter Zustand im Hilbert Raum \mathcal{H} der wechselwirkenden Theorie.

Ein out-Zustand ($t \rightarrow \infty$) von k Teilchen mit

Vierer-Impulsen p_1, \dots, p_k wird durch

$$\prod_{j=1}^k \alpha_{out}^*(\vec{p}_j) \Omega \equiv |p_1, p_2, \dots, p_k\rangle_{out} \quad (10.12)$$

dargestellt.

[Die normierbaren asymptotischen Zustände

erhält man dadurch, dass man $|q_1, q_2, \dots, q_n\rangle_{as}$

mit einer Impulsraum Wellenfunktion

$\hat{f}_n(q_1, \dots, q_n)$ ausschmiert:

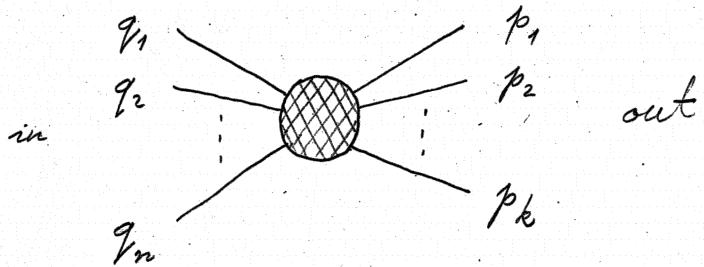
$$\langle \hat{f}_n \rangle_{as} = \int_{j=1}^n \prod_{j=1}^n d^4 q_j \Theta(q_{0j}) \delta(q_j^2 - m_0^2) \hat{f}_n(q_1, \dots, q_n) |q_1, q_2, \dots, q_n\rangle_{as}$$

Dann gilt

$$\langle \hat{g}_k | \hat{f}_n \rangle_{as} = \delta_{kn} \sqrt{n!} \int_{j=1}^n d^4 q_j \Theta(q_{0j}) \delta(q_j^2 - m_0^2) \overline{\delta \hat{g}_n(q_1, \dots, q_n)} \delta \hat{f}_n(q_1, \dots, q_n),$$

wo $\delta \hat{f}_n$ die symmetrisierte Version von \hat{f}_n ist.
Dabei ist $as = in$ oder out .]

Die Streuamplitude für den Streuprozess



ist natürlich durch

$$\langle p_1, \dots, p_k | q_1, \dots, q_n \rangle_{in} \quad (10.13)$$

gegeben. Diese wollen wir nun berechnen.

Für $q = (\omega(\vec{q}), \vec{q})$ gilt

$$d_{as}^*(\vec{q}) = \int d^3x e^{-iq \cdot x} \frac{1}{i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi_{as}(x) \quad (10.14)$$

$x^0 = t$

Mit (10.11) finden wir also

$$\begin{aligned}
 & \underset{\text{out}}{\langle} p_1, \dots, p_k / q_1, \dots, q_n \rangle_{\text{in}} \\
 &= \underset{\text{out}}{\langle} p_1, \dots, p_k / \alpha_{\text{in}}^*(\vec{q}_1) / q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}} \\
 &= \int_{x^0=t} d^3x e^{-iq \cdot x} \frac{1}{i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \underset{\text{out}}{\langle} p_1, \dots, p_k / \varphi_{\text{in}}(x) / q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{10.15}$$

Nun benutzen wir die Asymptotenbedingung (10.8):
Wir lassen in (10.15) $t \rightarrow -\infty$ streben. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \underset{\text{out}}{\langle} p_1, \dots, p_k / q_1, \dots, q_n \rangle_{\text{in}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-\frac{1}{2}} \int d^3x e^{-iq \cdot x} \frac{1}{i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \underset{\text{out}}{\langle} p_1, \dots / \varphi(x) / q_2, \dots \rangle_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{10.16}$$

Der Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung sagt uns, dass

$$\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x F(t, \vec{x}) = \lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} \int_{-\tilde{t}}^{\tilde{t}} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x F(t, \vec{x})$$

Benutzen wir nun (10.8) für $t \rightarrow +\infty$ und (10.14), so finden wir für (10.16):

$$\begin{aligned} \text{out} \langle p_1, \dots, p_k / q_1, \dots, q_n \rangle_{\text{in}} &= \text{out} \langle p_1, \dots, p_k / \alpha_{\text{out}}^*(\vec{q}_1) / q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}} \\ &+ i \mathbb{Z}^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e^{-iq_1 \cdot x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \text{out} \langle p_1, \dots / q(x) / q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}}] \end{aligned} \quad (10.17)$$

Die Formeln (10.13) - (10.17) sind im Sinne von temperierten Distributionen zu verstehen.

Nun ist

$$\begin{aligned} \text{out} \langle p_1, \dots, p_k / \alpha_{\text{out}}^*(\vec{q}_1) / q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}} \\ = \sum_{j=1}^k \omega(\vec{p}_j) \delta^{(3)}(\vec{p}_j - \vec{q}_1) \text{out} \langle p_1, \dots, \check{p}_j, \dots, p_k / q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}} \end{aligned}$$

In diesem Beitrag zur Streuamplitude (10.13) erfährt offenbar das 1. Teilchen mit Vierer-Impuls q_1 im "in-Zustand" überhaupt keine Streuung. Dieser Beitrag verschwindet, falls

$$q_1 \notin \{p_1, \dots, p_k\}.$$

Nun betrachten wir den zweiten Term auf der rechten Seite von (10.17). Wir benutzen, dass $q_1^2 = m_0^2$, also $(\square + m_0^2) e^{-iq_1 \cdot x} = 0$. Daraus

folgt nun, dass

$$\int d^4x \partial_0 [e^{-iq_1 \cdot x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \underset{\text{out}}{\langle p/q(x)/q \rangle_{\text{in}}}]$$

$$= \int d^4x \left\{ \left[(-\Delta^2 + m_0^2) e^{-iq_1 \cdot x} \right] \underset{\text{out}}{\langle p/q(x)/q \rangle_{\text{in}}} \right.$$

$$\left. + e^{-iq_1 \cdot x} \partial_0^2 \underset{\text{out}}{\langle p/q(x)/q \rangle_{\text{in}}} \right\}$$

$$= \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} (\square + m_0^2) \underset{\text{out}}{\langle p/q(x)/q \rangle_{\text{in}}} \quad (10.18)$$

↑

partielle Integration; (wegen Cluster-Eigenschaften keine Oberflächenterme!)

Zusammenfassend lautet unsere Formel bis anhin wie folgt:

$$\underset{\text{out}}{\langle p_1, \dots, p_k / q_1, \dots, q_n \rangle_{\text{in}}}$$

$$= \sum_{j=1}^k 2\omega(\vec{p}_j) \delta^{(3)}(\vec{p}_j - \vec{q}_1) \underset{\text{out}}{\langle p_1, \dots, \check{p}_j, \dots, p_k / q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}}}$$

$$+ iZ^{-1} \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} (\square + m_0^2) \underset{\text{out}}{\langle p_1, \dots, p_k / q(x)/q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}}}$$

(10.19)

Nun fahren wir in diesem Reduktionsprozess weiter.

Wir wollen diesmal ein Teilchen aus dem out-Zustand ($t \rightarrow +\infty$) entfernen. Der "muzusammenhän-

gunde Term", d.h. der erste Term auf der rechten Seite von (10.19), bietet nichts Neues. Wir betrachten also den zweiten Term auf der rechten Seite von (10.19):

$$\begin{aligned}
 & \underset{\text{out}}{\langle p_1, \dots, p_k | \varphi(x_1) | q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}}} \\
 &= \underset{\text{out}}{\langle p_2, \dots, p_k | \alpha_{\text{out}}(\vec{p}_1) \varphi(x_1) | q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}}} \\
 &= \lim_{y_1^0 \rightarrow +\infty} i \mathcal{Z}^{-1/2} \int d^3 y_1 e^{i \vec{p}_1 \cdot \vec{y}_1} \underset{y_1^0}{\frac{\partial}{\partial}} \times \\
 &\quad \times \underset{\text{out}}{\langle p_2, \dots, p_k | \varphi(y_1) \varphi(x_1) | q_2, \dots, q_n \rangle_{\text{in}}} \tag{10.20}
 \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite von (10.20) möchten wir nun ein vier-dimensionales Integral erscheinen lassen, wie in (10.17). An der unteren Integrationsgrenze der y_1^0 -Integration erscheint ein Operator $\alpha_{\text{in}}(\vec{p}_1)$, der direkt auf $|q_2, \dots, q_n\rangle_{\text{in}}$ wirken sollte. Dies kann durch Benutzung zeitgeordneter Produkte von Feldern gewährleistet werden. Wir definieren

$$T \varphi(y_1) \varphi(x_1) = \begin{cases} \varphi(y_1) \varphi(x_1), & y_1^{\circ} > x_1^{\circ} \\ \varphi(x_1) \varphi(y_1), & y_1^{\circ} < x_1^{\circ} \end{cases} \quad (10.21)$$

Fahren wir nun, wie in (10.18) weiter, so finden wir

$$\begin{aligned} & \left\langle \underset{\text{out}}{p_1, \dots, p_k} | \varphi(x_1) / q_2, \dots, q_n \right\rangle_{\text{in}} \\ &= \left\langle \underset{\text{out}}{p_2, \dots, p_k} | \varphi(x_1) \alpha_{\text{in}}(\vec{p}_1) / q_2, \dots, q_n \right\rangle_{\text{in}} \\ &+ i Z^{-1/2} \int d^4 y_1 e^{ip_1 \cdot y_1} (\square_{y_1} + m_0^2) \times \\ & \quad \times \left\langle \underset{\text{out}}{p_2, \dots, p_k} | T(\varphi(y_1) \varphi(x_1)) / q_2, \dots, q_n \right\rangle_{\text{in}}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} & \left\langle \underset{\text{out}}{p_1, \dots, p_k} | q_2, \dots, q_n \right\rangle_{\text{in}} \\ &= \text{"unzusammenhängende Terme"} \\ &+ (i Z^{-1/2})^2 \int d^4 x_1 d^4 y_1 e^{ip_1 \cdot y_1 - iq_1 \cdot x_1} \\ & \quad (\square_{y_1} + m_0^2)(\square_{x_1} + m_0^2) \left\langle \underset{\text{out}}{p_2, \dots, p_k} | T(\varphi(y_1) \varphi(x_1)) / q_2, \dots, q_n \right\rangle_{\text{in}} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Die bis jetzt erzeugten, unzusammenhängenden Terme isolieren ein oder zwei Teilchen, die keine Streuung erfahren; (ein oder zwei δ -Funktionen treten auf).

Mit Hilfe vollständiger Induktion können wir den Reduktionsprozess fortsetzen und erhalten schliesslich

$$\left\langle \underset{\text{out}}{p_1, \dots, p_k} / \underset{\text{in}}{q_1, \dots, q_n} \right\rangle_{\text{in}} = \left\langle \underset{\text{in}}{p_1, \dots, p_k} / S / \underset{\text{in}}{q_1, \dots, q_n} \right\rangle_{\text{in}}$$

= unzusammenhängende Terme

$$+ (i \mathcal{Z}^{-n})^{k+n} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_k d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \times$$

$$\times \exp \left(i \sum_{j=1}^k p_j \cdot y_j - i \sum_{j=1}^n q_j \cdot x_j \right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^k (\square_{y_j} + m_0^2) \prod_{j=1}^n (\square_{x_j} + m_0^2) \langle \Omega, T(\varphi(y_1) \cdots \varphi(x_n)) \Omega \rangle$$

(10.23)

Das sind die LSZ Reduktionsformeln. Sie gestatten

uns, die Streu matrix S durch die zeitgeordneten

Vakuumerwartungswerte des wechselwirkenden Feldes aus-

zudrücken. Falls die Streu matrix S existiert und

nicht-trivial ist, folgt aus (10.23), dass die

Fourier transformation $\hat{T}(-p_1, \dots, -p_k, q_1, \dots, q_n)$

von $\langle \Omega, T(\varphi(y_1) \cdots \varphi(y_k) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)) \Omega \rangle$ auf

den Massenschalen

$$p_j^2 = m_0^2, \quad q_i^2 = m_0^2$$

der Ein teilchen zustände Pole hat. Bis auf konstante Faktoren ist die Streumatrix S das Residuum dieses mehrfachen Poles.

Nun wenden wir uns dem Reduktions formalismus für das Dirac (und das elektromagnetische) Feld zu. Zunächst wollen wir die Källen - Lehmann (Spektral) Darstellung der Zweipunkt-funktion kurz besprechen. Wir betrachten also

$$\langle \mathcal{D}, \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \mathcal{D} \rangle = W_{\alpha\beta}(x-y) \quad (10.24)$$

Sei $\hat{W}_{\alpha\beta}(p)$ die Fourier - Transformierte von $W_{\alpha\beta}$.

$\hat{W}_{\alpha\beta}(p)$ ist eine 4×4 Matrix. Sie kann daher nach 16 linear unabhängigen Basis-Matrizen entwickelt werden. Diese werden aus den Dirac Matrizen erzeugt.

$$\begin{matrix} 1, & \gamma^\mu, & \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, & \gamma^\mu \gamma^5, & \epsilon^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ & 1 & 4 & 1 & 4 \\ & 1 & 4 & 1 & 6 \end{matrix}$$

Aus den relativistischen Kovarianz Eigenschaften von ψ_α , resp. $W_{\alpha\beta}$, und der Spektrumsbedingung folgt

$$\hat{W}(p) = \Theta(p_0) (\tilde{\rho}_1(p^2) \not{p} + \tilde{\rho}_2(p^2) + \tilde{\rho}_3(p^2) \not{p} \gamma^5 + \tilde{\rho}_4(p^2) \gamma^5)$$

Wir nehmen nun an - wie es der QED angemessen ist - wir hätten es mit einer P-invarianten Theorie zu tun, d.h.

$$P\Omega = \Omega, \quad P\psi(t, \vec{x}) P = \gamma^0 \psi(t, -\vec{x})$$

Dies führt auf die Bedingung

$$\hat{W}(p) = \gamma^0 \hat{W}(\tilde{p}) \gamma_0, \quad \tilde{p} \equiv (p_0, -\vec{p})$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, falls die Terme $\propto \gamma^5$ verschwinden. Also ist

$$\hat{W}(p) = \theta(p_0) (\tilde{\rho}_2(p^2) \not{p} + \tilde{\rho}_2(p^2)) \quad (10.25)$$

Nun schliesst man wie im Falle von Skalarfeldern,

dass

$$\tilde{\rho}_2(p^2) = \int_0^\infty d\rho_i(m^2) \delta(p^2 - m^2) \quad (10.26)$$

Durch Fourier Transformation erhalten wir

$$\langle \Omega, \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \Omega \rangle$$

$$= \int_0^\infty d\rho_i(m^2) i S_m^+(x-y)_{\alpha\beta}$$

$$+ \int_0^\infty [d\rho_2(m^2) - m d\rho_1(m^2)] \delta_{\alpha\beta} i \Delta_m^+(x-y)$$

$$(10.27)$$

In einer Theorie, die den Forderungen (W1) - (W8) genügt, ist

$$\langle \Omega, \psi_\alpha(x) \psi_\beta^*(y) \Omega \rangle = \langle \Omega, \psi_\alpha(x) [\bar{\psi}(y) \gamma_0]_\beta \Omega \rangle \quad (10.28)$$

positiv definit. Daraus folgt mit (10.27)

$$d\rho_1(m^2) \geq 0, \quad d\rho_2(m^2) - m d\rho_1(m^2) = 0. \quad (10.29)$$

$\uparrow (\gamma_0 \neq 0)$

Also

$$\langle \Omega, \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \Omega \rangle = \int_0^\infty d\rho_1(m^2) i S_m^+(x-y)_{\alpha\beta}$$

und daher auch

$$\langle \Omega, \{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y) \} \Omega \rangle = \int_0^\infty d\rho_1(m^2) i S_m(x-y).$$

In der QED ist aber (10.28) nicht notwendigerweise positiv definit, da ψ und $\bar{\psi}$ an das e.m. Feld koppeln, und dieses im covarianten Formalismus auf Zustände negativen Normquadrates führt.

Tatsächlich ist $\langle \Omega, \psi_\alpha(x) \psi_\beta^*(y) \Omega \rangle$ nicht eichinvariant, und die Eigenschaften dieser Distribution hängen von der gewählten Eichung ab. Der Strom $\bar{\psi} j^\mu \psi$, insbesondere die Ladungs-

dichte $\bar{\psi} \psi$ sind aber eichinvariant. Deshalb muss die divergente Grösse

$$\lim_{y \rightarrow x} \sum_{\alpha} \langle \Omega, \psi_{\alpha}(x) \psi_{\alpha}^*(y) \Omega \rangle$$

formal positiv definit sein. Daraus folgt immer noch, dass

$$d\rho_1(m^2) \geq 0, \quad (10.28)$$

aber es muss nicht notwendigerweise gelten, dass

$$d\rho_2(m^2) - m d\rho_1(m^2) = 0.$$

Wenn nun $d\rho_1(m^2)$ einen Einteilchenpol hat,

$$d\rho_1(m^2) = Z_2 \delta(m^2 - m_0^2) dm^2 \quad (10.29)$$

und der Einteilchenzustand ein physikalischer Zustand positiver Norm ist, gilt noch, dass

$$d\rho_2(m^2) - m d\rho_1(m^2) = 0,$$

für m^2 in einer Umgebung von m_0^2 .

In diesem Falle haben wir

$$\begin{aligned} \langle \Omega, \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \Omega \rangle &= i S_{m_0}^+(x-y)_{\alpha\beta} \\ &+ \int_{m_0^2}^{\infty} [d\rho_1(m^2) i \mathcal{D}_x + \rho_2(m^2)] i \Delta_m^+(x-y) \end{aligned} \quad (10.30)$$

Nun leiten wir die LSZ Reduktionsformel her.

Wir nehmen an, es existieren schwache Limeses

$$\varphi(t, \vec{x}) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{w} Z_2^{\frac{1}{2}} \varphi_{in}(t, \vec{x}), \quad (10.31)$$

$$\varphi(t, \vec{x}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{w} Z_2^{\frac{1}{2}} \varphi_{out}(t, \vec{x}),$$

wo $\varphi_{in}(t, \vec{x})$ und $\varphi_{out}(t, \vec{x})$ freie Felder sind,

und die schwache Konvergenz in (10.31) auf einem dichten Bereich D gelten soll. Wir benützen die

Impulsraumentwicklungen

$$\begin{aligned} \varphi_{as}(x) = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \frac{m}{\omega(\vec{p})} \sum_{j=1}^2 \left[C_{as}(\vec{p}, j) u_j(p) e^{-ip \cdot x} \right. \\ & \left. + D_{as}^*(\vec{p}, j) v_j(p) e^{ip \cdot x} \right], \end{aligned} \quad (10.32)$$

mit $p_0 = \omega(\vec{p}) = \sqrt{p^2 + m^2}$; (siehe (4.45)). Hier

ist "as" = "in" oder "out", und

$$C^\#(\vec{p}, j) = \sqrt{\frac{\omega(\vec{p})}{m}} c_j^\#(\vec{p}),$$

$$D^\#(\vec{p}, j) = \sqrt{\frac{\omega(\vec{p})}{m}} d_j^\#(\vec{p}),$$

so, dass an Stelle von (4.39) und (4.40) dann

gilt:

$$[C(\vec{p}, j), C^*(\vec{p}', k)]_+ = \delta_{jk} \frac{\omega(\vec{p})}{m} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (10.33)$$

$$[D(\vec{p}, j), D^*(\vec{p}', k)]_+ = \delta_{jk} \frac{\omega(\vec{p})}{m} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'); \quad (10.34)$$

(alle übrigen Antikommutatoren verschwinden).

Diese modifizierten Erzeugungs- und Vernichtungsoptatoren haben etwas einfachere Transformationseigenschaften unter Poincaré-Transformationen; und (10.32) lässt sich leichter nach C_{as} und D_{as}^* auflösen als (4.45) nach c und d^* .

Dann benützen wir, dass

$$\overline{u_j(p)}^T u_{j'}(p) = \overline{v_j(p)}^T v_{j'}(p) = \frac{\omega(\vec{p})}{m} \delta_{jj'}, \text{ etc.}$$

so finden wir

$$C_{as}(\vec{p}, j) = \int d^3x \bar{u}_j(p) e^{ip \cdot x} \gamma^0 \varphi_{as}(t, \vec{x})$$

$$D_{as}^*(\vec{p}, j) = \int d^3x \bar{v}_j(p) e^{-ip \cdot x} \gamma^0 \varphi_{as}(t, \vec{x}) \quad (10.35)$$

$$C_{as}^*(\vec{p}, j) = \int d^3x \bar{\varphi}_{as}(t, \vec{x}) \gamma^0 e^{-ip \cdot x} u_j(p)$$

$$D_{as}(\vec{p}, j) = \int d^3x \bar{\varphi}_{as}(t, \vec{x}) \gamma^0 e^{ip \cdot x} v_j(p)$$

Diese Formeln sind in der LSZ Reduktion nützlich.

Aus Gründen, die wir im letzten Abschnitt erklärt haben, muss man annehmen, dass

$$|0\rangle_{\text{in}} = \Omega = |0\rangle_{\text{out}}$$

und

$$\varphi_{\text{in}} \Omega = \varphi_{\text{out}} \Omega = \text{phys. Einzelchenzustand.}$$

Strauzustände haben die Form

$$\prod_{\alpha} C_{as}^*(\vec{p}_{\alpha}, j_{\alpha}) \prod_{\alpha'} D_{as}^*(\vec{k}_{\alpha'}, j_{\alpha'}) \Omega$$

$$= |\vec{p}_1, j_1, 1, \dots, \vec{k}_1, j_1, -1, \dots\rangle_{as}'' = |as\rangle''$$

"as" = "in" oder "out", und

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = \langle \text{in} | S | \text{in} \rangle$$

definiert die Streumatrix.

Wir wollen nun $\langle \text{out} | \text{in} \rangle'$ berechnen, wo

$$|\text{in}\rangle' = C_{\text{in}}^*(\vec{p}, j) |\text{in}\rangle \text{ ist:}$$

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle' = \langle \text{out} | C_{\text{in}}^*(\vec{p}, j) | \text{in} \rangle \quad (10.36)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} Z_2^{-1/2} \int d^3x \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) \gamma^0 | \text{in} \rangle e^{-ip \cdot x} u_j(p),$$

wegen (10.35) und (10.31)!

Wendet man den Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung auf die rechte Seite von (10.36) an, so findet man

$$\begin{aligned} & \langle \text{out} | C_{\text{in}}^*(\vec{p}, j) | \text{in} \rangle \\ &= \langle \text{out} | C_{\text{out}}^*(\vec{p}, j) | \text{in} \rangle \xrightarrow{\text{mzg}} \text{mzg} \text{ hängende Terme} \\ & -i \sum_2^{-1/2} \int d^4x \left[\langle \text{out} | \bar{\psi}(x) | \text{in} \rangle \frac{1}{i} \overleftarrow{\partial}_0 \gamma^0 u_j(p) e^{-ip \cdot x} \right. \\ & \quad \left. + \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) | \text{in} \rangle \frac{1}{i} \overrightarrow{\partial}_0 \gamma^0 u_j(p) e^{-ip \cdot x} \right] \quad (10.37) \end{aligned}$$

Nun erfüllt $u_j(p) e^{-ip \cdot x}$ die homogene Dirac Gleichung; (siehe (6.64)!). Also

$$-i \partial_0 \gamma^0 u_j(p) e^{-ip \cdot x} - \left[i \sum_{k=1}^3 \partial_k \gamma^k - m_0 \right] u_j(p) e^{-ip \cdot x} = 0$$

Diese benutzt man im letzten Term auf der rechten Seite von (10.37) und integriert partiell.

Das ergibt dann

$$\begin{aligned} & \langle \text{out} | C_{\text{in}}^*(\vec{p}, j) | \text{in} \rangle = \text{mzg hängende Terme} \\ & -i \sum_2^{-1/2} \int d^4x \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) | \text{in} \rangle (-i \overleftarrow{\partial}_x - m_0) \times \\ & \quad \times u_j(p) e^{-ip \cdot x} \quad (10.38) \end{aligned}$$

Genauso findet man

$$\langle \text{out} / D_{\text{in}}^*(\vec{p}, j) / \text{in} \rangle = \text{u. T.} + i Z_2^{-1/2} \int d^4x \bar{v}_j(p) e^{-ip \cdot x} \\ \times (i \not{D}_x - m_0) \langle \text{out} / \psi(x) / \text{in} \rangle$$

$$\langle \text{out} / C_{\text{out}}(\vec{p}, j) / \text{in} \rangle = \text{u. T.} - i Z_2^{-1/2} \int d^4x \bar{u}_j(p) e^{ip \cdot x} \\ \times (i \not{D}_x - m_0) \langle \text{out} / \psi(x) / \text{in} \rangle$$

und

$$\langle \text{out} / D_{\text{out}}(\vec{p}, j) / \text{in} \rangle = \text{u. T.} + i Z_2^{-1/2} \int d^4x \langle \text{out} / \bar{\psi}(x) / \text{in} \rangle \\ \times (-i \not{D}_x - m_0) v_j(p) e^{ip \cdot x} \quad (10.39)$$

Wir können nun mit Hilfe dieser Formeln den Reduktionsprozess fortsetzen. Wir benützen denselben Trick mit dem zeitgeordneten Produkt wie im letzten Abschnitt. Wir müssen aber in der Definition des T-Produktes die Antivertauschungseigenschaften der Dirac Felder berücksichtigen:

$$T \bar{\psi}^\#(y) \psi^\#(x) = \begin{cases} \bar{\psi}^\#(y) \psi^\#(x), & y^0 > x^0 \\ -\bar{\psi}^\#(x) \psi^\#(y), & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (10.40)$$

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned}
 & \langle \Omega, \dots D_{out}(q_1') \dots C_{out}(q_1) C_{in}^*(p_1) \dots D_{in}^*(p_1') \dots \Omega \rangle \\
 &= n.T. + (-i \mathbb{Z}_2^{-1/2})^n (i \mathbb{Z}_2^{-1/2})^{n'} \int d^4x, \dots d^4y_1' \dots \times \\
 &\quad \times \exp(-i \sum (p_j \cdot x_j + p_j' \cdot x_j' - q_j \cdot y_j - q_j' \cdot y_j')) \times \\
 &\quad \times \bar{u}(q_1) (\overrightarrow{i\cancel{\partial}}_{y_1} - m_0) \dots \bar{v}(p_1') (\overrightarrow{i\cancel{\partial}}_{x_1'} - m_0) \times \\
 &\quad \times \langle \Omega, T[\dots \psi(y_1') \dots \psi(y_1) \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_1')] \dots \Omega \rangle \times \\
 &\quad \times (-i \overset{\leftarrow}{\cancel{\partial}}_{x_1} - m_0) u(p_1) \dots (-i \overset{\leftarrow}{\cancel{\partial}}_{y_1'} - m_0) v(q_1') \dots \quad (10.41)
 \end{aligned}$$

Hier haben wir unsere Notation etwas komprimiert;
 (Polarisationsindizes, j , sind weggelassen, und
 $\exp(-i \sum \dots)$ ist etwas symbolisch geschrieben:
 Never mind !)

Wir sehen also, dass wir auch hier die
 Stromamplituden wieder durch Restriktion der
 amputierten chronologischen Funktionen auf die
 Massenskalen der asymptotischen Teilchen be-
 rechnen können.

Nun müssten wir dasselbe traurige Spiel
 auch noch für die Photonen durchführen.

Dabei passiert etwas Interessantes: Setzt man voraus, dass die Maxwell Gl. für Erwartungswerte zwischen physikalischen Zuständen erfüllt ist, so findet man

$$\langle \text{out} | \alpha_{r,\text{out}}(\vec{k}) | \text{in} \rangle$$

$$= \text{u.T.} - i Z_3^{-1/2} \int d^4x e^{ik \cdot x} \vec{\square}_x \langle \text{out} | \varepsilon_r A(x) | \text{in} \rangle$$

$$= \text{u.T.} - i Z_3^{-1/2} \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle \text{out} | \varepsilon_r j(x) | \text{in} \rangle, \quad (10.42)$$

wo $\varepsilon_r = (\varepsilon_r^\mu)$ ein transversaler Polarisationsvektor ist, $\alpha_r^\#(\vec{k}) \equiv \sqrt{2/k} \alpha_r^\#(\vec{k})$, und $j = (j_\mu)$ der Vierstrom. ($\because f_\mu \neq 0$) ist. Auch (10.42) kann man nun iterieren. Diese Reduktionsformel sind in der QED von fundamentaler Bedeutung.

11. Definition von Wirkungsquerschnitten.

In diesem Abschnitt wollen wir den Zusammenhang zwischen der Streumatrix und dem Wirkungsquerschnitt erklären. Dazu betrachten wir zunächst die Streuung zweier spinloser Teilchen. Der in-Zustand (einfallender Zustand) hat die Form

$$\langle i \rangle_{in} = \iint d\hat{p}_1 d\hat{p}_2 h_1(\vec{p}_1) h_2(\vec{p}_2) |p_1, p_2\rangle_{in}, \quad (11.1)$$

wo $d\hat{p}_i = \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{p}_i)}$, $p_i = (\omega_i(\vec{p}_i), \vec{p}_i)$, $p_i^2 = m_i^2$. Die

Einteilchenzustände sind wie folgt normiert:

$$\langle p' | p \rangle = 2\omega(\vec{p}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (11.2)$$

Für massive Fermionen würden wir die Normierung

$$\langle p', s' | p, s \rangle = \delta_{s's} \frac{\omega(\vec{p})}{m} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (11.3)$$

benutzen, und $d\hat{p} = \frac{m}{\omega(\vec{p})} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$. Das sind Kon-

ventionen! Für Fermionen mit Masse 0 behält man dagegen konventionellweise (11.2) bei.

Funktionen der Form

$$\tilde{h}(x) = \int d\hat{p} e^{-ip \cdot x} h(\vec{p}), \quad p^2 = m^2, \quad p_0 = \omega(\vec{p}) > 0,$$

sind Lösungen der Klein-Gordon Gleichung mit positiver Energie. Ein Einteilchenzustand mit Wellenfunktion h hat eine Norm, deren Quadrat durch

$$\int d\hat{p} |h(\vec{p})|^2$$

gegeben ist. Der Erwartungswert des "Ladungsstromes", oder Teilchenstromes, in diesem Einteilchenzustand ist durch

$$i \overline{\hat{h}(x)} \leftrightarrow \partial_\mu \hat{h}(x) \quad (11.4)$$

gegeben. Die mittlere Teilchendichte ist also

$$i \overline{\hat{h}(x)} \leftrightarrow \partial_0 \hat{h}(x), \quad (11.5)$$

und die mittlere Stromdichte ist

$$i \overline{\hat{h}(x)} \leftrightarrow \vec{\partial} \hat{h}(x). \quad (11.6)$$

Man sieht nach einfacher Rechnung, dass

$$i \int_{x^0 = \text{const}} d^3x \overline{\hat{h}(x)} \leftrightarrow \partial_0 \hat{h}(x) = \int d\hat{p} |h(\vec{p})|^2 \quad (11.7)$$

wie es sein soll.

Sei nun $|f\rangle_{\text{out}}$ ein auslaufender Zustand für $t \rightarrow +\infty$; (es steht "i" in $|i\rangle_{\text{in}}$ für "initial

250.

"state", und "f" in $|f\rangle_{\text{out}}$ für "final state").

Die Übergangswahrscheinlichkeit für den Prozess $|i\rangle_{\text{in}} \rightarrow |f\rangle_{\text{out}}$ ist nach quantenmechanischen "Grundprinzipien" durch

$$W_{f \leftarrow i} = \left| \langle f | i \rangle_{\text{in}} \right|^2 \quad (11.8)$$

gegeben, falls $|i\rangle_{\text{in}}$ und $|f\rangle_{\text{out}}$ normiert sind,

d.h.

$$\langle i | i \rangle_{\text{in}} = \langle f | f \rangle_{\text{out}} = 1. \quad (11.9)$$

Setzen wir die im letzten Kapitel gewonnene Definition der S-Matrix ein, so folgt, dass

$$W_{f \leftarrow i} = \left| \langle f | S | i \rangle_{\text{in}} \right|^2. \quad (11.10)$$

Nun schreiben wir

$$S = \mathbb{1} + iT, \quad (11.11)$$

wo $\mathbb{1}$ die reine Vorrätsstreuung beschreibt (zusammenhängende Terme), die man in Experimenten sozusagen nie beobachtet. Daher haben wir, (falls

$$\underset{\text{in}}{\langle f | i \rangle}_{\text{in}} = 0),$$

$$W_{f \leftarrow i} = |\underset{\text{in}}{\langle f | T | i \rangle}_{\text{in}}|^2. \quad (11.12)$$

Aus der Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit folgt formal, dass S unitär ist (asymptotische Vollständigkeit), d.h. $S^* S = S S^* = \mathbb{1}$, also

$$T^* T + i(T - T^*) = 0.$$

Wir nehmen nun an (wie es in Experimenten i. A. der Fall ist), $|i\rangle_{\text{in}}$ und - aufgrund der Energie-Impulserhaltung - $|f\rangle_{\text{out}}$ seien näherungsweise Eigenzustände des Energie-Impulsoperators, d.h.

$$P|f\rangle_{\text{out}} \approx p_f |f\rangle_{\text{out}}, \quad (p_f \in \overline{V}_+). \quad (11.13)$$

Präziser:

$$|f\rangle_{\text{as}} = \int \frac{d^4 p}{\varepsilon} f_\varepsilon(p - p_f) |(p)\rangle_{\text{as}}, \quad \text{as} = \text{in od. out},$$

mit

$$P|(p)\rangle_{\text{as}} = p |(p)\rangle_{\text{as}},$$

$f_\varepsilon(p)$ ist in einer Umgebung von $p=0$ vom Durchmesser $\sim \sqrt{\varepsilon}$ gepeakt und $\int \frac{d^4 p}{\varepsilon^2} |f_\varepsilon(p)|^2 = \text{const.}$,

e.g.

$$f_\varepsilon(p) = \text{const. } e^{-\frac{|p|^2}{\varepsilon}}, \quad (11.14)$$

$$\langle (p) \rangle_{as} \stackrel{e.g.}{=} \int \langle p_3, \dots, p_{n+1} | p - p_3 - \dots - p_{n+1} \rangle_{as} \varphi(p_3, \dots, p_{n+1}) \\ (2\omega_{n+2}(p - p_3 - \dots - p_{n+1}))^{-1} d\hat{p}_3 \dots d\hat{p}_{n+1},$$

wo φ eine Testfunktion ist.

Die Energie-Impulserhaltung impliziert nun, dass

$$\langle f/T | p_1, p_2 \rangle_{in} = \int \frac{1}{\varepsilon} f(\vec{p} - \vec{p}_f) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\vec{p} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ \langle (p) / T | p_1, p_2 \rangle_{in} d^4 p, \quad (11.15)$$

wo $\langle (p) / T | p_1, p_2 \rangle_{in}$ aus der Restriktion der ampa-

tisierten, zeitgeordneten Green'schen Funktionen auf die Massenschalen der ein- und auslaufenden Teilchen berech-
net wird; (Kap. 10). Wir nehmen an, (und dies kann man

unter sehr allgemeinen Annahmen für lokale QFT's beweisen,
falls alle Einzelzustände massiv und isoliert sind),

dass $\langle (p) / T | p_1, p_2 \rangle_{in}$ glatt in p_1 und in p_2 in einer

Umgebung der Massenschalen $p_i^2 = m_i^2$, $p_{i0} > 0$, $i=1,2$,

sei, (für auslaufende Zustände $\langle (p) \rangle_{as}$ von der oben angegebenen Form). Von nun an lassen wir den Subskript "in" weg. Wir nehmen an, die Funktionen

$h_i(\vec{p})$ und $h_2(\vec{p})$ seien in Impulsen \vec{p}_i^0 , resp. \vec{p}_2^0 gepeakt, wie es der experimentellen Situation i.A. entspricht, z.B.

$$\int |\vec{p} - \vec{p}_i^0|^2 |h_i(\vec{p})|^2 d\hat{p} \ll \omega_i(\vec{p}_i^0)^2 \int |h_i(\vec{p})|^2 d\hat{p}$$

Dann folgt aus (11.12) und (11.15) und aus der Glättlichkeit von $\langle (p)/\mathcal{F}/p_1, p_2 \rangle$ in p_1 und p_2 , dass

$$\begin{aligned} W_{f \leftarrow i} &= \int d\hat{p}_1 d\hat{p}_2 d\hat{p}'_1 d\hat{p}'_2 \overline{h_1(\vec{p}_1)} \overline{h_2(\vec{p}_2)} h_1(\vec{p}'_1) h_2(\vec{p}'_2) \\ &\quad (2\pi)^8 \varepsilon^{-2} \overline{f_\varepsilon(p_1 + p_2 - p_f)} f_\varepsilon(p'_1 + p'_2 - p_f) \\ &\quad \overline{\langle (p_1 + p_2)/\mathcal{F}/p_1, p_2 \rangle} \overline{\langle (p'_1 + p'_2)/\mathcal{F}/p'_1, p'_2 \rangle} \\ &\simeq \int d\hat{p}_1 d\hat{p}_2 d\hat{p}'_1 d\hat{p}'_2 \overline{h_1(\vec{p}_1)} \overline{h_2(\vec{p}_2)} h_1(\vec{p}'_1) h_2(\vec{p}'_2) \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int d^4 p (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_i^0 - p_2^0) \\ &\quad |f_\varepsilon(p - p_f)|^2 |\langle (p)/\mathcal{F}/p_i^0, p_2^0 \rangle|^2 \quad (11.16) \end{aligned}$$

Nun benützen wir die Fourier-darstellung der δ -Funktion:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) = \int d^4 x e^{-ix \cdot (p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)},$$

die wir in (11.16) einsetzen. Dann folgt, dass

$$W_{f \leftarrow i} \simeq \int d^4x |\check{h}_1(x)|^2 |\check{h}_2(x)|^2 \int d^4p (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_1^0 - p_2^0) \\ |f_\varepsilon(p - p_f)|^2 |\langle (p) / \mathcal{T} / p_1^0, p_2^0 \rangle|^2 \quad (11.17)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte pro Zeiteinheit ist daher

$$\frac{dW_{f \leftarrow i}}{dV dt} = |\check{h}_1(x)|^2 |\check{h}_2(x)|^2 \int d^4p (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_1^0 - p_2^0) \\ |f_\varepsilon(p - p_f)|^2 |\langle (p) / \mathcal{T} / p_1^0, p_2^0 \rangle|^2. \quad (11.18)$$

Da $h_i(\vec{p})$ bei \vec{p}_i^0 gepeakt ist, haben wir, dass

$$\check{h}_i(x) = e^{-i\vec{p}_i^0 \cdot \vec{x}} H_i(x),$$

wo die Funktionen $H_1(x)$ und $H_2(x)$ nur schwach von x abhängen. Daher ist der mittlere Teilchenstrom der Teilchensorte j durch

$$i \overline{\check{h}_j(x)} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \check{h}_j(x) \simeq 2(p_j^0)_\mu |\check{h}_j(x)|^2 \quad (11.19)$$

gegeben. Wir treffen nun die Annahme, Teilchen 1 sei einfallend, wogegen

Teilchen 2 der Target sei, der im Laborsystem

ruhe, d.h. $\vec{p}_2^0 \approx (m_2, \vec{0})$.

Die Targetdichte im Raum-Zeit Punkt x ist nach (11.5) und (11.19)

$$n_2(x) \approx 2\omega(\vec{p}_2^0)/|\check{h}_2(x)|^2 = 2m_2/|\check{h}_2(x)|^2. \quad (11.20)$$

Der einfallende Fluss von Teilchen der Sorte 1 (= einfallende Stromdichte) im Punkte x ist nach (11.5) und (11.19)

$$|\vec{j}_1(x)| \approx 2|\vec{p}_1^0|/|\check{h}_1(x)|^2. \quad (11.21)$$

Nun definiert man den Wirkungsquerschnitt durch die Gleichung

$$\frac{dW_{f \leftarrow i}}{dV dt} = \text{Übergangswahrscheinlichkeitsdichte pro Zeiteinheit für } |i\rangle_{in} \rightarrow |f\rangle_{out}$$

$$= \text{Targetdichte} \times \text{einfallender Fluss} \\ \times \text{Wirkungsquerschnitt } \Delta \sigma$$

$$= n_2(x) \cdot |\vec{j}_1(x)| \cdot \Delta \sigma. \quad (11.22)$$

Durch Vergleich von (11.22) mit (11.18), (11.20) und

(11.21) erhalten wir schliesslich

$$\Delta G = \frac{1}{4m_2 |\vec{p}_1^0|} \int d^4 p (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_1^0 - p_2^0) |f_\varepsilon(p - p_f)|^2 |K(p) / \mathcal{T} / p_1^0, p_2^0\rangle|^2 \quad (11.23)$$

Von nun an lassen wir die Superskripts 0 weg:

$p_j^0 \rightarrow p_j$, $j = 1, 2$. Den Ausdruck (11.23) kann man explizit Lorentz invariant umschreiben, indem man benutzt, dass

$$\begin{aligned} m_2 |\vec{p}_1| &= m_2 [\omega(\vec{p}_1)^2 - m_1^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (11.24)$$

Nun betrachten wir einen Streuprozess, in dem der auslaufende Zustand $|f\rangle$ aus n verschiedenen, spinlosen Teilchen mit Impulsen $\vec{p}_3', \dots, \vec{p}_{n+2}'$, die in kleinen Gebieten A_3, \dots, A_{n+2} um $\vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{n+2}$ konzentriert sind, besteht. Dann finden wir

$$\begin{aligned} \Delta G &= (2\pi)^4 \frac{1}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}}} \int_{A_3} d\hat{p}_3' \dots \int_{A_{n+2}} d\hat{p}_{n+2}' \\ &\quad \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3' - \dots - p_{n+2}') |K(p_3', \dots, p_{n+2}') / \mathcal{T} / p_1, p_2\rangle|^2 \end{aligned} \quad (11.25)$$

257.

Das Matrixelement $\langle p'_1, \dots, p'_{n+2} | \mathcal{G} | p_1, p_2 \rangle$ haben wir im letzten Kapitel als amputierte, auf die Massenschale restriktierte, zeitgeordnete Green'sche Funktion identifiziert; (Fouriertransformierte von (10.23)). In der Literatur wird es als invariante Übergangsamplitude und mit

$$M = M(p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n+2})$$

bezeichnet. Für den differentiellen Wirkungsschnitt, $d\sigma$, finden wir aus (11.25)

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_{n+2}) \frac{1}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} \times |M(p_1, \dots, p_{n+2})|^2 \prod_{j=3}^{n+2} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{p}_j)} \quad (11.26)$$

Wie in (11.3) erwähnt, sind die Faktoren $2\omega(\vec{p}_j)$ für massive Fermionen durch $\omega(\vec{p}_j)/m_j$ zu ersetzen, für alle $j = 1, \dots, n+2$. Der Faktor $\frac{1}{4}$ in (11.26) wird also durch $m_1 \cdot m_2$ ersetzt, und

$$\frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{p}_j)} \mapsto \frac{m_j d^3 p_j}{(2\pi)^3 \omega(\vec{p}_j)}$$

258.

Für Fermionen mit $m=0$ benutzt man konventionellerweise die gleichen Phasenraumfaktoren wie für Bosonen

Nun betrachten wir den Spezialfall der elastischen Zweiteilchenstreuung. Nach (11.26) ist

$$d\sigma = M(p_1, p_2, p'_1, p'_2) \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) d^3 p'_1 d^3 p'_2, \quad (11.27)$$

wo

$$M(p_1, p_2, p'_1, p'_2) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_{\text{rel.}} \omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2} |M|^2,$$

$$(p'_1 \equiv p_3, p'_2 \equiv p_4, v_{\text{rel.}} = \left| \frac{\vec{p}_1}{\omega_1} - \frac{\vec{p}_2}{\omega_2} \right|, \text{ speziell}$$

$$v_{\text{rel.}} = \frac{|\vec{p}_1|}{\omega_1} \text{ im Laborsystem, } \omega_i \equiv \omega(\vec{p}_i), \text{ etc.}$$

Man vergleiche (11.27) mit (11.23) und (11.26) !)

Die Impulserhaltung macht die Integration über \vec{p}'_2 ausführbar. Nach Integration über \vec{p}'_2 haben wir dann:

$$d\sigma = M \delta(\omega'_1 + \omega'_2 - \omega_1 - \omega_2) |\vec{p}'_1|^2 d|\vec{p}'_1| d\omega'_1 \quad (11.28)$$

wo $d\Omega'_1$ das Raumwinkel element im \vec{p}_1' -Raum ist, und $p_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_1'$. Nun benützen wir die Energieerhaltung, nun über $|\vec{p}_1'|$ zu integrieren. Wir rechnen im Schwerpunktssystem, CoM (für "center of mass"): Da haben wir $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ und $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$.

Wir erinnern uns an die Identität

$$\int dx f(x) \delta(g(x)) = \left(\int dg \frac{dx}{dg} f(x(g)) \delta(g) \right)$$

$$= \sum_{x_i: g(x_i)=0} f(x_i) \frac{1}{\frac{dg}{dx}(x_i)},$$

und setzen $x = |\vec{p}_1'|$, $g(x) = \omega_1'(x) + \omega_2'(x) - \omega_1 - \omega_2$.

Dann finden wir

$$d\sigma = M |\vec{p}_1'|^2 d\Omega' \left[\frac{\partial(\omega_1' + \omega_2')}{\partial |\vec{p}_1'|} \right]^{-1}. \quad (11.29)$$

Im CoM System haben wir

$$\frac{\partial(\omega_1' + \omega_2')}{\partial |\vec{p}_1'|} = |\vec{p}_1'| \frac{\omega_1' + \omega_2'}{\omega_1' \omega_2'} = |\vec{p}_1'| \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1' \omega_2'}$$

Energieerhaltung

260.

Daraus finden wir für den differentiellen Streuquerschnitt im CoM System

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{\text{CoM}} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2)^2} \cdot \frac{|\vec{p}'_1|}{|\vec{p}_1|} |M|^2 \quad (11.30)$$

Dabei haben wir benutzt, dass im CoM System

$$v_{\text{rel.}} = \left| \frac{\vec{p}_1}{\omega_1} - \frac{\vec{p}_2}{\omega_2} \right| = \frac{|\vec{p}_1|}{\omega_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{\omega_2} = |\vec{p}_1| \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \cdot \omega_2},$$

da $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$. Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man, indem man den differentiellen Wirkungsquerschnitt über $d\Omega'_1$ integriert. Wenn die auslaufenden Teilchen identisch sind, muss man das Schlussresultat noch durch 2 dividieren, da man sonst identische auslaufende Zustände doppelt zählt.

Im Mandl & Shaw (Sekts. 8.2, 8.3) ist gut erklärt, wie man Wirkungsquerschnitte berechnet, wenn Teilchen mit Spin, etwa Elektronen, am Streuprozess teilnehmen, man deren Spin (resp. Polarisation für Photonen) aber nicht beobachtet. Mehr dazu später.

12. Störungstheorie, Gell-Mann - low formula

Wie wir im Kapitel 10) gelernt haben, kann die Berechnung der Streuamplituden (Matrixelemente der Streumatrix zwischen in-Zuständen) auf diejenige der Vakuumserwartungswerte zeitgeordneter Produkte wechselwirkender Felder zurückgeführt werden. Diese wollen wir durch Benützung der Dyson Reihe im Rahmen der Störungstheorie ausrechnen.

Wir betrachten zunächst den notationell einfachsten Fall eines reellen Skalarfeldes, φ . Die sog. chronologischen Funktionen sind durch

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega, T[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] \Omega \rangle \quad (12.1)$$

gegeben. Dabei ist

$$T[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] = \varphi(x_{i_1}) \dots \varphi(x_{i_n}), \quad (12.2)$$

für $x_{i_1}^0 > x_{i_2}^0 > \dots > x_{i_n}^0$. Wir definieren das generierende Funktional, $Z(j)$, für die chronologischen Funktionen als

$$\begin{aligned}
 Z(j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) \times \\
 &\quad \times G(x_1, \dots, x_n) \\
 &= \langle \Omega, T \exp[i \int d^4x j(x) \varphi(x)] \Omega \rangle \quad (12.3)
 \end{aligned}$$

An grund der Reduktionsformeln (10.23) findet man die Streuamplituden durch funktionale Ableitung von $Z(j)$ nach j , Amputation der äusseren Linien (Multiplikation mit $Z^{-\frac{1}{2}}(\square + m_0^2)$) und Restriktion auf die Massenschalen; ($p_i^2 = m_0^2$).

Es fällt nicht schwer, zu zeigen, dass die S-Matrix formal durch

$$S = : \exp \int d^4y \{ \varphi_{in}(y) [(\square_y + m_0^2) Z^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta}{\delta j(y)}] \} : Z(j) \Big|_{j=0} \quad (12.4)$$

gegeben ist. Das ist eine einfache Konsequenz der Formel (10.23), der Definition des Wickproduktes $: \dots :$ und einfacher Rechnungen mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

Zu zeigen ist also, wie man $Z(j)$, resp.

$G(x_1, \dots, x_n)$, im Rahmen der Störungstheorie ausrechnen kann. Dies soll für eine Hamilton'sche Feldtheorie (siehe Kap. 4) mit Hilfe des Wechselwirkungsbildes nun durchgeführt werden.

Seien $\varphi(\vec{x})$, $\pi(\vec{x})$ Feld und kanonisch konjugierter Impuls zur Zeit $t=0$. Es gelten die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})] &= [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0 \\ [\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] &= i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (12.5)$$

Wir betrachten zunächst die Fock-Darstellung dieser Vertauschungsrelationen auf dem Fockraum \mathcal{F} . Das Fock-Vakuum (Vakuum der freien Feldtheorie) ist, wie üblich, mit $|0\rangle$ bezeichnet.

Der Hamilton Operator (Erzeugende der Zeit-Translationen) des freien Skalarfeldes ist, wie in Kap. 4 und 5 besprochen, durch

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} \int d^3x : [\pi(\vec{x})^2 + (\vec{\nabla}\varphi)(\vec{x})^2 + m^2 \varphi(\vec{x})^2] : \\ &= \int d^3p \omega(\vec{p}) a^*(\vec{p}) a(\vec{p}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 p \alpha^*(\vec{p}) \alpha(\vec{p}) \quad (12.6)$$

gegeben. Für das freie Feld gilt also

$$\varphi_0(t, \vec{x}) = e^{itH_0} \varphi(\vec{x}) e^{-itH_0} \quad (12.7)$$

Wie in Kapitel 4) angedeutet, ist der Hamilton Operator, H , einer wechselwirkenden Hamilton'schen Feldtheorie durch

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} \quad (12.8)$$

gegeben, wo \mathcal{H} , die Hamilton Dichte, durch

$$\mathcal{H} = : \pi(\vec{x}) \dot{\varphi}(\vec{x}) - \mathcal{L}(\varphi(x), \dot{\varphi}(x)) : \quad (12.9)$$

gegeben, wo \mathcal{L} die Lagrange Dichte ist.

(*) Wir nehmen nun an, dass

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \mathcal{L}_0(\varphi, \dot{\varphi}) + \mathcal{L}_I(\varphi) \quad (12.10)$$

ist, wo

$$\mathcal{L}_0(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} [\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2]$$

ist, und $\mathcal{L}_I(\varphi)$ nur von φ , aber nicht von $\dot{\varphi}$, abhängt. z.B.

$$\mathcal{L}_I(\varphi) = -\frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x) + \frac{\mu^2}{2!} \varphi^2(x) \quad (12.11)$$

Dann gilt

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi) = \mathcal{H}_0(\varphi, \pi) + \mathcal{H}_I(\varphi),$$

mit

$$\mathcal{H}_0(\varphi, \pi) = \frac{1}{2} [\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2] \quad (12.12)$$

und

$$\mathcal{H}_I(\varphi) = -\mathcal{L}_I(\varphi);$$

siehe (4.18). Formal ist der Hamilton Operator der wechselwirkenden Theorie dann durch

$$\begin{aligned} H &= \int_{t=0} d^3x : \mathcal{H}(\varphi, \pi) : \\ &= H_0 + H_I + E, \end{aligned} \quad (12.13)$$

gegeben, wo

$$H_I = \int_{t=0} d^3x : \mathcal{H}_I(\varphi) : = - \int_{t=0} d^3x : \mathcal{L}_I(\varphi) : \quad (12.14)$$

ist. Dabei ist E eine (i.a. divergente) Konstante, die Vakuum-Energie Renormierung, die H so normiert, dass

$$H \geq 0, \quad \inf \text{spec } H = 0.$$

Natürlich ist der Ausdruck (12.14) i.A. sinuslos:

Das Feld $\varphi = \varphi(\vec{x})$ ist eine operatorwertige

Distribution. Potenzen von $\varphi(\vec{x})$ sind daher (selbst nach Wickordnung) i.A. nicht definiert. Weiter macht es zunächst keinen Sinn, über den ganzen Raum \mathbb{R}^3 zu integrieren. Um diese Probleme wenigstens momentan zu vermeiden, ersetzen wir in (12.14) $\varphi(\vec{x})$ durch

$$\varphi_x(\vec{x}) \equiv \int d^3y h_x(\vec{x}-\vec{y}) \varphi(\vec{y}), \quad (12.15)$$

wo h_x eine C^∞ -Approximation der δ -Funktion ist; z. B.

$$h_x(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-\vec{p}^2/2x} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

Dann geht $h_x(\vec{x}) \rightarrow \delta^3(\vec{x})$, für $x \rightarrow \infty$; (im Sinne der Distributionen). Weiterhin ersetzen wir auf der rechten Seite von (12.14) die Integration über \mathbb{R}^3 durch eine Integration über ein kompaktes Teilgebiet von \mathbb{R}^3 . Wir definieren also

$$H_I = H_I(x; g) \equiv \int_{t=0} d^3x : \mathcal{H}_I(\varphi_x) : (\vec{x}) g(\vec{x}) \quad (12.16)$$

wo g eine geglättete charakteristische Funktion eines kompakten Gebietes $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ ist. Am Schluss der nun folgenden Rechnungen werden wir uns mit der Existenz der Grenzwerte $x \rightarrow \infty$ (Ultraviolet limes \rightarrow Renormierungstheorie) und $g \rightarrow 1$ ("thermodynamischer", oder "adiabatischer Limes") zu beschäftigen haben.

Wir definieren nun als approximativen Hamiltonoperator, $H = H(x; g)$, einer wechselwirkenden Theorie den Ausdruck

$$H = H_0 + H_I \quad (12.17)$$

wo H_I durch (12.16) gegeben ist.

Im Heisenberg Bild ist die Dynamik der Feldoperatoren nun durch

$$\varphi(t, \vec{x}) = e^{itH} \varphi(\vec{x}) e^{-itH} \quad (12.18)$$

gegeben. (Damit diese Gleichung überhaupt Sinn

macht, müsste nachgewiesen werden, dass H auf dem Fockraum \mathcal{F} einen selbst adjungierten, nach unten beschränkten Operator definiert. Das ist im Beispiel (12.11) tatsächlich der Fall, wir lassen den länglichen Beweis aber weg.)

Nun kommen wir zur Definition des Vakuums, Ω , der wechselwirkenden Theorie: Dieses ist definiert als Grundzustand des Hamilton Operators H der wechselwirkenden Theorie, d.h. Ω ist der einzige Zustand im Fockraum, \mathcal{F} , der die Eigenschaft hat, dass

$$H\Omega = -E\Omega, \quad (12.19)$$

wo $-E = \inf \text{spec } H$ ist.

Dass es einen solchen Zustand überhaupt gibt ist wieder eine nicht-triviale Behauptung.

Auch sie kann im Beispiel (12.11), für H wie in (12.17), (12.18), bewiesen werden. Es gilt tatsächlich mehr, und das ist für eine logische Entwicklung der Störungstheorie im Rahmen der Hamilton-

schen Feldtheorie wichtig:

$$\langle \Omega | \alpha \rangle \neq 0, \quad (12.20)$$

für alle $x < \infty$ und g , mit $\text{supp } g$ kompakt.

Nun folgt aus dem Spektralsatz für H , dass

$$\mathcal{D} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} c_t \cdot e^{-it(H+E)} |\alpha\rangle \quad (12.21)$$

ist, wo

$$\begin{aligned} c_t^{-2} &= \langle \alpha | e^{-2it(H+E)} |\alpha \rangle \\ &\rightarrow \langle \Omega | \alpha \rangle^2, \text{ wenn } t \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (12.22)$$

[Um (12.21) aus dem bisher Gesagten herzuleiten, müsste man allerdings noch annehmen, dass $\text{spec } H \setminus \{\lambda_0\}$ zum absolut stetigen Spektrum von H gehört. Das stimmt i.A. nicht. Der Ausdruck auf der rechten Seite von (12.21) kann dann durch ein ergodisches Mittel über T ersetzt werden, was aber für das Folgende unwesentlich ist.] Nun

können wir die chronologischen Funktionen der approximativen, wechselwirkenden Theorie hin-

schreiben. Sei $x_{i1}^o \equiv t_1 > x_{i2}^o \equiv t_2 > \dots > x_{in}^o \equiv t_n$.

Dann gilt nach (12.1) und (12.21)

$$\langle \Omega, T[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] \Omega \rangle$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle 0 | e^{-itH} e^{it_1 H} \varphi(\vec{x}_{i1}) e^{-i(t_1 - t_2)H} \varphi(\vec{x}_{i2}) \dots e^{-i(t_n + t)H} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-2itH} | 0 \rangle} \quad (12.23)$$

Zur Berechnung der rechten Seite von (12.23) benützen wir das Wechselwirkungsbild von Dyson: Wir de-

finieren $U_W(t,s)$, wie in Kapitel 3, (3.55), durch

$$e^{-i(t-s)H} = e^{-itH_0} U_W(t,s) e^{isH_0}. \quad (12.24)$$

Da

$$e^{\pm itH_0} |0\rangle = |0\rangle,$$

und

$$e^{ix^0 H_0} \varphi(\vec{x}) e^{-ix^0 H_0} = \varphi_o(x^0, \vec{x}) = \varphi_o(x) \quad \left. \right\} (12.25)$$

folgt

$$\langle \Omega, T[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] \Omega \rangle$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle 0 | U_W(t, t_1) \varphi_o(x_{i1}) U_W(t_1, t_2) \dots \varphi_o(x_{in}) U_W(t_n, -t) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_W(t, -t) | 0 \rangle} \quad (12.26)$$

Diese Formel ist der Ausgangspunkt für die Störungsreihe. Um sie konkreter auszustellen, können wir nun die Theorie von Kapitel 3 benutzen, wo wir den Propagator $U_W(t, s)$ im Wechselwirkungsbild schon im Detail studiert haben: U_W erfüllt die Differentialgl.

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_W(t, s) &= H_W(t) U_W(t, s) \\ \text{mit der Anfangsbedg. bei } t=s \\ U_W(s, s) &= \mathbb{1} \end{aligned} \right\} \quad (12.27)$$

Dabei ist

$$H_W(t) = e^{itH_0} H_I e^{-itH_0}.$$

Für H_I wie in (12.16) finden wir

$$H_W(t) = \int d^3x : \mathcal{H}_I(\varphi_{0,x}(t, \vec{x})) : g(\vec{x}). \quad (12.28)$$

Die Störungsreihe für $U_W(t, s)$ in Potenzen von H_W

ist die Dyson - Reihe:

$$U_W(t, s) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} U_W^{(n)}(t, s),$$

wo

$$U_W^{(n)}(t, s) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_s^t dx_1 \dots \int_s^t dx_n T[H_W(x_1) \dots H_W(x_n)] \quad (12.29)$$

Die formale Summe von (12.29) über alle $n=0, 1, 2, \dots$

ist also durch

$$U_W(t, s) = T \left[\exp - i \int_s^t dz H_W(z) \right] \quad (12.30)$$

gegeben. Setzen wir die rechte Seite von (12.30) nun in (12.26) ein, so finden wir

$$\langle \Omega, T[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] \Omega \rangle$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} Z_{[-t, t]}^{-1} \langle 0 | T \left(e^{-i \int_{-t}^t dz H_W(z)} \right) \varphi_0(t_1, \vec{x}_{i_1}) \times \\ \times T \left(e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dz H_W(z)} \right) \dots \varphi_0(t_n, \vec{x}_{i_n}) T \left(e^{-i \int_{-t}^{t_n} dz H_W(z)} \right) | 0 \rangle$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} Z_{[-t, t]}^{-1} \langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n)] e^{-i \int_{-t}^t dz H_W(z)} | 0 \rangle$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} Z_{[-t, t]}^{-1} \langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n)] e^{-i \int d^4x : \mathcal{H}_I(\varphi_0, x)(x); g_t(x)} | 0 \rangle \quad (12.31)$$

wo

$$Z_{[-t, t]} = \langle 0 | T \left[e^{-i \int_{-t}^t dz H_W(z)} \right] | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T \left[e^{-i \int d^4x : \mathcal{H}_I(\varphi_0, x)(x); g_t(x)} \right] | 0 \rangle \quad (12.32)$$

Man bemerke, dass für $x \rightarrow \infty$, $g_t(x) \rightarrow 1$ (12.31)

und (12.32) formal Lorentz-invariante Distributionen sind, da $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$ eine skalare Dichte ist, und die Vakuum erwartungswerte zeitgeordneter Produkte freier Felder (und von deren Wickelpotenzen) Lorentz-invariante Distributionen sind.

und

$$g_t(x) = g(\vec{x}) \chi_{[-t,t]}(x^0) \quad (12.33)$$

ist. Die Formeln (12.31) und (12.32) bilden zusammen die sog. Gell-Mann-How Formel, welche die Grundlage der kovarianten, renormierten Störungstheorie bildet. Die formal durch (12.31) und (12.32) definierten chronologischen Funktionen

$$G(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle \Omega, T[\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)] \Omega \rangle$$

nennen wir "nackte" Green'sche Funktionen.

Es wird zu untersuchen sein, in welchem Sinne die Grenzwerte

$$x \rightarrow \infty \quad (\text{Ultraviolettlimes})$$

und

$$g_t(x) \rightarrow 1 \quad (\text{"thermodynamischer" oder "adiabatischer" Limes})$$

existieren. Dabei wird es sich herausstellen, dass wir in den interessanteren Fällen, z.B. in vier Raum-Zeit Dimensionen und mit $L_I(\varphi)$ wie in (12.11), bei der Untersuchung des Grenzwertes $\kappa \rightarrow \infty$

aus den nackten Green'schen Funktionen sog.
renommierte Green'sche Funktionen zu konstruieren
haben. Dies geschieht durch Re-Skalierung der
Felder $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$: Wir setzen

$$\varphi_{\text{ren.}}(x) = Z(x)^{-1/2} \varphi(x) \quad (12.34)$$

und definieren

$$\begin{aligned} G_{\text{ren.}}^{(x)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle \Omega, T[\varphi_{\text{ren.}}(x_1) \cdots \varphi_{\text{ren.}}(x_n)] \Omega \rangle \\ &= Z(x)^{-n/2} G(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (12.35)$$

Wir schränken nun unsere Untersuchung momentan auf das Beispiel (12.11) ein, d.h.

$$L_I(\varphi) = -\frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x) - \frac{\mu^2}{2!} \varphi^2(x).$$

Es stellt sich heraus, dass für $x < \infty$ und eine geeignete Wahl von $\mu^2 = \mu^2(x)$ das Problem der Existenz des adiabatischen Limes, zumindest im Rahmen der Störungstheorie, kein ernsthaftes Problem darstellt. Um unsere Diskussion nicht durch unnötig komplizierte Notationen zu verunstalten, stellen wir uns

daher vor, der adiabatische Limes sei schon konstruiert, d.h. $g_x(x) \equiv 1$, für beliebige, endliche Werte von x . Zu untersuchen bleibt die Existenz des Ultraviolet-Limes, $x \rightarrow \infty$. Das Hauptproblem der Renormierungstheorie kann wie folgt formuliert werden: Gibt es Funktionen

$$\lambda = \lambda(x), \mu^2 = \mu^2(x) \text{ und } Z = Z(x), \quad (12.36)$$

die für alle endlichen Werte von x endliche Werte annehmen, mit $\lambda(x) > 0$ und $Z(x) > 0$, für alle $x < \infty$, so, dass die in (12.35) definierten, renorurierten Green'schen Funktionen $\text{Gren.}^{(x)}(x_1, \dots, x_n)$ für $x \rightarrow \infty$ endliche Grenzwerte (im Sinne der Distributionen) besitzen, d.h.

$$\text{Gren.}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Gren.}^{(x)}(x_1, \dots, x_n) \quad (12.37)$$

existiert in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, und die Gren. die folgenden Eigenschaften besitzen:

i) nicht alle Gren. verschwinden, (d.h.

$\text{Gren.}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, für unendlich viele Werte

von n); und

ii) Die Green'schen Funktionen

$$\{ \text{Gren. } (x_1, \dots, x_n) \}_{n=0}^{\infty}$$

sind nicht die chronologischen Funktionen
eines freien Feldes.

Aufgrund einiger strenger Resultate wird
heute vermutet, dass in vier Raum-Zeit
Dimensionen im Beispiel (12.11) der $\lambda \phi^4$ -Theorie
das Hauptproblem der Renormierungstheorie keine
Lösung hat. Die Grenzwerte (12.37) existieren
zwar für eine ganze Anzahl möglicher Funktionen
 $\lambda(x)$, $\mu^2(x)$ und $Z(x)$, und i) ist erfüllt,
hingegen sind die Funktionen $\text{Gren. } (x_1, \dots, x_n)$
die chronologischen Funktionen eines freien Feldes.

In dieser Vorlesung beschränken wir uns
aber auf die störungstheoretische Untersuchung
des Hauptproblems der Renormierungstheorie, und
in diesem Rahmen hat es eine Lösung.

Nun ist es an der Zeit, zu erklären, was wir unter Störungstheorie überhaupt verstehen.

Sei $\lambda_{\text{ren.}} > 0$ eine vorgegebene endliche Zahl.

Gesucht sind Potenzreihen

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_{\text{ren.}} + \sum_{k=2}^{\infty} l_k \lambda_{\text{ren.}}^k, \\ \mu^2 &= \sum_{k=2}^{\infty} m_k \lambda_{\text{ren.}}^k, \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

und

$$Z = \sum_{k=2}^{\infty} z_k \lambda_{\text{ren.}}^k,$$

so, dass die Potenzreihenentwicklung von
 Gren. (x_1, \dots, x_n) in $\lambda_{\text{ren.}}$ in jeder Ordnung, k ,
 von $\lambda_{\text{ren.}}$ durch eine wohl-definierte Distribution
 gegeben ist, für alle Werte von n . Im Rahmen
 dieser Vorlesung können wir nicht einmal dieses
 Problem vollständig lösen; (wir werden nicht über
 $k=2$ hinaus gelangen). Es ist aber zu beliebigen
 Ordnungen k gelöst. Die erste wirklich befriedigende
 Lösung stammt von K. Hepp (CMP 1966). Sie
 basiert auf wichtigen Vorarbeiten von Bogoliubow

und Parasiuk, (die ihrerseits von Arbeiten von Stückelberg inspiriert waren. Das Renormierungsprogramm in etwa dieser Form wurde zuerst von F. Dyson formuliert.) Verfeinerungen der Arbeit von Hepp stammen von E. Speer, W. Zimmermann (\rightarrow BPHZ) und vielen anderen. Auf der Grundlage von Wilson's Renormierungsgruppe haben schliesslich Polchinski und, präziser, Gallavotti der störungstheoretischen Renormierungstheorie ein neues und konzeptuell äusserst klares Gewand gegeben.

Ausgangspunkt der Störungstheorie ist eine

Potenzreihenentwicklung von

$$T \left[\dots e^{-i \int d^4x : \mathcal{H}_I (\varphi_0(x)) :} \right] \quad (12.39)$$

in Potenzen von \mathcal{H}_I . (In den nun folgenden Formulaten Rechnungen lassen wir die Cutoffs x und $g_t(x)$ aus unserer Schreibweise weg.)

Man erinnere sich nun an (12.31) und (12.32).

Wir finden

$$\begin{aligned} Z G(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_p \langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n)] \\ &\quad \times : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_1)) : \dots : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_n)) : | 0 \rangle \end{aligned} \quad (12.40)$$

Es ist wichtig, daran zu erinnern, dass $| 0 \rangle$ das Fock-Vakuum ist und $\varphi_0(y)$ das freie Feld. Jeder Term auf der rechten Seite ist also durch ein Integral einer chronologischen Funktion des freien Feldes und seiner Wickelpotenzen gegeben. Nun wollen wir diese berechnen, indem wir sie durch Summen von Integralen von Produkten der Feynman Propagatoren, $i\Delta_F$, ausdrücken. Dies wird uns auf die Formulierung der Feynman Regeln führen. Ausgangspunkt dazu ist das Wick'sche Theorem.

Es sei $\varphi_0(x)$ ein freies, reelles Skalarfeld, $\varphi_0^{(+)}(x)$ der Anteil positiver Frequenz ($\propto \alpha^*$) und $\varphi_0^{(-)}(x)$ der Anteil negativer Frequenz ($\propto \alpha$). Das sog. Wick-Produkt von n freien Feldern ist wie folgt definiert:

$$: \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) : = \sum_{\pi} \varphi_0^{(+)}(x_{\pi_1}) \dots \varphi_0^{(+)}(x_{\pi_k}) \varphi_0^{(-)}(x_{\pi_{k+1}}) \dots \varphi_0^{(-)}(x_n) \quad (12.41)$$

Dabei erstreckt sich \sum_{π} über alle Zerlegungen, π , von $\{1, \dots, n\}$ in zwei disjunkte Teilmengen $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$, $\{\pi(k+1), \dots, \pi(n)\}$, $0 \leq k = k(\pi) \leq n$. Da die α^* 's miteinander kommutieren und die α 's miteinander kommutieren, ist das Wickprodukt von Bose Feldern kommutativ. (Für Fermi-Felder ist das Wickprodukt dagegen anti-symmetrisch unter Vertauschung zweier Felder.)

Wick'sches Theorem.

$$(1) T[\varphi_o(x_1)\varphi_o(x_2)] = : \varphi_o(x_1)\varphi_o(x_2) : + \langle 0 | T[\varphi_o(x_1)\varphi_o(x_2)] | 0 \rangle \quad (12.42)$$

$$\begin{aligned} (2) T[\varphi_o(x_1) \dots \varphi_o(x_n)] &= : \varphi_o(x_1) \dots \varphi_o(x_n) : \\ &+ \sum_{k < l} : \varphi_o(x_1) \dots \overset{\vee}{\varphi_o(x_k)} \dots \varphi_o(x_l) \dots \varphi_o(x_n) : \\ &\quad \times \langle 0 | T[\varphi_o(x_k)\varphi_o(x_l)] | 0 \rangle \\ &+ \dots + \sum_{k_1 < \dots < k_{2p}} : \varphi_o(x_1) \dots \overset{\vee}{\varphi_o(x_{k_1})} \dots \overset{\vee}{\varphi_o(x_{k_{2p}})} \dots \varphi_o(x_n) : \\ &\quad \times \sum_P \langle 0 | T[\varphi_o(x_{k_{P1}}), \varphi_o(x_{k_{P2}})] | 0 \rangle \dots \\ &\quad \quad \quad \times \langle 0 | T[\varphi_o(x_{k_{P(2p-1)}}), \varphi_o(x_{k_{P(2p)}})] | 0 \rangle \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (12.43)$$

Dabei erstreckt sich \sum_P über alle möglichen Paarungen, P,
der Menge $\{1, \dots, 2p\}$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad T(\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)) &= \Theta(x_1^0 - x_2^0)\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2) + \Theta(x_2^0 - x_1^0)\varphi_0(x_2)\varphi_0(x_1) \\
 &= \Theta(x_1^0 - x_2^0):\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2): + \Theta(x_2^0 - x_1^0):\varphi_0(x_2)\varphi_0(x_1): \\
 &\quad + \Theta(x_1^0 - x_2^0)[\varphi_0^{(-)}(x_1), \varphi_0^{(+)}(x_2)] + \Theta(x_2^0 - x_1^0)[\varphi_0^{(-)}(x_2), \varphi_0^{(+)}(x_1)] \\
 &= :\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2): + \Theta(x_1^0 - x_2^0)i\Delta^+(x_1 - x_2) \\
 &\quad + \Theta(x_2^0 - x_1^0)i\Delta^+(x_2 - x_1) \\
 &= :\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2): + i\Delta_F(x_1 - x_2).
 \end{aligned}$$

(2) Dies wird durch vollständige Induktion bewiesen,
wobei (1) zur Verankierung der Induktion benutzt
wird. Sei $x_{k_0}^0 > \max\{x_{k_1}^0, \dots, x_{k_n}^0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 T[\varphi_0(x_0) \dots \varphi_0(x_n)] &= \varphi_0(x_{k_0}) T[\varphi_0(x_{k_1}) \dots \varphi_0(x_{k_n})] \\
 IV &= \varphi_0(x_{k_0}): \varphi_0(x_{k_1}) \dots \varphi_0(x_{k_n}): \\
 &\quad + \varphi_0(x_{k_0}) \left\{ \sum_{i < j} : \varphi_0(x_{k_1}) \dots \varphi_0(x_{k_i}) \dots \varphi_0(x_{k_j}) \dots \varphi_0(x_{k_n}) : \right. \\
 &\quad \quad \quad \times \langle 0 | T[\varphi_0(x_{k_i}) \varphi_0(x_{k_j})] | 0 \rangle \\
 &\quad \quad \quad \left. + \dots \right\} \tag{12.44}
 \end{aligned}$$

(IV = Induktionsvoraussetzung).

Nun benützen wir, dass

$$\varphi_0(x_{k0}) : \varphi_0(x_{k1}) \cdots \varphi_0(x_{kn}) :$$

$$= (\varphi_0^{(+)}(x_{k0}) + \varphi_0^{(-)}(x_{k0})) : \varphi_0(x_{k1}) \cdots \varphi_0(x_{kn}) :$$

$$= ; \varphi_0(x_{k0}) \varphi_0(x_{k1}) \cdots \varphi_0(x_{kn}) :$$

$$+ \sum_{i=1}^n [\varphi_0^{(-)}(x_{k0}), \varphi_0^{(+)}(x_{ki})] : \varphi_0(x_{k1}) \cdots \overset{\checkmark}{\varphi_0(x_{ki})} \cdots \varphi_0(x_{kn}) : \quad (12.45)$$

Nun ist

$$[\varphi_0^{(-)}(x_{k0}), \varphi_0^{(+)}(x_{ki})] = i \Delta^{(+)}(x_{k0} - x_{ki}) \\ = i \Delta_F(x_{k0} - x_{ki}), \quad (12.46)$$

für $x_{k0}^0 > x_{ki}^0$. Wäre $x_{ki}^0 > \max\{x_{k0}^0, \dots, x_{ki}^0, \dots, x_{kn}^0\}$,

hätten wir statt dessen einen Term $\propto i \Delta^{(+)}(x_{ki} - x_{k0})$

erhalten. Die Summe dieses Terms, multipliziert

mit $\theta(x_{ki}^0 - x_{k0}^0)$, und von (12.46), multipliziert

mit $\theta(x_{k0}^0 - x_{ki}^0)$, ergibt dann tatsächlich

$$: \varphi_0(x_{k0}) \cdots \varphi_0(x_{kn}) :$$

$$+ \sum_{i=1}^n i \Delta_F(x_{k0} - x_{ki}) : \varphi_0(x_{k1}) \cdots \overset{\checkmark}{\varphi_0(x_{ki})} \cdots \varphi_0(x_{kn}) : \quad (12.47)$$

Die übrigen Terme auf der rechten Seite von (12.44) formt man nun alle mit Hilfe der gleichen Identität um, nämlich

$$\begin{aligned}
 & T[\varphi_0(x_{k_0}) : \varphi_0(x_{k_1}) \cdots \varphi_0(x_{k_p}) :] \\
 &= : \varphi_0(x_{k_0}) \cdots \varphi_0(x_{k_p}) : + \sum_{i=1}^p i \Delta_F(x_{k_0} - x_{k_i}) \\
 &\quad \times : \varphi_0(x_{k_1}) \cdots \overset{\checkmark}{\varphi_0(x_{k_i})} \cdots \varphi_0(x_{k_p}) : \tag{12.48}
 \end{aligned}$$

((12.48) wurde eben für $p=n$ bewiesen.) Dies aber führt sofort auf die Aussage (12.43), aber für ein T -Produkt von $n+1$ Feldern.

Q.E.D.

Wir erwähnen hier noch eine nützliche Notation für das Wick'sche Theorem:

$$\begin{aligned}
 T[\varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(x_n)] &= : \varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(x_n) : \\
 &+ : \underbrace{\varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2) \cdots \varphi_0(x_n)} : \\
 &+ : \underbrace{\varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2) \varphi_0(x_3) \cdots \varphi_0(x_n)} : \\
 &+ \cdots + : \underbrace{\varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(x_{n-1}) \varphi_0(x_n)} :
 \end{aligned}$$

$$+ : \varphi_0(x_1) \underbrace{\varphi_0(x_2)}_{\text{---}} \underbrace{\varphi_0(x_3)}_{\text{---}} \varphi_0(x_4) \cdots \varphi_0(x_n) : + \cdots$$

$$+ : \varphi_0(x_1) \cdots \underbrace{\varphi_0(x_{n-3})}_{\text{---}} \underbrace{\varphi_0(x_{n-2})}_{\text{---}} \underbrace{\varphi_0(x_{n-1})}_{\text{---}} \varphi_0(x_n) :$$

+ ----

(12.49)

Dabei steht

$$\boxed{AB} \text{ für } \langle 0 | T[AB] | 0 \rangle.$$

Nun müssen wir das Wick'sche Theorem auf den Fall eines T-Produktes von Wick-Monomen freier

Felder verallgemeinern, dann solche kommen in der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktionen in (12.31), (12.32), (12.39) vor, da ja $: \mathcal{H}_I(\varphi_0) :$ ein Wickpolynom des freien Feldes ist. Diese Aufgabe ist nicht schwierig. Wir benutzen dazu die folgende Produktformel für Wick-Produkte:

$$: \varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(x_p) : : \varphi_0(y_1) \cdots \varphi_0(y_q) :$$

$$= : \varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(y_q) :$$

$$+ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \underbrace{[\varphi_0^{(-)}(x_i), \varphi_0^{(+)}(y_j)]}_{i \Delta^+(x_i - y_j)} : \varphi_0(x_1) \cdots \overset{\vee}{\varphi_0(x_i)} \cdots \overset{\vee}{\varphi_0(y_j)} \cdots \varphi_0(y_q) :$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i_1, i_2=1}^p \sum_{j_1 < j_2} [\varphi_o^{(-)}(x_{i_1}), \varphi_o^{(+)}(y_{j_1})] [\varphi_o^{(-)}(x_{i_2}), \varphi_o^{(+)}(y_{j_2})] \\
 & \times : \varphi_o(x_1) \cdots \overset{\vee}{\varphi_o(x_{i_1})} \cdots \overset{\vee}{\varphi_o(y_{j_2})} \cdots \varphi_o(y_q) : \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{12.50}$$

Diese Identität folgt leicht aus der Definition (12.41) der Wickprodukte. Sie kann auf ein T-Produkt zweier Wickmonome ausgedehnt werden, falls man definiert, dass

$$T[: \varphi_o(x_1) \cdots \varphi_o(x_p) :] = : \varphi_o(x_1) \cdots \varphi_o(x_p) : \tag{12.51}$$

und fordert, dass T angewendet auf

$$:\varphi_o(x_1) \cdots \varphi_o(x_p) : : \varphi_o(y_1) \cdots \varphi_o(y_q) : \tag{12.52}$$

nur die relative Zeitordnung zwischen den $\varphi(x_i)$ und den $\varphi(y_j)$, aber nicht diejenige der $\varphi(x_i)$, resp. $\varphi(y_j)$ untereinander, festlegt. Um

$T[: \varphi_o(x_1) \cdots \varphi_o(x_p) : : \varphi_o(y_1) \cdots \varphi_o(y_q) :]$ auszurechnen, müssen dann in (12.50) einfach die $i\Delta^+$ -Distributionen durch die $i\Delta_F$ -Distributionen ersetzt werden.

Diese Regeln führen mit (12.43), resp. (12.49) auf die Identität

$$T(T(A \cdot B) \cdot C) = T(A \cdot B \cdot C) \tag{12.53}$$

Ausgehend von (12.51) - (12.53) können wir nun mit vollständiger Induktion das verallgemeinerte Wick'sche Theorem beweisen:

$$\begin{aligned} T \left[\prod_{\alpha=1}^m : \varphi_0(x_1^\alpha) \cdots \varphi_0(x_{p_\alpha}^\alpha) : \right] \\ = T' \left[\prod_{\alpha=1}^m (\varphi_0(x_1^\alpha) \cdots \varphi_0(x_{p_\alpha}^\alpha)) \right], \quad (12.54) \end{aligned}$$

wo in $T'[\dots]$ keine Kontraktionen zwischen $\varphi_0(x_i^\alpha)$ und $\varphi_0(x_j^\alpha)$, für irgend welche α, i, j , vorkommen. Das kann auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} T \left[\prod_{\alpha=1}^m : \varphi_0(x_1^\alpha) \cdots \varphi_0(x_{p_\alpha}^\alpha) : \right] \\ = T \left[\prod_{\alpha=1}^m (\varphi_0(x_1^\alpha) \cdots \varphi_0(x_{p_\alpha}^\alpha)) \right] \\ - \sum : \underbrace{\cdots \varphi_0(x_i^\alpha) \cdots}_{\square} \varphi(x_j^\alpha) \cdot \underbrace{\cdots :}_{\square} : \quad (12.55) \end{aligned}$$

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun die Feynman-Regeln zur störungstheoretischen Auswertung der Gell-Mann-Low Formel herleiten.

Wir betrachten die unnormalisierte, chronologische Funktion

$$Z G(x_1, \dots, x_n) = Z \langle 0, T[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] \rangle \langle 0 \rangle$$

$$= Z \langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n)] e^{-i \int d^4x : \mathcal{H}_I(\varphi_0(x)) :} | 0 \rangle \quad (12.56)$$

Um unsere Diskussion nicht zu abstrakt zu gestalten, nehmen wir nun an, dass

$$\mathcal{H}_I(\varphi_0) = \frac{\lambda}{4!} \varphi_0^4 \quad (12.57)$$

ist; aber der allgemeine Fall folgt den unten angegebenen Linien. Durch Entwicklung der Exponentialfunktion in eine Potenzreihe finden wir

$$(12.56) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int d^4y_1 \dots \int d^4y_p \langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n)] \times : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_1)) : \dots : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_n)) : | 0 \rangle$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^p}{p!} \int d^4y_1 \dots \int d^4y_p \langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n)] \times \frac{: \varphi_0^4(y_1) :}{4!} \dots \frac{: \varphi_0^4(y_p) :}{4!} | 0 \rangle \quad (12.58)$$

Auf die T -Produkte auf der rechten Seite von (12.58) wenden wir nun das verallgemeinerte Wick'sche Theorem an und benützen, dass

$$\langle 0 : \varphi_0(z_1) \cdots \varphi_0(z_q) : 10 \rangle = 0.$$

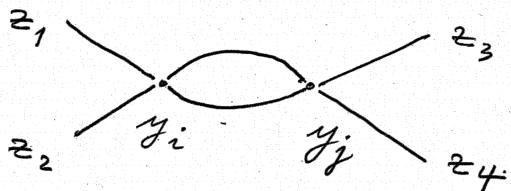
Dann sehen wir sofort, dass nur Green'sche Funktionen mit einer geraden Zahl, $n=2k$, von Argumenten von 0 verschieden sind; ($\varphi_0 \rightarrow -\varphi_0$ Symmetrie von $|0\rangle$ und \mathcal{H}_I). Den Beitrag jester Ordnung zu (12.58) berechnen wir nun mit Hilfe des Wick'schen Theorems. Dann kann man ihn als Summe von Termen schreiben, die durch Feynman Diagramme indiziert werden können, (d.h. durch Kontraktions schemata). Die Punkte x_1, \dots, x_{2k} sind Endpunkte äusserer Linien und y_1, \dots, y_p Vertices dieser Diagramme. Von jedem Vertex gehen vier Linien aus, und jede Linie verbindet zwei Punkte; (x_i mit x_j , x_i mit y_j und y_m mit y_n , für $m \neq n$) Eine Linie zwischen z_i und z_j entspricht einem Feynman Propagator $\varphi(z_i)\varphi(z_j) = i \Delta_F(z_i - z_j)$. Mit jedem Vertex y_j verbinden wir einen Faktor $-i\lambda$. Schliesslich multiplizieren wir das Diagramm

G mit einem Symmetriefaktor S_G^{-1} der aufzählt, wie oft dasselbe Diagramm G durch verschiedene Kontraktionen erzeugt wird:

Wenn wir alle 4 Felder in $\frac{\phi^4(y_j)}{4!}$ mit

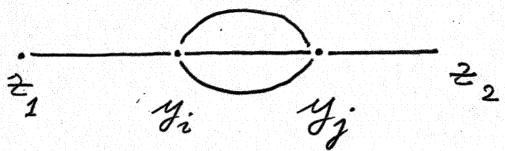
4 Feldern verschiedener Argumente kontrahieren, so ist $4!$ die Zahl der möglichen Kontraktionen, die auf die gleichen Linien führen. Dieser Faktor kompensiert das $1/4!$ im Vertex. Wenn aber zwei Linien, die vom Vertex in y_j ausgehen, am selben Punkt y_i enden, so werden die Faktoren $1/4!$ der Vertices y_i und y_j nur teilweise kompensiert.

Beispiel 1:



$$\sim \left(\frac{1}{4!}\right)^2 \times 4 \cdot 3 (\# \text{ Kontr. zwischen } z_1 \text{ und } y_i \text{ und } z_2 \text{ und } y_i) \times 4 \times 3 (\# \text{ Kontr. } z_3 \leftrightarrow y_j, z_4 \leftrightarrow y_j) \times 2 (\# \text{ verbleibende Kontr. zwischen } y_i \text{ und } y_j)$$

$$= \frac{1}{2!}$$

Beispiel 2.

$$\sim \left(\frac{1}{4!}\right)^2 \times 4 (\# \text{ Kontr. zwischen } z_1 \text{ und } y_i) \\ \times 4 (\# \text{ Kontr. zwischen } z_2 \text{ und } y_j) \\ \times 3! (\# \text{ verbleibenden Kontr. zwischen } y_i \text{ und } y_j) \\ = \frac{1}{3!}$$

Allgemein ist der Faktor S_G die Ordnung der Gruppe der Permutationen der (inneren) Linien, die die Vertices festlassen, was man in den Beispielen leicht verifiziert und auch allgemein ohne grosse Mühe nachweist.¹⁾

Selbstverständlich bleibt ein globaler Faktor $\frac{1}{p!}$ für Diagramme p ter Ordnung, der eine wichtige Rolle spielt — wie wir noch sehen werden.

Wir fassen nun diese Regeln zusammen:

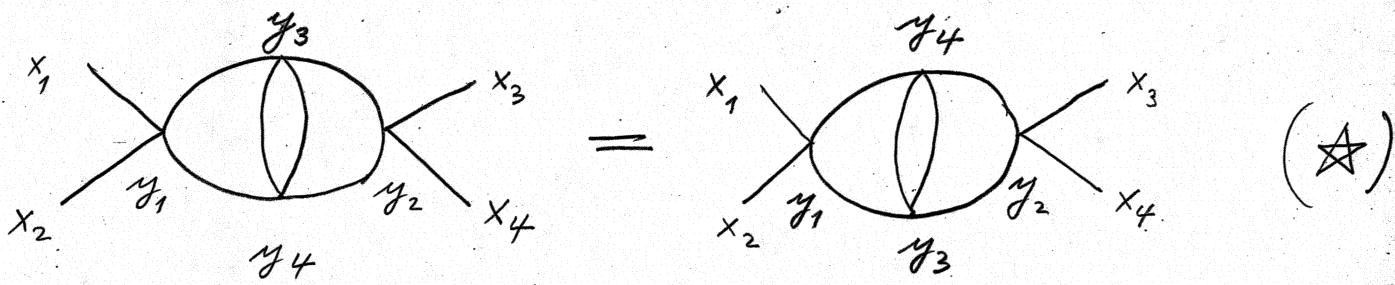
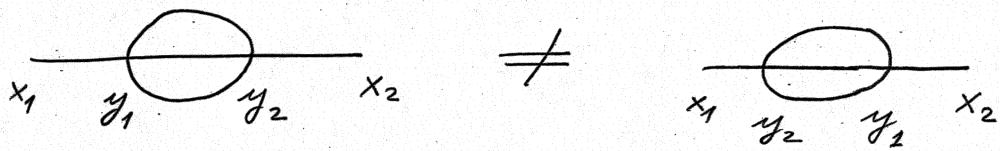
¹⁾ Der Beweis kann induktiv geführt werden, indem man zu einem Diagramm $(p-1)$ ter Ordnung einen weiteren Vertex hinzufügt und mit dem Diagramm kontrahiert.

Feynman - Regeln für die $\lambda \phi^4$ Theorie, (pte Ordnung).

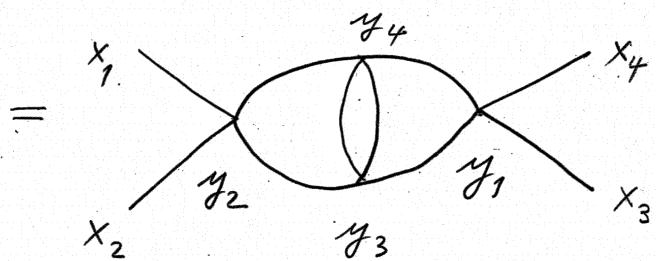
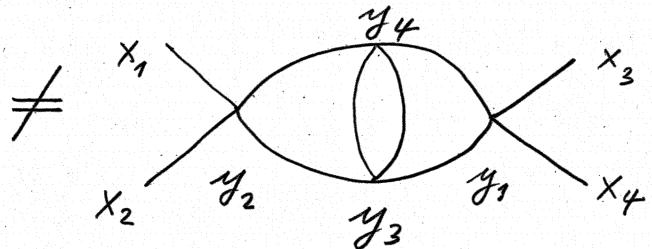
- 1) Zeichne alle verschiedenen Diagramme mit $2k$ äusseren Endpunkten x_1, \dots, x_{2k} und p Vertices, y_1, \dots, y_p , der Ordnung 4. Mit jedem solchen Diagramm, G , ist eine Zahl zu verbinden, die wie folgt zu berechnen ist :
- 2) Jedem Vertex gebe man einen Faktor $-i\lambda$
- 3) Jeder Linie zwischen zwei Punkten z und z' ordne man einen Feynman - Propagator $i\Delta_F(z-z')$ zu.
- 4) Man integriere über y_1, \dots, y_p
- 5) Man dividiere durch den Symmetrie Faktor, S_G , des Diagramms.
- 6) Den Beitrag pter Ordnung erhält man durch Summation der Beiträge aller verschiedenen Diagramme und Division durch p !

Bemerkung. Im Konfigurationsraum sind zwei Diagramme als verschieden zu betrachten, falls sie für feste $x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_p$ topologisch (im Sinne der Theorie von Graphen mit markierten Vertices) verschieden sind.

Beispiele:



durch C von nur $y_1 - y_2$.



Bis anhin haben wir erklärt, wie man $ZG(x_1, \dots, x_{2k})$ durch Feynman-Amplituden (\equiv Breiträge, die Feynman-Diagrammen zugeordnet sind) ausdrücken

kann. Diese Rechenregeln gestatten natürlich auch, Z zu berechnen. Die Diagramme, die Beiträgen zu Z entsprechen, haben keine äußeren Linien, (d.h. Linien, die in äußeren Punkten x_1, \dots, x_{2k} enden). Man nennt sie Vakuum-Diagramme.

Nun interessieren wir uns tatsächlich für den Wert von $G(x_1, \dots, x_{2k})$, müssen also ZG noch durch Z dividieren. In der Störungstheorie ist das eine Division formaler Potenzreihen, die man mit Hilfe des "linked cluster" Theorems geschlossen durchführen kann.

Dazu definieren wir eine Teilkasse, \mathcal{C} , von Feynman-Diagrammen:

$\mathcal{C} = \{ \text{alle Diagramme, die keine Teildiagramme enthalten, die mit ihrem Komplement nicht verbunden sind und Vakuum-Diagramme sind} \}$

Beliebige Feynman-Diagramme entstehen aus Diagrammen in der Klasse \mathcal{C} durch Zufügen beliebiger Vakuum-Diagramme. Bezeichnen wir die

Klasse aller Diagramme mit \mathcal{I} und die Klasse aller Vakuum-Diagramme mit \mathcal{V} , so gilt offenbar

$$\mathcal{C} = \mathcal{I}/\mathcal{V}.$$

Nun finden wir ganz allgemein, dass

$$Z G(x_1, \dots, x_{2k})$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int d^4 y_1 \cdots \int d^4 y_p \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \langle 0/T[\varphi_0(x_1) \cdots \\ \times \varphi(x_{2k}) : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_1)) : \cdots : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_j)) :] | 0 \rangle^c \\ \times \langle 0/T[: \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_{j+1})) : \cdots : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_p)) : | 0 \rangle, \quad (12.59)$$

wo $\langle 0/T[\cdots] | 0 \rangle^c$ dadurch berechnet wird, dass

man von $\langle 0/T[\cdots] | 0 \rangle$ alle diejenigen Beiträge weglässt, die nicht Diagrammen der Klasse \mathcal{C} entsprechen. Der kombinatorische Faktor $\binom{p}{j}$ hat seinen Ursprung in dem Umstande, dass wir aus den p Vertices, y_1, \dots, y_p , j auswählen müssen, die mit x_1, \dots, x_{2k} und unter sich zu verbinden sind, und weitere $p-j$, die nur unter sich zu verbinden sind.

Für festes j , ergeben aber alle solchen Wahlen nach
Integration über y_1, \dots, y_p das gleiche Resultat.

$$\text{Nun benützen wir, dass } \frac{1}{p!} \binom{p}{j} = \frac{1}{j!(p-j)!}$$

nennen $p-j = q$ und summieren die rechte Seite
von (12.59) über q . Das ergibt dann

$$\begin{aligned} Z G(x_1, \dots, x_{2k}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_j \langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \\ &\quad \times \varphi_0(x_{2k}) : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_1)) : \dots : \mathcal{H}_I(\varphi_0(y_j)) :] | 0 \rangle^C \\ &\quad \times \sum \end{aligned} \quad (12.60)$$

Nach Division durch Z tragen zur rechten Seite
von (12.60) keine Diagramme mit Vakuum-Teil-
diagrammen mehr bei.

Nun definieren wir die sog. zusammenhängenden
oder trunkierten Green'schen Funktionen: Sei

$I = \{1, \dots, n\}$. Sei $\{I_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ eine beliebige

Zerlegung von I in zwei oder mehr, nicht-leere
disjunkte Teilmengen. Dann definieren wir
induktiv die zusammenhängenden Green'schen

Funktionen $G^c(x_1, \dots, x_n)$ durch die Gleichungen

$$G(x_1, \dots, x_n) = G^c(x_1, \dots, x_n) + \sum_{\substack{\{I_\alpha\}_{\alpha=1}^\alpha \\ \alpha \geq 2}} \prod_\alpha G^c(\{x_j\}_{j \in I_\alpha}), \quad (12.61)$$

wobei

$$G^c(x) = G(x), \quad (12.62)$$

$$G^c(x, y) = G(x, y) - G(x)G(y)$$

Man zeigt nun induktiv, dass zu $G^c(x_1, \dots, x_n)$ nur vollständig zusammenhängende Feynman-Diagramme (aus der Klasse C) beitragen.

Man nehme an, dies sei für $G^c(x_1, \dots, x_j)$, mit $j \leq n-1$, schon bewiesen. Nun entwickeln wir

$G(x_1, \dots, x_n)$ nach Feynman-Diagrammen der Klasse C.

Nach Induktionsvoraussetzung kann jeder Faktor $G^c(\{x_j\}_{j \in I_\alpha})$ in eine Summe von zusammenhängenden Diagrammen entwickelt werden. Wir betrachten $G^c(\{x_j\}_{j \in I_\alpha})$ in der Ordnung p_α ,

mit $\sum_{\alpha=1}^\alpha p_\alpha = p$, und $G(x_1, \dots, x_n)$ in der Ordnung p . Zu $G(x_1, \dots, x_n)$ tragen in der Ord-

nung p Diagramme bei, die in a zusammenhängende Teildiagramme mit p_1, \dots, p_a Vertices zerfallen. Aus den Vertices y_1, \dots, y_p müssen wir p_1, \dots, p_a auswählen und verbinden dann die p_a ausgewählten Vertices mit $\{x_j\}_{j \in I_\alpha}$. Nach Integration über y_1, \dots, y_p ergeben alle diese Wahlen, für feste p_1, \dots, p_a , dasselbe Resultat.

Das ergibt einen kombinatorischen Faktor

$$\frac{p!}{p_1! \cdots p_a!}$$

Das $p!$ kompensiert das $\frac{1}{p!}$. Das Resultat ist also gerade das Produkt der Beiträge p_α ter Ordnung zu $G^c(\{x_j\}_{j \in I_\alpha})$ über alle α von 1 bis a . Die einzigen zu $G(x_1, \dots, x_n)$ beitragenden Diagramme, die in den zu

$$\sum_{\{\mathcal{I}_\alpha\}_{\alpha=1}^a} \prod_{\alpha} G^c(\{x_j\}_{j \in I_\alpha})$$

$\alpha \geq 2$

beitragenden Diagrammen noch nicht inbegriffen sind, sind also die total zusammenhängenden

Diagramme. Ihre Summe muss daher $G^c(x_1, \dots, x_n)$ ergeben.

Dieses Ergebnis ist das "linked cluster" Theorem, das damit nun bewiesen ist.

Nun wollen wir die Feynman-Regeln auch noch für die Fourier-transformierten, chronologischen Funktionen

$$\hat{G}^{(c)}(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n e^{-i \sum_1^n p_j \cdot x_j} G^{(c)}(x_1, \dots, x_n) \quad (12.63)$$

$$(G^{(c)}(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} e^{i \sum_1^n p_j \cdot x_j} \hat{G}^{(c)}(p_1, \dots, p_n))$$

zusammenstellen. Aufgrund der Translationsinvarianz ($g_t(x) \rightarrow 1!$) ist $\hat{G}^{(c)}$ von der Form:

$$\hat{G}^{(c)}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \tilde{G}^{(c)}(p_1, \dots, p_n).$$

Nun setzen wir auf der rechten Seite von (12.63) die Störungsentwicklung (12.60) ein und integrieren dann über alle x und y . Integration über x_j ergibt die Fourier-transformierte von $i\Delta_F(x_j - z)$, also

$$i(p_j^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1} e^{ip_j \cdot z},$$

wo $z \in \{x_1, \dots, \overset{\vee}{x}_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p\}$, (in p ter Ordnung). Nun ersetzen wir alle noch verbleibenden Propagatoren $i\Delta_F(z-z')$ durch

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (z-z')} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Dann können wir die Integrationen über y_1, \dots, y_p ausführen: Die y_j -Abhängigkeit ist von der Form

$$e^{iy_j \cdot q_j},$$

wo q_j die Summe der im Vertex y_j ein- oder auslaufenden Impulse ist; (ein einlaufender Impuls wird positiv, ein auslaufender negativ gezählt). Dann benutzt man einfach, dass

$$\int d^4 y_j e^{iy_j \cdot q_j} = (2\pi)^4 \delta^4(q_j).$$

(Impulserhaltung an jedem Vertex)

Alle Permutationen der Vertices y_1, \dots, y_p ergeben nach den y -Integrationen den gleichen Beitrag.

Hingegen ergeben nicht alle Permutationen von y_1, \dots, y_p notwendigerweise topologisch verschiedene Diagramme im Konfigurationsraum. (Z.B. spielen in  y_3 und y_4 äquivalente Rollen, so dass ihre Vertauschung nicht auf ein neues Diagramm führt.) Für jedes Diagramm G der Ordnung p in \mathcal{H}_I unterteilen wir die p Vertices in Gruppen von v_1, v_2, \dots, v_s Vertices, die unter sich vertauscht werden können, ohne die Topologie des Diagrammes zu ändern. Integration über y_1, \dots, y_p ergibt daher einen kombinatorischen Faktor

$$\frac{p!}{v_1! \cdots v_s!} \quad (12.64)$$

für G . Das $p!$ kompensiert das $\frac{1}{p!}$. Der verbleibende Faktor $1/(v_1! \cdots v_s!)$ heißt Vertex-Symmetriefaktor.

Damit haben wir (jedenfalls für die $2g^4$ -Theorie) die folgenden Impulsraum-Feynman-Regeln gefunden. Um den Beitrag p ter Ordnung in \mathcal{H}_I zu $\hat{G}(p_1, \dots, p_{2n})$ zu berechnen, gehe man wie folgt vor:

1. Man zeichne alle topologisch verschiedenen Diagramme mit p Vertices der Ordnung 4 und $2n$ äusseren Linien, die ein laufende Impulse p_1, \dots, p_{2n} tragen. Diese Diagramme sollen keine Vakuum - Teildiagramme enthalten, (d.h. sie sollen zur Klasse C gehören). Jeder inneren Linie ordne man einen (orientierten) Impuls, k_e , zu.
2. Der jten äusseren Linie ordne man den Faktor $i (p_j^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}$ zu.
3. Der lten inneren Linie ordne man
$$i \frac{d^4 k_e}{(2\pi)^4} (k_e^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}$$

zu.

4. Dem jten Vertex ordne man
$$-i \ell (2\pi)^4 \delta^4(q_j)$$

zu, wo q_j die Summe aller in j einlaufenden Impulse ist.

5. Man integriere über alle k -Variablen und dividiere das Resultat durch den Symmetrie Faktor der inneren Linien (S_G) und Vertices ($v_1! \dots v_s!$) des vorliegenden Diagrammes.
6. Man summiere die Beiträge aller topologisch verschiedenen Diagramme.

Zusatzskript zum Thema "Strommatrix und
Wirkungsquerschnitte".

Einführung: Altes Skript bis und mit (11.12)

Schluss: Altes Skript, ab (11.24) (S. 256),
bis S. 260.

11. Definition von Wirkungsquerschnitten

In diesem Kapitel rekapitulieren wir die Definition der Streumatrix, S , und erklären den Zusammenhang zwischen der Streumatrix und dem Wirkungsquerschnitt. Der Einfachheit halber studieren wir die Streuung spinloser Teilchen, mit Betonung auf der Streuung zweier einlaufender Teilchen – wie man sie im Experiment i.a. antrifft.

11.1 Rekapitulation der Definition der Streumatrix

Sei $\varphi(t, \vec{x})$ ein wechselwirkendes Skalarfeld einer Quantenfeldtheorie mit Hilbertraum \mathcal{H} und Hamilton Operator H . Sei $D \subseteq \mathcal{H}$ der in \mathcal{H} dichte Bereich, auf dem $\varphi(t, \vec{x})$ als operatorwertige Distribution definiert ist. Es sei

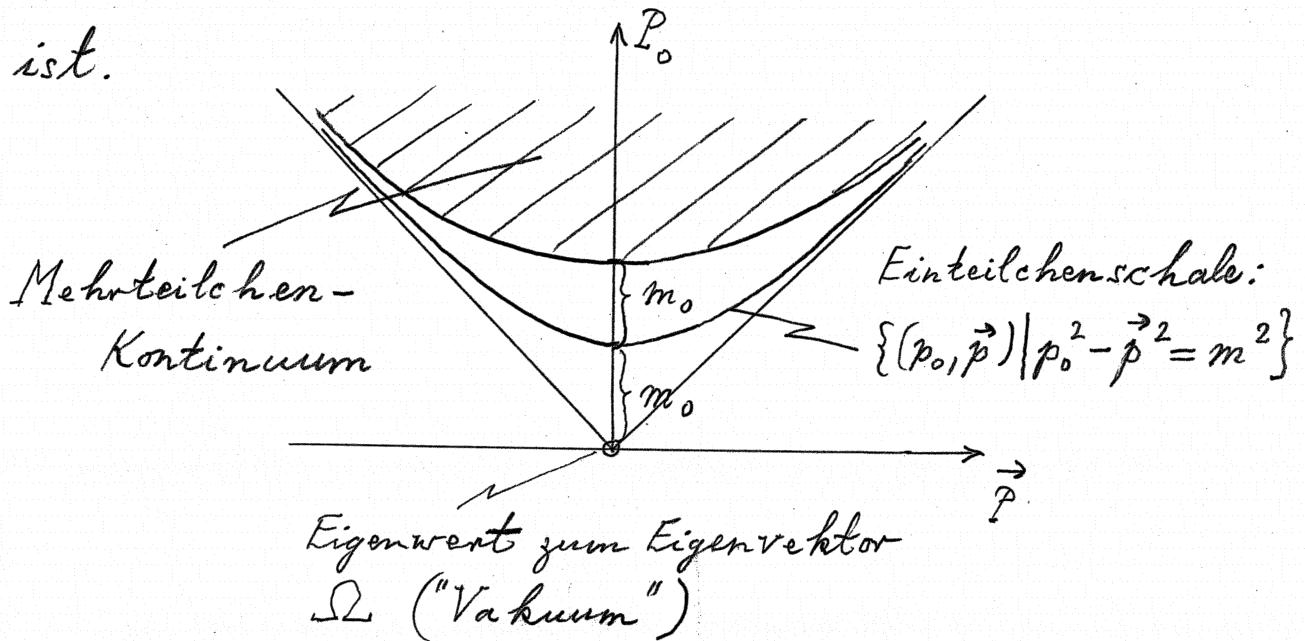
$$\hat{\varphi}(p_0, \vec{p}) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3x dt \varphi(t, \vec{x}) e^{-ip \cdot x} \quad (11.1)$$

die Fouriertransformierte von $\varphi(t, \vec{x})$; ($p \cdot x := p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{x}$).

Es sei $h^+(p_0, \vec{p})$ eine Testfunktion im Schwartz Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, d^4p)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\text{supp } h^+ \cap \text{spec}(P_0, \vec{P}) \subseteq \{(p_0, \vec{p}) \mid p_0^2 - \vec{p}^2 = m_0^2\} \quad (11.2)$$

wo m_0 die Masse eines stabilen Teilchens der Theorie ist. Dabei bedeuten $\text{supp } h^+$ den Träger von h^+ und $\text{spec}(P_0, \vec{P})$ das gemeinsame Spektrum von $P_0 =: H$ (Hamilton Operator) und \vec{P} (Impulsoperator), das in der untenstehenden Figur dargestellt ist.



Wir definieren

$$h^-(p_0, \vec{p}) := h^+(-p_0, \vec{p}). \quad (11.3)$$

Wir betrachten nun die Operatoren

$$\varphi_t(h^+):=\int d^4p \hat{\varphi}(p_0, \vec{p}) h^+(p_0, \vec{p}) e^{i(p_0 - \omega(\vec{p}))t}, \quad (11.4)$$

und

$$\varphi_t(h^-):=\int d^4p \hat{\varphi}(p_0, \vec{p}) h^-(p_0, \vec{p}) e^{i(p_0 + \omega(\vec{p}))t}, \quad (11.5)$$

mit $\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Man bemerke, dass

$$\varphi_t(h^\pm) = e^{itH} \varphi(h_{-t}^\pm) e^{-itH}, \quad (11.6)$$

wo

$$h_{-t}^\pm(p_0, \vec{p}):= h^\pm(p_0, \vec{p}) e^{\pm i\omega(\vec{p})t}.$$

Die LSD Asymptotenbedingung fordert, dass

$$\underset{t \rightarrow \pm \infty}{w\text{-}\lim} \varphi_t(h^+) = Z'' \underset{\text{out}}{\alpha}_{\text{in}}^*(h^+), \quad (11.7)$$

$$\underset{t \rightarrow \pm \infty}{w\text{-}\lim} \varphi_t(h^-) = Z'' \underset{\text{out}}{\alpha}_{\text{in}}^*(h^-),$$

auf dem in \mathcal{H} dichten Bereich D . Dabei sind

$$\alpha_{as}^*(h^+):= \int d\hat{p} \hat{h}^+(\omega(\vec{p}), \vec{p}) \alpha_{as}^*(\vec{p}) \quad (11.8)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_{as}(h^-):&= \int d\hat{p} \underbrace{\hat{h}^-(-\omega(\vec{p}), \vec{p})}_{= h^+(\omega(\vec{p}), \vec{p})} \alpha_{as}(\vec{p}), \end{aligned}$$

mit "as" = "out" oder "in", und $d\hat{p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{p})}$

Die Formeln (11.7) folgen aus (10.1) und (10.9).

Die Operatoren $\alpha_{as}^{\#}(\vec{p})$ erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\alpha_{as}^{\#}(\vec{p}), \alpha_{as}^{\#}(\vec{p}')] &= 0, \\ [\alpha_{as}(\vec{p}), \alpha_{as}^*(\vec{p}')] &= 2(2\pi)^3 \omega(\vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Wir nehmen an, die von uns betrachtete Quantenfeldtheorie habe die Eigenschaft der asymptotischen Vollständigkeit:

$$(i) \quad \alpha_{as}(\vec{p}) \Omega = 0, \quad \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^3, \quad (11.10)$$

wo Ω der Vakuum Vektor der Theorie ist.

Sei \mathcal{H}_{as} der Hilbertraum (\cong Fockraum), der von den Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{j=1}^n d\hat{p}_j \underbrace{h^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)}_{\text{total symm. in } \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n} \alpha_{as}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{as}^*(\vec{p}_n) \Omega, \quad (11.11)$$

mit

$$\int_{j=1}^n d\hat{p}_j |h^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)|^2 < \infty,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, erzeugt wird; "as" = "out" oder "in".

(ii) Wir nehmen an, dass

$$\mathcal{H}_{\text{out}} = \mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}. \quad (11.12)$$

Die Forderung (11.12) ist hochgradig nicht-trivial und ist in Beispielen von Quantenfeld-theorien i.a. unbewiesen.

Zu bemerken ist noch, dass aus (11.6) und (11.7) folgt, dass

$$e^{itH} \alpha_{as}^*(h) e^{-itH} = \alpha_{as}^*(e^{it\omega(\cdot)} h) \quad (11.13)$$

und

$$e^{itH} \alpha_{as}(h) e^{-itH} = \alpha_{as}(e^{-it\omega(\cdot)} h),$$

woraus man (i) sofort herleitet.

Aus (11.6) - (11.8) und (i), (ii) ergibt sich die Definition der S-Matrix, S , als desjenigen unitären Operators auf \mathcal{H} , der α_{in}^* in α_{out}^* konjugiert:

$$\alpha_{out}^*(h) = S \alpha_{in}^*(h) S^* \quad (11.14)$$

mit

$$S \Omega = S^* \Omega = \Omega. \quad (11.15)$$

Sei $\Phi \in \mathcal{H}_{as}$ der Vektor

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j h^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \alpha_{as}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{as}^*(\vec{p}_n) \Omega \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad (11.16)$$

mit

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j \|h^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)\|^2 < \infty.$$

Man nimmt in der Herleitung der LSZ Reduktionsformeln an, dass, falls $h^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})$, $\forall n$, und nur endlich viele $h^{(n)}$ von 0 verschieden sind, der Vektor Φ im Bereich D liegt, auf dem (11.7) gültig ist. Die Wellenfunktionen $h^{(n)}$ der Konfigurationen von n einlaufenden ($as = in$), resp. auslaufenden ($as = out$) Teilchen bestimmen sich auf Grund von (11.9) - (11.11) aus der Formel

$$h^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \alpha_{as}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{as}^*(\vec{p}_n) \Omega, \Phi \rangle \quad (11.17)$$

Wir betrachten nun Übergangsamplituden zwischen Vektoren in \mathcal{H}_{in} und \mathcal{H}_{out} .

Es sei

$$\Phi_{in} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j h^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \alpha_{in}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{p}_n) \Omega \right\}_{n=0}^{\infty}$$

und

$$\Psi_{out} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \alpha_{out}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{out}^*(\vec{p}_n) \Omega \right\}_{n=0}^{\infty}$$

(11.14), (11.15)

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) S \alpha_{in}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{p}_n) \Omega \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$= S^* \Psi_{in}.$$

Dann ist die Übergangsamplitude von Φ_{in} nach

Ψ_{out} gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{out}, \Phi_{in} \rangle &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \int \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \times \\ &\quad \times \int \prod_{k=1}^m d\hat{q}_k h^{(m)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m) \times \\ &\quad \times \underbrace{\left\langle \alpha_{out}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{out}^*(\vec{p}_n) \Omega, \alpha_{in}^*(\vec{q}_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{q}_m) \Omega \right\rangle}_{= \langle \alpha_{in}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{p}_n) \Omega | S | \alpha_{in}^*(\vec{q}_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{q}_m) \Omega \rangle} \\ &= \langle \Psi_{in}, S \Phi_{in} \rangle, \end{aligned} \quad (11.18)$$

und $|\langle \Psi_{out}, \Phi_{in} \rangle|^2$ ist die Übergangswahr-

scheinlichkeit. Die Matrixelemente der Streu-

matrix S ,

$$\left\langle \alpha_{in}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{p}_n) S | \alpha_{in}^*(\vec{q}_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{q}_m) S \right\rangle \quad (11.19)$$

$$= \left\langle \alpha_{out}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{out}^*(\vec{p}_n) S, \alpha_{in}^*(\vec{q}_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{q}_m) S \right\rangle$$

sind durch die LST Reduktionsformeln (10.23) gegeben.

Die Wellenfunktionen

$$g^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) := \left\langle \alpha_{out}^*(\vec{p}_1) \dots \alpha_{out}^*(\vec{p}_n) S, \Phi_{in} \right\rangle \quad (11.20)$$

beschreiben die Konfigurationen auslaufender Teilchen,

die den durch Φ_{in} beschriebenen Konfigurationen einlaufender Teilchen entsprechen, und dank unserer Annahme asymptotischer Vollständigkeit gilt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j / |g^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)|^2 = \|\Phi_{in}\|^2. \quad (11.21)$$

11.2 Berechnung von Wirkungsquerschnitten.

In diesem Abschnitt erklären wir den Zusammenhang zwischen der Streumatrix und den Wirkungs-

querschnitten. Wir betrachten einen Zustand

$|i\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out}$, der genau zwei einlaufende Teilchen in einer Wellenfunktion $h^{(2)}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ beschreibt; d.h.

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \alpha_{in}^*(\vec{q}'_1) \dots \alpha_{in}^*(\vec{q}'_n) | i \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ h^{(2)}(\vec{q}'_1, \vec{q}'_2), & n = 2. \end{cases} \quad (11.22)$$

Dabei sei $h^{(2)}(\vec{q}'_1, \vec{q}'_2)$ die symmetrisierte Version der Produktfunktion $h_1(\vec{q}'_1) h_2(\vec{q}'_2)$. Wie es einer experimentell realistischen Situation entspricht, setzen

wir voraus, dass $h_i(\vec{q}'_i)$ eine in $\vec{q}'_i \in \mathbb{R}^3$ gepeaktet, approximative δ -Funktion sei, $i=1,2$; etwa

$$h_i(\vec{q}'_i) \propto \text{const. } L^3 e^{-L^2 (\vec{q}'_i - \vec{q}_i)^2}, \quad (11.23)$$

wo L eine makroskopische Längenskala ist.

Der $|i\rangle$ entsprechende auslaufende Zustand,

$|f\rangle$, beschreibt Konfigurationen von n auslaufenden Teilchen mit Wellenfunktionen

$$f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \alpha_{\text{out}}^*(\vec{p}_1) \cdots \alpha_{\text{out}}^*(\vec{p}_n) \Omega | i \rangle \quad (11.24)$$

Die gängige Interpretation der Quantenmechanik besagt, dass

$$|f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)|^2 d\hat{p}_1 \cdots d\hat{p}_n \quad (11.25)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ist, genau n Teilchen in den Impulsraumelementen $d^3 p_1, \dots, d^3 p_n$ zu finden, vorausgesetzt, der Zustand des Systems sei $|i\rangle$,

mit $\langle i | i \rangle = 1$; und es gilt laut (11.21), dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j |f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)|^2 = \langle i | i \rangle = 1. \quad (11.26)$$

Auf Grund von Energie- und Impulserhaltung gilt tatsächlich, dass $f^{(0)} = f^{(1)} = 0$.

Zur Berechnung der R.S. von (11.24) können wir die LSZ Reduktionsformeln benützen:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \alpha_{\text{out}}^*(\vec{p}_1) \cdots \alpha_{\text{out}}^*(\vec{p}_n) \Omega | i \rangle \\ &= \int d\hat{q}'_1 d\hat{q}'_2 h_1(\vec{q}'_1) h_2(\vec{q}'_2) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \alpha_{\text{out}}^*(\vec{p}_1) \cdots \alpha_{\text{out}}^*(\vec{p}_n) \Omega | \alpha_{\text{in}}^*(\vec{q}'_1) \alpha_{\text{in}}^*(\vec{q}'_2) \Omega \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \delta_{n_2} \int d\hat{\vec{q}}'_1 d\hat{\vec{q}}'_2 h_1(\hat{\vec{q}}'_1) h_2(\hat{\vec{q}}'_2) (2\pi)^6 2\omega(\vec{p}_1) 2\omega(\vec{p}_2) \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{q}'_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{q}'_2) + \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{q}'_2) \delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{q}'_1) \right] \quad \text{(I)} \\
 &+ \int d\hat{\vec{q}}'_1 d\hat{\vec{q}}'_2 h_1(\hat{\vec{q}}'_1) h_2(\hat{\vec{q}}'_2) \delta^{(4)} \left(\sum_{j=1}^n p_j - q'_1 - q'_2 \right) \times \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \mathcal{T} | \vec{q}'_1, \vec{q}'_2 \rangle, \quad (11.27)
 \end{aligned}$$

wo $p_j = (\omega(\vec{p}_j), \vec{p}_j)$, $q'_i = (\omega(\vec{q}'_i), \vec{q}'_i)$.

Term (I) in (11.27) beschreibt die reine Vorrätsstreuung ("unzusammenhängender Term" in den LSZ Reduktionsformeln), Term (II) kann durch den zusammenhängenden, zweiten Term auf der R.S. der LSZ Reduktionsformeln (10.23) ausgedrückt werden. Dank der Raum-Zeit Translationsinvarianz der "chronologischen Funktionen"

$$\langle \Omega, T(\varphi(y_1) \dots \varphi(x_n)) \Omega \rangle, \rightarrow^{(10.23)},$$

kann die δ -Funktion $\delta^{(4)} \left(\sum_{j=1}^n p_j - q'_1 - q'_2 \right)$ abgespalten werden, die die Energie-Impuls

Erhaltung im Streuprozess ausdrückt.

Im Folgenden wird die reine Vorwärtstrennung nicht betrachtet, und es wird nur noch Term \textcircled{II} weiter behandelt. Nun benutzen wir, dass auf dem Träger von $h_1(\vec{q}_1') h_2(\vec{q}_2')$

$$\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \gamma | \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle \approx \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \gamma | \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle, \quad (11.28)$$

da $\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \gamma | \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle$ glatt in \vec{q}_1', \vec{q}_2' ist, und auf Grund von (11.23). Weiter verwenden wir,

dass

$$\delta^{(4)}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ip \cdot x} d^4x$$

Dann finden wir, dass

$$\textcircled{II} \simeq \frac{1}{\sqrt{n!}} \int d^4x \overset{\vee}{h_1}(x) \overset{\vee}{h_2}(x) e^{i \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) \cdot x} \times \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \gamma | \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle, \quad (11.29)$$

wo

$$\overset{\vee}{h_i}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\hat{q}_i' e^{-i \hat{q}_i' \cdot x} h_i(\vec{q}_i'), \quad i=1,2,$$

mit $\hat{q}_i' = (\omega(\vec{q}_i'), \vec{q}_i')$. Mit (11.23) finden wir, dass

$$\check{h}_i(x) = e^{-iq_i \cdot x} \check{H}_i(x), \quad (11.30)$$

wo $\check{H}_i(x)$ eine in x langsam veränderliche Funktion von x ist.

In der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit (11.25), mit $f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$ wie im Term (II) auf der R. S. von (11.27) steht die Evaluierung des folgenden Integrals an:

$$\int d^4x \int d^4x' \overline{\check{h}_1(x)} \overline{\check{h}_2(x')} \check{h}_1(x) \check{h}_2(x') \times \\ \times e^{i \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) \cdot (x-x')}$$

$$\stackrel{(11.30)}{\simeq} \int d^4x \int d^4x' \left| \check{h}_1\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right|^2 \left| \check{h}_2\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right|^2 \times \\ \times e^{i \left(\sum_{j=1}^n p_j - q_1 - q_2 \right) \cdot (x-x')}. \quad (11.31)$$

Hier haben wir benutzt, dass

$$\overline{\check{h}_i(x)} \overline{\check{h}_i(x')} \stackrel{(11.30)}{=} e^{-iq_i \cdot (x-x')} \overline{H_i(x)} \overline{H_i(x')} \\ \simeq e^{-iq_i \cdot (x-x')} \left| H_i\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right|^2 \\ = e^{-iq_i \cdot (x-x')} \left| \check{h}_i\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right|^2.$$

Integration über $u := x - x'$ in (11.31) ergibt endlich die Formel

$$\begin{aligned} & |f^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)|^2 d\hat{p}_1 \cdots d\hat{p}_n \\ & \approx \int d^4x \left| \check{h}_1(x) \right|^2 \left| \check{h}_2(x) \right|^2 (2\pi)^4 \delta \left(\sum_{j=1}^n p_j - q_1 - q_2 \right) \times \\ & \quad \frac{1}{n!} \left| \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \gamma | \vec{q}_1, q_2 \rangle \right|^2 \prod_{j=1}^n d\hat{p}_j, \quad (11.32) \end{aligned}$$

wobei wir Term (I) auf der R.S. von (11.27) vernachlässigt haben. Der Integrand auf der R.S. von (11.32) ist die Übergangswahrscheinlichkeit - dichte im Raum-Zeit Punkt x , $dW_{f \leftarrow i}(x)$.

Definition des Wirkungsquerschnitts

$$\begin{aligned} dW_{f \leftarrow i}(x) &= (\text{Targetdichte}, n_2(x)) \times \\ &\quad \times (\text{einfallender Teilchenfluss}, |\vec{j}_1(x)|) \times \\ &\quad \times (\text{differentieller Wirkungsquerschnitt}, d\sigma) \quad (11.33) \end{aligned}$$

Dabei sei das einfallende Teilchen 2 der Target und das einfallende Teilchen 1 das Projektil.

Dann sind

$$\begin{aligned}
 n_2(x) &= i \overline{\check{h}_2(x)} \stackrel{\leftrightarrow}{\partial} \check{h}_2(x) \\
 &\stackrel{(11.30)}{\simeq} 2 \omega(\vec{q}_2) / |\check{h}_2(x)|^2 \\
 &\simeq 2 m_0 / |\check{h}_2(x)|^2, \text{ f\"ur } \vec{q}_2 \approx 0, \quad (11.34)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_1(x) &= i \overline{\check{h}_1(x)} \stackrel{\leftrightarrow}{\nabla} \check{h}_1(x) \\
 &\stackrel{(11.30)}{\simeq} 2 \vec{q}_1 / |\check{h}_1(x)|^2 \quad (11.35)
 \end{aligned}$$

Durch Vergleich von (11.32) - (11.35) folgt nun die wunderbare Formel:

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{1}{4n! m_0 |\vec{q}_1|} (2\pi)^4 \delta \left(\sum_{j=1}^n p_j - q_1 - q_2 \right) \times \\
 &\times | \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \gamma | \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle |^2 d\hat{p}_1 \dots d\hat{p}_n \quad (11.36)
 \end{aligned}$$

Wenn die Teilchen im Endzustand unterscheidbar sind, so entfällt der Faktor $\frac{1}{n!}$ auf der

R. S. von (11.36). Wenn die Teilchen im Anfangszustand verschieden sind, so bezeichnen wir ihre Massen mit $m_0 =: m_2$ und m_1 . Wir können

(11.36) noch explizit Lorentz-invariant umschreiben,
indem wir benützen, dass

$$\begin{aligned} m_2 |\vec{q}_1| &= m_2 \left[\omega(\vec{q}_1)^2 - m_1^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2} \quad (11.37) \end{aligned}$$

Man nennt

$$\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n / \gamma / \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle =: M(p_1, \dots, p_n, -q_1, -q_2) \quad (11.38)$$

die invariante Übergangsamplitude.

Drückt man diese durch die LSZ Reduktionsformeln aus, so sieht man, dass sie Lorentz-invariant ist.

Ab (11.24) (S. 256) kann das alte Skript benutzt werden.

Die Feynman Regeln für die QED

Die Resultate in den Kapiteln 4, 5 und 6 ergeben für die Lagrangendichte der QED in der Lorentz-Eichung (\rightarrow Gupta-Bleuler Formalismus) den Ausdruck

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, A) = -i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (12.1)$$

mit

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x) \phi = 0, \quad \forall x, \quad (12.2)$$

für $\phi \in \mathcal{F}_{\text{phys.}}$; (\rightarrow Kap. 6, (6.18)). Dabei ist

$$\partial_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu \quad (12.3)$$

die kovariante Ableitung auf dem Raum der Dirac-Spinorfelder; e ist die Elementarladung.

Wir zerlegen \mathcal{L} in einen Term, der quadratisch in den Feldern ist, und einen Term, der kubisch in den Feldern ist:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^F + \mathcal{L}_0^e + \mathcal{L}_I, \quad (12.4)$$

wo

$$\mathcal{L}_0^F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2,$$

$$\mathcal{L}_0^e = -i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (12.5)$$

$$\mathcal{L}_I = -e \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{j^\mu} A_\mu.$$

j^μ (Vierstromdichte)

Um Infrarotdivergenzen (im Bereich grosser Wellenlängen der Photonen) zu vermeiden, betrachten wir Photonen mit einer kleinen Masse μ ; d.h. wir redefinieren \mathcal{L}_0^F als

$$\mathcal{L}_0^F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{\mu^2}{2} A_\mu A^\mu. \quad (12.6)$$

Dies zerstört zwar die Eichinvarianz der Theorie.

Aber da A_μ an einen erhaltenen Strom, nämlich j^μ , koppelt, entstehen keine Schwierigkeiten.

Durch Reskalieren, $e A_\mu \mapsto A_\mu$, sehen wir, dass \mathcal{L} äquivalent zu

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{\tilde{\mu}^2}{2} A_\mu A^\mu - i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (12.7)$$

ist, wo $\alpha = e^2$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{e}$ sind – eine für die Behandlung der Ladungsrenormierung in der QED wichtige Bemerkung.

Für die Herleitung der Gell-Mann-Low Formel in der QED benützen wir den Hamilton Formalismus; (siehe Kap. 5). Wir formulieren die Theorie auf dem Hilbertraum

$$\mathcal{H} := \mathcal{F}_\psi \otimes \mathcal{F}_\gamma, \quad (12.8)$$

wo \mathcal{F}_ψ der Fockraum für das freie Dirac Feld und \mathcal{F}_γ der Fockraum der Photonen im Gupta-Bleuler Formalismus sind. Der Hamilton Operator ist dann

$$H = H_0^\psi + H_0^\gamma + \int d^3x \mathcal{H}_I(x), \quad (12.9)$$

wo H_0^F der Hamilton Operator des freien Dirac Feldes, H_0^F der Hamilton Operator (6.28) des freien elektromagnetischen Feldes (allerdings mit Photomasse μ , $k = |\vec{k}| \mapsto \sqrt{|\vec{k}|^2 + \mu^2}$ in (6.28)) sind, und

$$\mathcal{H}_I(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x). \quad (12.10)$$

Wir arbeiten im Wechselwirkungsbild, wie im Beispiel des Skalarfeldes. Es werden die folgenden Notationen benutzt:

$$\mathcal{O}^{(0)}(x) = \bar{\psi}_\alpha^{(0)}(x), \text{ od. } \psi_\beta^{(0)}(x), \text{ od. } A_\mu^{(0)}(x);$$

der Superskript "0" bezeichnet ein freies Feld.

Der Vakuum Vektor der wechselwirkenden Theorie wird mit Ω bezeichnet, das Fock Vakuum mit $|0\rangle$.

Dann finden wir mit Hilfe von Argumenten, die zu denjenigen im Beispiel des Skalarfeldes ähnlich sind, die Gell-Mann-Low Formel:

$$\langle \Omega, T[\mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n)]\Omega \rangle$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} Z_{[t, -t]}^{-1} \langle 0 | T[\overset{\circ}{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \overset{\circ}{\mathcal{O}}_n(x_n) e^{-i \int_{-t \leq x^0 \leq t} d^4x \mathcal{H}_I^\circ(x)}] | 0 \rangle \quad (12.11)$$

wo

$$Z_{[t, -t]} = \langle 0 | T[e^{-i \int_{-t \leq x^0 \leq t} d^4x \mathcal{H}_I^\circ(x)}] | 0 \rangle \quad (12.12)$$

Die R.S. in (12.11) und (12.12) kann man nun durch Potenzreihenentwicklung von $\exp[-i \int_{-t \leq x^0 \leq t} d^4x \mathcal{H}_I^\circ(x)]$ und Anwendung des Wickschen Theorems auswerten.

Das Wicksche Theorem für die Dirac Felder gibt:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T[\overset{\circ}{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \overset{\circ}{\bar{\psi}}_{\beta_1}(y_1) \cdots \overset{\circ}{\psi}_{\alpha_n}(x_n) \overset{\circ}{\bar{\psi}}_{\beta_n}(y_n)] | 0 \rangle \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sig } \pi \prod_{j=1}^n S_{\alpha_j \beta_{\pi(j)}}(x_j - y_{\pi(j)}), \quad (12.13) \end{aligned}$$

wo

$$S_{\alpha\beta}(x) = -i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{(\not{p} - m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ip \cdot x} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (12.14)$$

Das Wicksche Theorem für das Vektorpotential in der Lorentz Eichung lautet:

$$\langle 0 | T[A_{\mu_1}^{\circ}(x_1) \cdots A_{\mu_n}^{\circ}(x_n)] | 0 \rangle$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \sum_{P} \frac{k}{\prod_{j=1}^k \mu_{P(2j-1)} / \mu_{P(2j)}} (x_{P(2j-1)} - x_{P(2j)}) & n = 2k, \end{cases} \quad (12.15)$$

wo \sum_P sich über alle möglichen Paarungen

von $\{1, 2, \dots, 2k\}$ erstreckt, und

$$D_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\nu} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{e^{ip \cdot x}}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (12.16)$$

Wenn man nun die Exponentialfunktionen

$$\exp[-i \int d^4 x \mathcal{H}_I^{\circ}(x)] = \exp[i \int d^4 x \mathcal{L}_I^{\circ}(x)] \quad (12.17)$$

auf den R.S. von (12.11), (12.12) in ihre Taylorreihen

entwickelt und auf jeden Term der Entwicklung

das Wickische Theorem anwendet, so erhält man

die unrenormierte Störungsreihe der QED in

Beiträge organisiert, die man durch Feynman

Graphen kennzeichnen kann. Es ist dabei daran

$$\langle 0 | T[A_{\mu_1}^{\circ}(x_1) \cdots A_{\mu_n}^{\circ}(x_n)] | 0 \rangle$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \sum_{P} \frac{k}{\pi} i D_{\mu_{P(2j-1)} / \mu_{P(2j)}} (x_{P(2j-1)} - x_{P(2j)}) & n = 2k, \end{cases} \quad (12.15)$$

wo \sum_P sich über alle möglichen Paarungen von $\{1, 2, \dots, 2k\}$ erstreckt, und

$$D_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\nu} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{e^{ip \cdot x}}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (12.16)$$

Wenn man nun die Exponentialfunktionen

$$\exp[-i \int d^4 x \mathcal{H}_I^{\circ}(x)] = \exp[i \int d^4 x \mathcal{L}_I^{\circ}(x)] \quad (12.17)$$

auf den R.S. von (12.11), (12.12) in ihre Taylorreihen

entwickelt und auf jeden Term der Entwicklung

das Wickische Theorem anwendet, so erhält man

die unrenormierte Störungsreihe der QED in

Beiträge organisiert, die man durch Feynman Graphen kennzeichnen kann. Es ist dabei daran

zu denken, dass unter T und $\langle \cdot \rangle$: Spinoren antikommutieren, wogegen die Vektorpotentiale kommutieren. Außerdem ist zu beachten, dass

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T[\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)] | 0 \rangle \\ &= \sum_{\alpha, \beta} i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{g^\mu_{\alpha\beta} (\not{p} - m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\ &= i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{p^\mu}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = 0. \quad (12.18) \end{aligned}$$

Den Termen in der Störungsreihe kann man Feynman Graphen wie folgt zuordnen:

- Wick Kontraktion $\psi_\alpha^\circ(x) \bar{\psi}_\beta^\circ(y)$

$$\begin{aligned} &= \langle 0 | T[\psi_\alpha^\circ(x) \bar{\psi}_\beta^\circ(y)] | 0 \rangle \\ &= S_{\alpha\beta}(x-y) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \leftarrow \bullet \\ x, \alpha \qquad y, \beta \end{array} \quad (12.19) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass

$$C \left(\begin{array}{c} \bullet \leftarrow \bullet \\ x \qquad y \end{array} \right)^T C = \begin{array}{c} \leftarrow \bullet \\ y \qquad x' \end{array}$$

wo $C = i \gamma^2 \gamma^0$ (Ladungskonjugation)

- Wick Kontraktion $\underbrace{A_\mu^0(x) A_\nu^0(y)}_{=}$

$$= \langle 0 | T [A_\mu^0(x) A_\nu^0(y)] | 0 \rangle$$

$$= i D_{\mu\nu}(x-y) \longleftrightarrow \text{ommemo} \quad (12.20)$$

$x, \mu \quad y, \nu$

Auf Grund der Ladungserhaltung der Theorie, resp. der Struktur von L_I , haben alle chronologischen Funktionen der QED eine gleiche Zahl von Spinoren ψ wie von konjugierten Spinoren $\bar{\psi}$. Jedem Faktor $-i \mathcal{H}_I^0(x) = i L_I^0(x)$ in der Potenzreihenentwicklung von (12.17) ordnet man einen Vertex

$$-ie g_{\alpha\beta}^\mu \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \beta \\ \text{ommemo} \\ \searrow \alpha \\ x \end{array} \quad (12.21)$$

zu.

Von nun an werden wir die Superskripte "0" für freie Felder weglassen, und wir benutzen die Ausdrücke "Graph" und "Diagramm" synonym.

Die Operatoren $O_i(x_i)$ in Gl. (12.11) sind aus $\bar{\psi}'$'s, ψ' 's und A_μ' 's aufgebaut. Die Gesamtzahlen von $\bar{\psi}'$'s und von ψ' 's müssen übereinstimmen. Typischerweise ist also in p^{ter} Ordnung unrenormierter Störungstheorie ein Term der Form

$$\langle 0 | T \left[\psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_n}(x_n) \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(y_m) A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_p}(z_p) \right] \times \\ \times \frac{1}{p!} (-ie \int d^4 u \bar{\psi}(u) \gamma^\mu \psi(u) A_\mu(u))^p \rangle |0\rangle \quad (12.22)$$

auszuwerten. Alle zu (12.22) beitragenden Terme werden durch Feynman Diagramme gekennzeichnet, die aus den Linien und den Vertices aufgebaut sind.

→ S. 302, ((12.73) \equiv (12.23)!)

In einem Diagramm gibt es zwei Sorten von Fermion Linien: Offene, die in einem Punkt x_i enden, und geschlossene Schleifen. Eine geschlossene Schleife entspricht einem Produkt von Propagatoren

$$\underbrace{\psi(z_1) \bar{\psi}(z_k)}_{\text{Schleife}} \underbrace{\psi(z_k) \bar{\psi}(z_\ell)}_{\text{Schleife}} \underbrace{\psi(z_\ell) \bar{\psi}(z_\ell)}_{\text{Propagator}} \dots \underbrace{\psi(z_m) \bar{\psi}(z_1)}_{\text{Schleife}} \quad (12.73)$$

Eine solche Schleife kommt von einem Term

$$\langle 0 | T [\dots \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1) \bar{\psi}(z_1) \dots \bar{\psi}(z_m) \psi(z_m) \bar{\psi}(z_m) \dots] | 0 \rangle$$

Um das Kontraktionschema (12.73) zu erhalten,

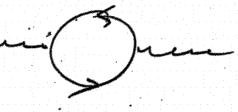
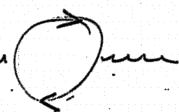
müssen wir $\bar{\psi}(z_1)$ durch eine ungerade Zahl von Spinoren durchschreiben. Deshalb trägt jede Schleife einen Faktor (-1) .

Die offenen Linien tragen Vorzeichen, die sich aus der Signatur der durch das Kontraktions-schema bestimmten Permutation der Punkte x_1, \dots, x_{2n} ergeben.

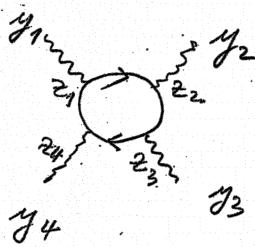
Diagramme, die sich nur durch die Orientierung von Fermion-Schleifen unterscheiden, tragen

dann beide bei, wenn sie topologisch verschieden sind.

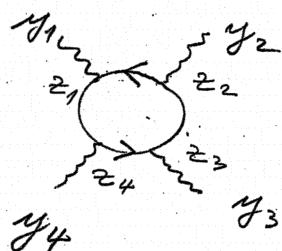
Die Diagramme

mit  und mit 

sind offensichtlich topologisch identisch. Hingegen sind



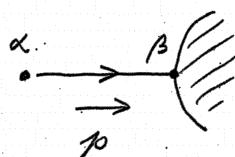
und



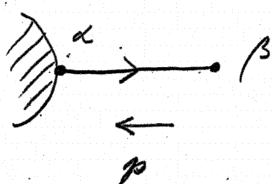
topologisch inequivalent, tragen also beide bei.
(Dies trifft auch nach Integration über z_1, z_2, z_3, z_4 noch zu!)

Nun können wir die Feynman-Regeln zusammenstellen:

1) Außere Linien:



$$\Leftrightarrow \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right) \beta^\alpha$$



$$\Leftrightarrow \left(\frac{i}{-\not{p} - m + i\varepsilon} \right) \beta^\alpha$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagramm } \mu & \leftrightarrow & \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \end{array}$$

2) Vertices:

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagramm } \mu & \leftrightarrow & -ie (\gamma_\mu)_{\beta\alpha} (2\pi)^4 \delta(\sum k_i) \\ \text{mit } \beta & & \uparrow \\ \text{und } \alpha & & \text{einfallende Impulse} \end{array}$$

3) Propagatoren:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta} \xrightarrow{\gamma} p & \leftrightarrow & \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{p - m + i\varepsilon} \right)_{\beta\alpha} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta} \xrightarrow{\gamma} k & \leftrightarrow & \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \end{array}$$

4) Vorzeichen:

$(-1)^{\# \text{ geschlossene Schleifen}}$

$\times \text{ sign}(\text{durch Kontraktionschema bestimmte Permutation der Punkte } x_1, \dots, x_{2n})$

Die Regeln 1) - 4) gestatten uns mit jedem Feynman Diagramm eine Zahl, die Feynman Amplitude, zu verbinden. Dazu kontrahiere man

die Spinorindices entlang aller Fermion Linien, was für geschlossene Schleifen auf eine Spur führt. Diese Regel leitet sich aus der Struktur von L_I ab:

$$L_I = -e \sum_{\alpha, \beta} \bar{\psi}_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta A^\mu$$

(d.h. es wird an jedem Vertex über die Spinor indices summiert). Schliesslich integriert man über alle inneren Impulse.

Um den Beitrag pter Ordnung in L_I zu erhalten, summiert man alle Feynman Amplituden, die zu topologisch verschiedenen Feynman Diagrammen mit p Vertices, ohne Vakuum Teildiagramme, gehören.

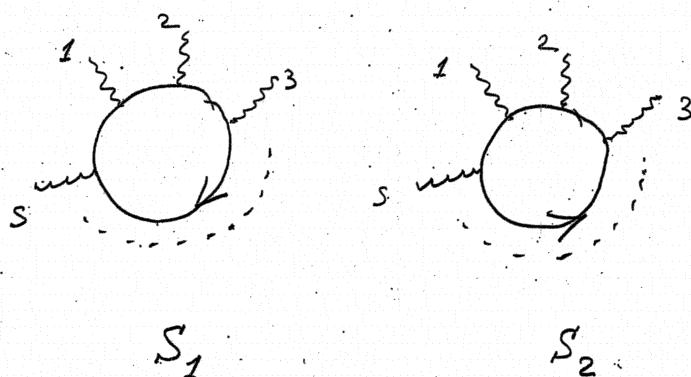
Voilà!

Um uns unnötige Arbeit zu ersparen, erwähnen wir noch

Furry's Theorem: Zwei Amplituden, die zu Diagrammen gehören, die bis auf den Umstand identisch sind, dass sie eine bis auf die Orientierung gleiche Fermion Schleife mit einer m-

geraden Anzahl Vertices enthalten, addieren sich zu 0 auf.

Nennen wir diese Schleifen S_1 und S_2 :



$$S_1 \leftrightarrow Sp [\gamma_{\mu_1} S(z_1, z_s) \gamma_{\mu_3} \cdots S(z_3, z_2) \gamma_{\mu_2} S(z_2, z_1)] \quad (12.74)$$

$$S_2 \leftrightarrow Sp [\gamma_{\mu_1} S(z_1, z_2) \gamma_{\mu_3} S(z_2, z_3) \cdots \gamma_{\mu_s} S(z_s, z_1)]$$

Nun gibt es eine Matrix $C = i z^2 \gamma^0$ (Hadungskonjugation) so, dass

$$\begin{aligned} C S(x, y) C^{-1} &= S^T(y, x) \\ C \gamma_\mu C^{-1} &= -\gamma_\mu^T. \end{aligned}$$

Nun setzen wir in (12.74) zwischen je zwei Matrizen $\mathbb{1} = C^{-1}C$ ein. So erhalten wir

$$\begin{aligned} S_1 &= (-1)^s Sp [\gamma_{\mu_1}^T S^T(z_s, z_1) \gamma_{\mu_3}^T \cdots S^T(z_2, z_3) \gamma_{\mu_2}^T S^T(z_1, z_2)] \\ &= (-1)^s Sp [S^T(z_s, z_1) \gamma_{\mu_3}^T \cdots S^T(z_2, z_3) \gamma_{\mu_2}^T S^T(z_1, z_2) \gamma_{\mu_1}^T] \end{aligned}$$

Nun gelten

$$(i) Sp A^T = Sp A^\dagger, \text{ und}$$

$$(ii) (AB \cdots C)^T = C^T \cdots B^T A^T$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} S_1 &= (-1)^s \operatorname{Sp} [\delta_{\mu_1} S(z_1, z_2) \delta_{\mu_2} S(z_2, z_3) \cdots \delta_{\mu_s} S(z_s, z_1)] \\ &= (-1)^s S_2 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nun ist zu erklären, was man unter der

renorzierten Störungsreihe

zu verstehen hat. Wir haben dies im Zusammenhang mit der $\lambda\varphi^4$ -Theorie schon kurz angedeutet. Siehe (12.37) - (12.38).

Im Rahmen der QED führen uns die für die $\lambda\varphi^4$ -Theorie erläuterten Ideen auf den folgenden Ansatz: Wir führen einen Ultraviolet Cut off x in die Theorie ein. (Wie dieser genau zu wählen ist, werden wir später erläutern.) Wir dürfen nun die nackten Größen der Theorie, e , m , $\overset{(-)}{\varphi^0}$ und A^0 als Funktionen des Cutoffs x wählen:

$$\left. \begin{aligned} e &= e(x), \quad m = m(x) \\ \overset{(-)}{\varphi^0} &= Z_1(x)^{1/2} \overset{(-)}{\varphi^R} \\ A^0 &= Z_3(x)^{1/2} A^R \end{aligned} \right\} \quad (12.75)$$

Nun machen wir die Potenzreihenansätze:

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= e_R^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n e_R^{2n}, \\ m &= m_R + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_R^{2n}, \\ Z_i(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n} e_R^{2n}, \quad i = 1, 3, \end{aligned} \right\} (12.76)$$

wo e_R und m_R die renormierte, elektrische Ladung und die renommierte Masse des Elektrons sind. Die Werte dieser physikalischen Größen werden durch Experimente, z. B. Thomson Streuung oder Elektron-Elektron-Streuung, etc. auf einer (durch das Experiment) vorgegebenen Energieskala bestimmt. Sie sind also durch die Natur festgelegt, hängen aber von der exp. Energieskala ab, (in einer Weise, die wir später berechnen wollen). Wichtig für unser Verfahren ist, dass e_R^2 klein ist ($\sim \frac{1}{137}$, für ein enorm breites Band von Energieskalen), so dass es sinnvoll erscheint, alle Größen nach Potenzen von e_R^2 zu entwickeln.

Die Koeffizienten ε_n , μ_n und $\xi_{i,n}$ sind

Funktionen von χ und m_R . Da die nackten Größen e^2 , m und Z_1 nicht direkt beobachtbar sind, gibt es keinen Grund, darauf zu bestehen, dass sie endliche, positive Größen bleiben, wenn $\chi \rightarrow \infty$. (In unserer vorläufigen Diskussion unterlassen wir es, die Renomierungseigenschaften der Photonmasse μ und des Koeffizienten von $(\partial \cdot A^0)^2$ zu beschreiben. Es wird sich aber herausstellen, dass diese Größen nicht renomiert werden, falls der Cutoff χ die Eichinvarianz der Theorie nicht verletzt.)

Drücken wir nun die Lagrange-Dichte L der QED durch renomierte Größen aus, so lautet sie:

$$L = L_0^F + L_0^e + \delta_I,$$

wo

$$L_0^F = -\frac{Z_3}{4} (F^R)^2 + \frac{\mu^2}{2} (A^R)^2 - \frac{\lambda_R}{2} (\partial \cdot A^R)^2,$$

$$L_0^e = \frac{i}{2} Z_1 \bar{\psi}^R (\not{\partial} - (m_R + \delta m)) \psi^R, \quad (12.77)$$

und

$$\delta_I = -e Z_1 Z_3^{1/2} \bar{\psi}^R \not{A}^R \psi^R.$$

Dabei sind

$$e = e(e_R, m_R), \delta m = \delta m(e_R, m_R) \equiv m - m_R$$

$$Z_i = Z_i(e_R, m_R), i = 1, 3$$

durch (12.76) gegeben, und

$$\mu_R^2 = Z_3 \mu_0^2, \quad \lambda_R = Z_3. \quad (12.78)$$

Wir werden verstehen, dass

$$e(e_R, m_R) Z_3^{1/2} (e_R, m_R) = e_R \quad (12.79)$$

ist. Das ist (physikalisch und mathematisch) eine Folge der Eichinvarianz der QED. (Die Ladung e ist nichts anderes als ein willkürlicher Parameter in der Definition der Exponentialabbildung, die einem Element, A^0 , der Liealgebra, \mathbb{R} , der Eichgruppe, $U(1)$, der QED ein Gruppenelement

$$e^{ieA^0}$$

zuordnet. Ersetzt man A^0 durch A^R , so erhält man dafür

$$e^{ie_R A^R},$$

mit $e_R = Z_3^{1/2} e$. Die Mathematiker und Lente, die sich mit nicht-abelschen Eichfeldern beschäftigen würden es vorziehen, $A^R = e_R^{-1} A$ zu setzen.

Dann ist die Exponentialabbildung in konventioneller Form

$$e^{iA}$$

so dass die eichinvariante, minimale Substitution die in der mathematischen Literatur übliche Form

$$\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_A = \mathcal{X} - A$$

hat. Dagegen ist nun

$$\mathcal{L}_0^{\mathcal{X}} = -\frac{Z_3}{4e_R^2} F^2 + \dots$$

Es ist Geschmacksfrage, welche Darstellung man vorzieht. Jedenfalls dürfen physische Größen nicht von einem willkürlichen Parameter in der Definition der Exponentialabbildung abhängen!

Diese Struktur der Ladungsrenormierung ist in der Störungstheorie eine Folge der Ward-Identitäten, die die Eichinvarianz der Theorie ausdrücken.)

Um nun die renormierte Störungsreihe zu erhalten, entwickeln wir zunächst die Green'schen Funktionen in Potenzen von λ_I , indem wir die oben beschriebenen Feynman Regeln benutzen.

Anschliessend entwickeln wir alle auf diese Weise erhaltenen Feynman Amplituden, $I_0(G)$, in Potenzreihen nach e_R , indem wir δm , Z_i und e durch die entsprechenden Potenzreihen nach e_R , siehe (12.76), ersetzen. Dann summieren wir über alle Beiträge zu einer vorgegebenen Green'schen Funktion, die zu einer festen Ordnung in e_R gehören. Die Koeffizienten $\varepsilon_n, \mu_n, \Sigma_{i,n}$, $n=1, 2, \dots$, sollen nun rekursiv so bestimmt werden, dass der Gesamtbeitrag zu einer beliebig vorgegebenen Green'schen Funktion in jeder festen Ordnung von e_R endlich ist. Falls dies möglich ist (und es stellt sich heraus, dass es in ≤ 4 Dimensionen tatsächlich möglich ist), so sagen wir, die Theorie, in diesem Fall die QED_d, $d \leq 4$, sei renormierbar.

Da nach (12.76) $e^2 = e_R^2 + O(e_R^4)$, $m = m_R + O(e_R^2)$, $Z_i = 1 + O(e_R^2)$, ist der Beitrag tiefster Ordnung zu irgend einer zusammenhängenden Green'schen Funktion durch eine Summe

von zusammenhängenden Feynman Amplituden gegeben, die zu Baumgraphen gehören. (Baumgraphen = zusammenhängende Diagramme ohne Schleifen, mit einer minimalen Anzahl von Vertices, die genügen, um das Diagramm zu einem zusammenhängenden zu machen). Dabei wird wegen (12.76) jeder Vertex mit e_R multipliziert, und die Masse im Fermion - Propagator ist m_R . Schliesslich ist $Z_i = 1$, für $i=1, 3$.

Diese Beiträge tiefster Ordnung berechnen wir im nächsten Kapitel. In höheren Ordnungen werden sich die Rechnungen erheblich komplizieren, da dann divergente Schleifenintegrale auftreten, und $e^2 \neq e_R^2$, $m \neq m_R$, $Z_i \neq 1$; (e^2, m, Z_i in höheren Ordnungen einer Entwicklung in e_R divergieren in vier Dimensionen, wenn $\kappa \rightarrow \infty$!)

Also haben wir

$$\begin{aligned} S_1 &= (-1)^5 \operatorname{Sp} [\gamma_{\mu_1} S(z_1, z_2) \gamma_{\mu_2} S(z_2, z_3) \cdots \gamma_{\mu_5} S(z_5, z_1)] \\ &= (-1)^5 S_2. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nun ist zu erklären, was man unter der
renormierten Störungsreihe

zu verstehen hat. Wir haben diesen Begriff im Zusammenhang mit der $\lambda\varphi^4$ -Theorie schon kurz angedeutet; siehe (12.34) - (12.38).

Wir benützen als Lagrangedichte den Ausdruck (12.7) (S. iii). Die für die $\lambda\varphi^4$ -Theorie erläuterten Ideen führen auf den folgenden Ansatz: Es sei x ein Ultraviolet Cutoff; (mehr darüber später). Wir wählen die "nackten Größen" der Theorie, e , m und φ^0 , als Funktionen des Cutoffs x :

$$e = e(x), \quad m = m(x), \quad \overset{(-)}{\varphi^0} = Z_1(x)^{\frac{1}{12}} \overset{(-)}{\varphi_R} \quad (12.75)$$

Die kovariante Ableitung ist

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - i A_\mu, \quad A_\mu \equiv A_{\mu R}.$$

Wir setzen Potenzreihen in e_R^2 an:

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= e_R^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n e_R^{2n}, \\ m &= m_R + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_R^{2n}, \\ Z_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{1,n} e_R^{2n}, \end{aligned} \right\} \quad (12.76)$$

wo e_R und m_R die renommierte elektrische Ladung und die renommierte Masse des Elektrons sind. Die (erdlichen) Werte dieser physikalischen Größen werden durch Experimente wie die Thomson Streuung oder Elektron-Elektron Streuung, etc. auf einer durch das Experiment vorgegebenen Energieskala bestimmt. Sie sind durch die Natur festgelegt, hängen jedoch von der experimentellen Energieskala ab – in einer Weise, die später berechnet werden soll. Wichtig für uns ist, dass $e_R^2 \approx \frac{1}{137}$ sehr klein ist, so dass es sinnvoll erscheint, physikalische Größen nach Potenzen von e_R^2 zu entwickeln.

Die Koeffizienten ϵ_n , μ_n und $\xi_{1,n}$ sind Funk-

tionen des Cutoffs κ (und der Masse m_R), die zu bestimmen sein werden. Da die "nackten Größen", e^2 , m und Z_1 , keine direkte physikalische Bedeutung haben, gibt es keinen Grund, wieso sie endliche Größen bleiben sollen wenn $\kappa \rightarrow \infty$! (Es wird sich übrigens herausstellen, dass die Photonenmasse $\tilde{\mu}$ und der Koeffizient $\lambda := \frac{1}{\alpha}$ des Terms $(\partial_\mu A^\mu)^2$ in der Lagrangedichte (12.7) nicht renominiert werden, falls der Cutoff κ die Eichinvarianz der Theorie erhält.)

Drücken wir nun die Lagrangedichte, L , der QED durch renominierte Größen aus, so lautet sie

$$L = L_0^F + L_0^e + L_I,$$

wo

$$L_0^F = - \frac{1}{4(e_R^2 + \delta e^2)} F^2 + \frac{\tilde{\mu}^2}{2} A^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2,$$

$$L_0^e = Z_1 (-i \bar{\psi}^R \not{\partial} \psi^R - (m_R + \delta m) \bar{\psi}^R \psi^R) \quad (12.77)$$

und

$$\mathcal{L}_I = - Z_1 \bar{\psi}^R A \psi^R. \quad (12.78)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \delta e^2 &= e^2 - e_R^2 = e_R^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} E_n e_R^{2(n-1)} \right) \\ \delta m &= m - m_R = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_R^{2n}. \end{aligned} \quad (12.79)$$

Die kovariante Ableitung von Spinorfeldern bleibt

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - i A_\mu,$$

wie es von der Eichinvarianz, d. h. der Invarianz

der QED unter

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi, \\ \psi &\mapsto e^{i\chi} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\chi}, \end{aligned} \quad (12.80)$$

gefordert wird. Um die in der Literatur üblichen Normierungen der Green'schen Funktionen zu erhalten,

ist zu beachten, dass einem äusseren Photon ein

Operator $e^{-i} A_\mu$ entspricht. Dann bleiben die

Feynman-Regeln wie gehabt; (nur dass man systematisch nach Potenzen von e_R entwickelt).

Um die renommierte Störungsreihe herzuleiten, entwickeln wir zunächst die Greenschen Funktionen nach Potenzen von $\mathcal{H}_I = -d_I$, indem wir die oben beschriebenen Feynman-Regeln benützen. Anschliessend entwickeln wir alle auf diese Weise gewonnenen Feynman Amplituden, $I_0(G)$, (G ein Feynman Graph) in Potenzreihen nach e_R , indem wir e (resp. δe^2), δm und Z_1 durch die entsprechenden Potenzreihen nach e_R , siehe (12.76), ersetzen. Dann summieren wir alle Beiträge zu einer vorgegebenen Greenschen Funktion, die zu einer festen Ordnung in e_R gehören. Die Koeffizienten ε_n, μ_n und $\xi_{1,n}$ in (12.76) sind rekursiv so zu bestimmen, dass der Beitrag in jeder Ordnung von e_R zu einer beliebig vorgegebenen (eichinvarianten) Greenschen Funktion endlich ist. Falls dies möglich ist

(und es stellt sich heraus, dass es in ≤ 4 Dimensionen tatsächlich möglich ist), so sagen wir, die Theorie — hier die QED in $d \leq 4$ Dimensionen — sei renormierbar.

Da gemäß (12.76) $e^2 = e_R^2 + O(e_R^4)$, $m = m_R + O(e_R^2)$, $Z_1 = 1 + O(e_R^2)$ ist der Beitrag tiefster Ordnung in e_R zu irgendeiner zusammenhängenden Greenschen Funktion durch eine Summe von zusammenhängenden Feynman-Amplituden gegeben, die zu Baumgraphen gehören, und jeder Vertex ist $\propto e_R$. (Baumgraphen = zusammenhängende Graphen ohne Schleifen mit einer minimalen Anzahl von Vertices, die genügen, um den Graphen zusammenhängend zu machen.) Nach (12.76) ist jeder Vertex $\propto e_R$, und die

Masse im Elektron Propagator ist m_R . Schliesslich ist $Z_1 = 1$.

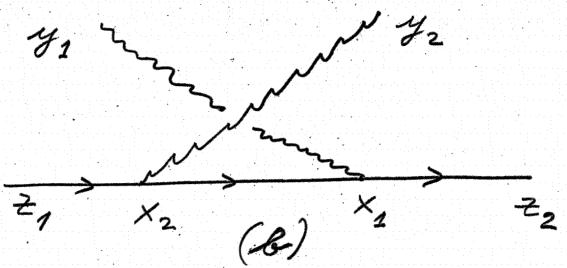
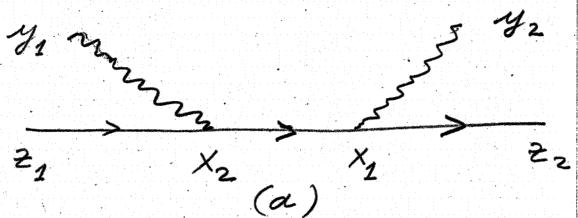
Solche Beiträge tiefster Ordnung berechnen wir im nächsten Kapitel. In höheren Ordnungen in e_R ("Strahlungskorrekturen") werden sich die Rechnungen erheblich komplizieren. Es treten dann divergente Schleifenintegrale auf. Solche (Ultra-violett-) Divergenzen müssen durch eine geeignete Wahl der Koeffizienten $\epsilon_n, \mu_n, \xi_{1,n}$ in (12.76) kompensiert ("renomiert") werden. Es wird sich herausstellen, dass e^2, m und Z_1 in höheren Ordnungen einer Entwicklung nach Potenzen von e_R im Limes $\kappa \rightarrow \infty$ divergent sind.

13) Streuprozesse in der QED in tiefster Ordnung in e_R .

13. 1. Compton-Streuung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die elastische Streuung eines Photons an einem Elektron oder Positron.

Der Beitrag tiefster Ordnung in e_R zu diesem Prozess ist von zweiter Ordnung. Die zusammenhängenden Feynman-Diagramme zweiter Ordnung in e_R sind:



Diesen lassen sich nach den in Kapitel 12) besprochenen Feynman-Regeln Feynman-Ampel und zuordnen.

Ihre Summe ergibt den Beitrag tiefster Ordnung in e_R zur Green'schen Funktion

$$\langle S_1, T [\bar{\psi}(z_2) \psi(z_1) A(y_2) A(y_1)] S_2 \rangle^c \quad (13.1)$$

Diese Rechnungen wollen wir uns ersparen. Vielmehr wollen wir nun (13.1) in die im Kapitel 10) hergeleiteten LSZ Reduktionsformeln einsetzen. Das

er-gibt dann den zusammen-hängenden Anteil
der S-Frauamplitude:

$$S_{fi}^c = (-i)^2 \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 y_1 d^4 y_2 e^{-i(p_1 \cdot z_1 + k_1 \cdot y_1 - p_2 \cdot z_2 - k_2 \cdot y_2)}$$

$$u_{j_1}(p_1) (-i \not{p}_{z_1} - m_R) \bar{u}_{j_2}(p_2) (i \not{p}_{z_2} - m_R) (\square_{y_1} + \mu_R^2) (\square_{y_2} + \mu_R^2)$$

$$\langle \Omega, T[\psi(z_1) \bar{\psi}(z_2) \varepsilon_{r_2} \cdot A(y_2) \varepsilon_{r_1} \cdot A(y_1)] \Omega \rangle^c \quad (13.2)$$

Ersetzen wir den letzten Faktor durch die Summe
 der Feynman-Amplituden tiefster (d.h. zweiter)
 Ordnung in e_R , so erhalten wir

$$S_{fi}^c = S_{fi}^{(a)} + S_{fi}^{(b)}, \quad (13.3)$$

wo

$$S_{fi}^{(a)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) M^{(a)}, \quad (13.4)$$

$$M^{(a)} = -e_R^2 \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}(k_2) i S_F(p_1 + k_1) \not{\epsilon}(k_1) u(p_1)$$

und

$$S_{fi}^{(b)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) M^{(b)} \quad (13.5)$$

$$M^{(b)} = -e_R^2 \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}(k_2) i S_F(p_1 - k_2) \not{\epsilon}(k_2) u(p_1)$$

In diesen Formeln haben wir der Übersichtlichkeit
 halber die Subskripte j_1, j_2, r_1 und r_2 weggelassen

und $\mathcal{L}(k) = \sum \epsilon_\mu(k) z^\mu$ gesetzt.

Wir stellen fest, dass die Faktoren ($\pm i\cancel{\partial} - m_R$) und $(\cancel{\partial} + \mu_R^2)$ in der Reduktionsformel (13.2) einfach alle Propagatoren in den Feynman Amplituden, die "äusseren Linien entsprechen, kompensieren ("Amputation der äusseren Linien"), w_{j_1} und ϵ_{r_1} spezifizieren den einlaufenden und w_{j_2}, ϵ_{r_2} den auslaufenden Zustand.

Diese Feststellungen gelten allgemein!

In (13.4) und (13.5) sind wegen der Impulserhaltung an jedem Vertex keine Integrationen mehr auszuführen. Damit ist unsere Berechnung der Streuamplitude für Compton-Streuung in tiefster Ordnung in e_R beendet.
*)

Da jedoch nicht-triviale Arbeit zu leisten ist, ist in der Berechnung des Streuquerschnittes (siehe, Kapitel 11)). Diesen wollen wir nun untersuchen.

Nach Formel (11.28) ist der differentielle Streuquerschnitt (in irgendeinem System) für ein ein-

*) abgesehen davon, dass man in (13.4) und (13.5) die Matrix- und Skalarprodukte noch explizit ausführen könnte.

laufendes Elektron im Zustand $u_{j_1}(p_1)$, ein Photon im Zustand $\epsilon_{r_1}(k_1)$, ein auslaufendes Elektron im Zustand $u_{j_2}(p_2)$ und ein auslaufendes Photon im Zustand $\epsilon_{r_2}(k_2)$ durch folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m_R^2}{64\pi^2 v_{\text{rel.}} E_1 E_2 \omega_1 \omega_2} |\vec{k}_2|^2 / 2 \left[\frac{\partial(E_2 + \omega_2)}{\partial |\vec{k}_2|} \right]^{-1} / M^2, \quad (13.6)$$

wo $M = M^{(a)} + M^{(b)}$

$$E_i = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_R^2},$$

$$\omega_i = \sqrt{\vec{k}_i^2 + \mu_R^2},$$

$$v_{\text{rel.}} = \frac{|\vec{k}_1|}{\omega_1}, \text{ im Laborsystem,}$$

$$= |\vec{p}_1| \cdot \frac{E_1 + \omega_1}{E_1 \omega_1}, \text{ im CoM System:}$$

Dabei ist die Ableitung auf der rechten Seite von (13.6) für feste Polarwinkel Θ und φ zu berechnen, und $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\varphi$. Wir benutzen \vec{k}_1 als z -Achse; Θ ist dann der Photonenstrahlwinkel:

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \cos \Theta \quad (13.7)$$

→ Skizze →

Nun setzen wir in (13.4) und (13.5) den expliziten Ausdruck für iS_F ein:

$$iS_F(p) = \frac{i}{p - m_R + i\varepsilon} = \frac{i(\not{p} + m_R)}{p^2 - m_R^2 + i\varepsilon} \quad (13.8)$$

Setzen wir,

$$q_1 = p_1 + k_1, \quad q_2 = p_1 - k_2, \quad (13.9)$$

so erhalten wir

$$M^{(a)} = -ie_R^2 \frac{\bar{u}(2)\not{\epsilon}(2)(\not{p}_1 + m_R)\not{\epsilon}(1)u(1)}{2p_1 \cdot k_1} \quad (13.10)$$

$$M^{(b)} = ie_R^2 \frac{\bar{u}(2)\not{\epsilon}(1)(\not{p}_2 + m_R)\not{\epsilon}(2)u(1)}{2p_1 \cdot k_2}$$

wo $\bar{u}^{(-)}(i) = \bar{u}^{(-)}(p_i)$, etc. Dabei haben wir zur Vereinfachung der Nenner benutzt, dass

$$p_i^2 = m_R^2, \quad k_i^2 = \mu_R^2,$$

und haben $\mu_R = 0$ gesetzt, wie es der Natur entspricht.

Nun spezialisieren wir unsere Untersuchung zunächst aufs Labor system, so dass

$$p_1 = (m, \vec{0}), \quad \vec{p}_2 = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \quad (13.11)$$

und

$$E_2 = [m_R^2 + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2]^{1/2}$$

$$= [m_R^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos\theta]^{1/2}, \quad (13.12)$$

wegen (13.7).

Aufgrund der Energie-Impuls Erhaltung

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2 \Leftrightarrow p_1^2 + 2p_1 \cdot k_2 + k_2^2 = p_2^2 + 2p_2 \cdot k_2 + k_2^2$$

und der Massenschalenbedingungen

$$\Rightarrow p_1 \cdot k_1 = p_2 \cdot k_2$$

$$p_1^2 = m_R^2, \quad k_1^2 = \mu_R^2 = 0$$

haben wir

$$\underline{p_1 \cdot k_1} = p_2 \cdot k_1 + k_2 \cdot k_1 = p_2 \cdot k_2 = \underline{p_1 \cdot k_2 + k_2 \cdot k_1}.$$

Daraus erhalten wir im Labor system

$$\omega_2 = \frac{m_R \omega_1}{m_R + \omega_1 (1 - \cos\theta)} \quad \Delta \quad (13.13) \checkmark$$

Damit haben wir die Energie des gestreuten Photons durch den Streuwinkel ausgedrückt.

Aus (13.12) erhalten wir nach fünfziger Zwischenrechnung

$$\frac{\partial (E_2 + \omega_2)}{\partial \vec{k}_2 \cdot \vec{l}} \Big|_{\theta, q} = \frac{\partial (E_2 + \omega_2)}{\partial \omega_2} \Big|_{\theta, q} = \frac{m_R \omega_1}{E_2 \omega_2} \quad (13.14)$$

$$\mu_R = 0$$

Eingesetzt in (13.6), erhalten wir

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Labor}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 / M^2, \quad (13.15)$$

wo $M = M^{(a)} + M^{(b)}$, und $M^{(a)}, M^{(b)}$ durch (13.10) gegeben sind. Dies ist unser Resultat.

Oft misst man aber in Experimenten Spins und Polarisationen der streuenden Elektronen und Photonen nicht. Dann ist über den Spin des auslaufenden Elektrons und die Polarisation des auslaufenden Photons zu summieren, über den Spin des einlaufenden Elektrons und die Polarisation des einlaufenden Photons zu mitteln.

Wie man das effizient macht, wollen wir nun erklären:

13.2 Spin Summen - Photon Polarisations Summen

Wir betrachten allgemein die Feynman Amplitude

$$M = \bar{u}_s(p') T u_s(p), \quad (13.16)$$

wo T eine aus γ -Matrizen aufgebaute 4×4 Matrix ist.

Misst man Spins des ein- und auslaufenden Elektrons nicht, so ist der Wirkungsquerschnitt proportional zu

$$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 |M|^2 \quad (13.17)$$

Wir setzen

$$\tilde{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^* \gamma^0$$

und benutzen, dass

$$\bar{u} = u^* \gamma^0 \quad (13.18)$$

Damit finden wir

$$X = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (\bar{u}_s(p') \Gamma u_r(p)) (\bar{u}_r(p) \tilde{\Gamma} u_s(p')) \quad (13.19)$$

Nun müssen wir tief in die Vergangenheit zurückblicken: In Kapitel 4, Formeln (4.34), (4.37f.) haben wir gelernt, dass

$$u_1(p) \cdot \bar{u}_1(p) + u_2(p) \bar{u}_2(p) = \frac{1}{2m} (\not{p} + m) \quad (13.20)$$

und

$$v_1(p) \cdot \bar{v}_1(p) + v_2(p) \bar{v}_2(p) = \frac{1}{2m} (\not{p} - m) \quad (13.21)$$

((13.20) und (13.21) folgen aus (4.34), (4.37), indem man (13.18) benutzt!)

Wie man mühelos verifiziert sind

$$\Lambda^+(p) = \frac{1}{2m} (\not{p} + m) \text{ und } \Lambda^-(p) = \frac{-1}{2m} (\not{p} - m) \quad (13.22)$$

Projektionsoperatoren, und es gilt

Bild $\Lambda^+(p) = \mathcal{H}_{D,p} = \{ \text{Lösungen der Dirac Gl. mit positiver Energie} \}$

Bild $\Lambda^-(p) = \mathcal{H}_{\bar{D},p} = \{ \text{Lösungen der Dirac Gl. mit negativer Energie} \}. \quad (13.23)$

Die Formeln (13.20) und (13.21) können wir nun verwenden, um (13.19) zu vereinfachen: Man verifiziert leicht, dass aus (13.19), (13.20) folgt, dass

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [\Lambda^+(p') \Gamma \Lambda^+(p) \tilde{\Gamma}] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left[\frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma} \right] \end{aligned} \quad (13.24)$$

Ähnliches erhält man für Amplituden der Form

$$\begin{aligned} M &= \bar{v}_s' \Gamma v_r \\ &= \bar{u}_s' \Gamma v_r \\ &= \bar{v}_s' \Gamma u_r \end{aligned}$$

und für Produkte solcher Größen, wobei jedem der Faktoren eine durch das Diagramm laufende, offene

Fermion-Linie entspricht.

Dieselbe Technik kann man auch zur Berechnung polarisierter Wirkungsquerschritte benützen, indem man Helizitätsprojektoren π^\pm benützt:

$$\pi^+(p) u_r(p) = \delta_{1r} u_r(p) \quad (13.25)$$

$$\pi^-(p) u_r(p) = \delta_{2r} u_r(p)$$

In relativistischen Limes ($\vec{p}^2 \gg m^2$) gilt

$$\pi^+(p) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5)$$

$$\pi^-(p) = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5)$$

[Allgemein gilt:

$$\pi^\pm(p) = \frac{1}{2} (1 \pm \sigma_p),$$

$$\text{wo } \sigma_p = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|},$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}),$$

und

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

(Siehe z. B. Mandl & Shaw, (4.25a), (4.25b),
(A.36), (A.37), Abschnitt 8.2.)]

Nun besprechen wir die Photon-Polarisations-

summen. Wir schreiben die Streuamplitude als

$$M = \varepsilon_{r_1}^{\alpha_1}(k_1) \varepsilon_{r_2}^{\alpha_2}(k_2) \dots M_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(k_1, k_2, \dots), \quad (13.26)$$

wo ε_{r_i} der Polarisationsvektor des i -ten äußeren Photons ist, und $\varepsilon_{r_i}^\alpha$ dessen α -Komponente.

Die Polarisationsvektoren $\varepsilon_r(k)$ sind eich-abhängig. Unter einer Eichtransformation

$$A^\mu(x) \mapsto A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x)$$

transformieren sie wie

$$\varepsilon_r^\mu(k) e^{\pm ik \cdot x} \mapsto [\varepsilon_r^\mu(k) \pm i k^\mu \hat{\chi}(k)] e^{\pm ik \cdot x}$$

Eichinvarianz der Streuamplitude impliziert daher

$$k^\alpha M_{\dots \alpha \dots}(\dots k \dots) = 0 \quad (13.27)$$

Diese Eichinvarianz ist eine Folge der Ward Identitäten, die wir später kennen lernen werden. Die Gleichung (13.27) gestattet uns nun die Photon-Polarisationssummen auszu führen:

$$M_{\dots \nu \dots}(\dots k \dots) = \varepsilon_\nu^\alpha(k) M_{\dots \alpha \dots}(\dots k \dots), \quad (13.28)$$

$$X = \sum_{r=1}^2 |M_{\dots \nu \dots}(\dots k \dots)|^2$$

$$= M_{\dots \alpha \dots}(\dots k \dots) \overline{M_{\dots \beta \dots}(\dots k \dots)} \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\alpha(k) \varepsilon_r^\beta(k). \quad (13.29)$$

(Nur die transversalen Polarisierungen ε_1 und ε_2 kommen in physikalischen Zuständen vor!)

Nun benützen wir, dass

$$\sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\alpha(k) \varepsilon_r^\beta(k) = -g^{\alpha\beta} - \frac{1}{(k \cdot n)^2} [k^\alpha k^\beta - (k \cdot n) \times (k^\alpha n^\beta + k^\beta n^\alpha)], \quad (13.30)$$

siehe Kapitel 6. Aber wegen (13.27) erhalten wir aus (13.29) und (13.30) sofort, dass

$$\sum_{r=1}^2 |M_{\dots r \dots}(\dots k \dots)|^2 = -M^{\alpha \dots}(\overline{k}) M_{\dots \alpha \dots}(k) \quad (13.31)$$

Die Gleichungen (13.24) und (13.31) sind unsere Hauptresultate für Abschnitt 13.2.

13.3 Zurück zur Compton-Streuung.

("Thomson"- und "Klein-Nishina" Formeln)

Wir wenden nun das in Abschnitt 13.2 Gelernte auf die Berechnung des differentiellen Streuquerschnittes (13.15) für den Fall, wo Spins und Photonpolarisationen nicht gemessen werden, an. Dazu müssen

wir die Größe

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol. r}} \sum_{\text{Spins } j} |M|^2$$

berechnen. (Der Faktor $\frac{1}{4}$ kommt von der Mittelung über 2 mögliche transversale Polarisierungen des Photons und über 2 mögliche Spins des Elektrons im Anfangszustand.) Nach Gl. (13.31) haben wir

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol.}} \sum_{\text{Spins}} |M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} M^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}^* \quad (13.32)$$

Dabei haben wir (13.27) (d.h. Eichinvarianz) benutzt. Die Verifikation von (13.27) für die Amplitude der Compton Streuung (13.10) in tiefster Ordnung in e_R ist einfach und sei dem Leser als Übung empfohlen.

(Hinweis: (13.27) muss nur für $M = M^{(a)} + M^{(b)}$ gelten, und nicht getrennt für $M^{(a)}$ und $M^{(b)}$!)

Nach (13.10) ist

$$M^{\alpha\beta} = M^{(a)\alpha\beta} + M^{(b)\alpha\beta},$$

wo

$$M^{(a)\alpha\beta} = -ie_R^2$$

$$\frac{\bar{u}(2) \gamma^\beta (\not{p}_1 + m_R) \gamma^\alpha u(1)}{2 p_1 \cdot k_1}$$

und

$$M^{(b)\alpha\beta} = +ie_R^2$$

$$\frac{\bar{u}(2) \gamma^\alpha (\not{p}_2 + m_R) \gamma^\beta u(1)}{2 p_2 \cdot k_2}$$

Damit ergibt sich mit Hilfe von (13.24)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \sum_{\text{Pol.}} \sum_{\text{Spins}} |M|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Pol.}} \sum_{\text{Spins}} \left\{ |M^{(a)}|^2 + |M^{(b)}|^2 \right. \\
 &\quad \left. + M^{(a)} \overline{M^{(b)}} + M^{(b)} \overline{M^{(a)}} \right\} \\
 &= \frac{e_R^4}{64m_R^2} \left\{ \frac{\xi_{aa}}{(p_1 \cdot k_1)^2} + \frac{\xi_{bb}}{(p_1 \cdot k_2)^2} - \frac{\xi_{ab} + \xi_{ba}}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \right\}, \\
 &\quad (13.33)
 \end{aligned}$$

wo

$$\xi_{aa} = Sp \left\{ \gamma^\beta (\not{p}_1 + m_R) \gamma^\alpha (\not{p}_1 + m_R) \gamma_\alpha (\not{p}_1 + m_R) \gamma_\beta (\not{p}_1 + m_R) \right\}$$

$$\xi_{bb} = Sp \left\{ \gamma^\alpha (\not{p}_2 + m_R) \gamma^\beta (\not{p}_2 + m_R) \gamma_\beta (\not{p}_2 + m_R) \gamma_\alpha (\not{p}_2 + m_R) \right\}$$

$$\xi_{ab} = Sp \left\{ \gamma^\beta (\not{p}_1 + m_R) \gamma^\alpha (\not{p}_1 + m_R) \gamma_\beta (\not{p}_2 + m_R) \gamma_\alpha (\not{p}_2 + m_R) \right\}$$

und

$$\xi_{ba} = Sp \left\{ \gamma^\alpha (\not{p}_2 + m_R) \gamma^\beta (\not{p}_1 + m_R) \gamma_\alpha (\not{p}_1 + m_R) \gamma_\beta (\not{p}_2 + m_R) \right\}$$

In der Anwendung von (13.24) haben wir benutzt,

dass $\gamma_0^2 = 1$, $\gamma_0^* = \gamma_0$, $\gamma_k^* = -\gamma_k$, also

$$\gamma_0 \gamma_k^* \gamma_0 = \gamma_k, \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

Vertauschen wir k_1 mit $-k_2$ und ε_{r_1} mit ε_{r_2}

so werden \not{p}_1 und \not{p}_2 miteinander vertauscht, (siehe (13.9)), und $M^{(a)}$ und $-M^{(b)}$ werden miteinander

vertauscht, (siehe (13.10)). Also folgt, dass unter dieser Substitution β_{aa} und β_{bb} , resp. β_{ab} und β_{ba} mit einander vertauscht werden. Da die linke Seite von (13.33) reell ist, gilt natürlich $\beta_{ba} = \overline{\beta_{ab}}$. Es ist eine gute Übung, sich davon zu überzeugen, dass $\beta_{ab} = \beta_{ba}$; (dazu benütze man, dass $Sp(g^{\mu_1} g^{\mu_2} \dots g^{\mu_n}) = Sp(g^{\mu_n} \dots g^{\mu_2} g^{\mu_1})$!). Es folgt also, dass β_{ab} reell ist. (Dies ist eine Eigenschaft, die unsere Rechnungen reproduzieren sollen!) Es genügt also β_{aa} und β_{ab} zu berechnen. Wir beginnen mit β_{aa} . Dazu benützen wir die folgenden Identitäten; (Summationskonvention inbegriffen):

$$\gamma_\alpha \gamma^\alpha = 4, \quad \gamma_\alpha \gamma^\beta \gamma^\alpha = -2 \gamma^\beta$$

$$\gamma_\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\alpha = 4 \gamma^{\beta\delta} \quad (13.34)$$

$$\gamma_\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\varepsilon \gamma^\alpha = -2 \gamma^\varepsilon \gamma^\delta \gamma^\beta$$

$$\gamma_\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\varepsilon \gamma^\mu \gamma^\alpha = 2 (\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\varepsilon + \gamma^\varepsilon \gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\mu)$$

Diese Glv. folgen direkt aus der Clifford Algebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 \gamma^{\mu\nu}$$

Durch Rekursion findet man eine Formel für $A_n = \gamma_\alpha (\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) \gamma^\alpha$: $A_n = 2 \gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} - A_{n-1} \gamma^{\mu_n}$.

Aus (13.34) folgt:

329.

$$\partial_\alpha \not{d} \not{f} \not{g}^\alpha = -2 \not{d} \quad (13.35)$$

$$\partial_\alpha \not{d} \not{f} \not{d} \not{g}^\alpha = 4 a \cdot b \quad (13.36)$$

$$\partial_\alpha \not{d} \not{f} \not{d} \not{f} \not{g}^\alpha = -2 \not{d} \not{f} \not{d} \not{d} \quad (13.37)$$

$$\partial_\alpha \not{d} \not{f} \not{d} \not{f} \not{d} \not{g}^\alpha = 2 (\not{d} \not{d} \not{f} \not{f} + \not{f} \not{f} \not{d} \not{d}) \quad (13.38)$$

etc.

Wir schreiben nun

$$\beta_{aa} = Sp(\gamma (\not{p}_2 + m_R)), \quad (13.39)$$

wo

$$\gamma = \not{f}^\beta (\not{q}_1 + m_R) \not{f}^\alpha (\not{p}_1 + m_R) \partial_\alpha (\not{q}_1 + m_R) \partial_\beta.$$

Wegen (13.35) - (13.37) ist

$$\begin{aligned} \gamma &= \not{f}^\beta (\not{q}_1 + m_R) (-2 \not{p}_1 + 4 m_R) (\not{q}_1 + m_R) \not{f}_\beta \\ &= 4 \not{q}_1 \not{p}_1 \not{q}_1 + m_R [-16(p_1 \cdot q_1) + 16 q_1^2] \\ &\quad + m_R^2 (4 \not{p}_1 - 16 \not{q}_1) + 16 m_R^3. \end{aligned}$$

Nun setzen wir dieses Resultat in (13.39) ein und benützen

$$Sp(\not{g}^{\mu_1} \dots \not{g}^{\mu_{2n+1}}) = 0$$

$$Sp(\not{d} \not{f}) = 4 a \cdot b \quad (13.40)$$

$$\begin{aligned} Sp(\not{d} \not{f} \not{d} \not{f}) &= 4 \{ (a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) \\ &\quad + (a \cdot d)(b \cdot c) \}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{aa} = 16 & \left\{ 2 (q_1 \cdot p_1) (q_1 \cdot p_2) - q_1^2 (p_1 \cdot p_2) + \right. \\ & m_R^2 \left[-4 (p_1 \cdot q_1) + 4 q_1^2 \right] + \\ & \left. m_R^2 \left[(p_1 \cdot p_2) - 4 (q_1 \cdot p_2) \right] + 4 m_R^4 \right\} \end{aligned} \quad (13.41)$$

Nun benützen wir die Glu.

$$p_1^2 = p_2^2 = m_R^2, \quad p_1 \cdot k_1 = p_2 \cdot k_2, \quad (13.42)$$

$$p_1 \cdot k_2 = p_2 \cdot k_1, \quad q_1 = p_1 + k_1, \quad q_2 = p_2 - k_2,$$

(siehe (13.9)). Damit folgt nach etwas Rechnung

$$\mathfrak{Z}_{aa} = 32 \left[m_R^4 + m_R^2 (p_1 \cdot k_1) + (p_1 \cdot k_1) (p_2 \cdot k_2) \right] \quad (13.43)$$

und, mit Hilfe der oben besprochenen "Symmetrie,"

$$\mathfrak{Z}_{bb} = 32 \left[m_R^4 - m_R^2 (p_1 \cdot k_2) + (p_1 \cdot k_2) (p_2 \cdot k_1) \right] \quad (13.44)$$

Schliesslich findet man nach einiger Rechnung

$$\mathfrak{Z}_{ab} = 16 m_R^2 \left[2m_R^2 + (p_1 \cdot k_1) - (p_1 \cdot k_2) \right] \quad (13.45)$$

Setzen wir nun diese Ausdrücke in (13.33) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{Pol.}} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 = & \frac{e_R^4}{2 m_R^2} \left\{ \left(\frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_2} + \frac{p_1 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_1} \right) \right. \\ & + 2 m_R^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} - \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right) \\ & \left. + m_R^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} - \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (13.46)$$

(Don't ask why; it's a fact!)

Nun spezialisieren wir aufs Laborsystem. Dann

ist

$$p_1 \cdot k_1 = m_R / \vec{k}_1 \equiv m_R \omega_1$$

$$p_1 \cdot k_2 = m_R / \vec{k}_2 \equiv m_R \omega_2$$

Gleichung (13.13) sagt

$$\omega_2 = \frac{m_R \omega_1}{m_R + \omega_1 (1 - \cos \theta)}, \quad (13.47)$$

wo θ der Streuwinkel ist. Daraus folgt

$$\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{m_R} (\cos \theta - 1).$$

Eingesetzt in (13.46), gibt das

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol.}} \sum_{\text{Spins}} |M|^2 = \frac{e_R^4}{2m_R^2} \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2 \theta \right\}.$$

Setzen wir dies schliesslich in (13.15) ein, so

ergibt sich, dass

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Labor}} = \frac{e_R^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{2m_R^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2 \theta \right\}$$

(13.48)

(13.47) würde uns erlauben, ω_2 aus (13.48) zu eliminieren. Wenn nun $\omega_1 \ll m$, dann ist $\omega_2 \approx \omega_1$ und wir erhalten

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Labor}} \approx \frac{e_R^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{2m_p^2} \left\{ 2 - \sin^2 \theta \right\} \quad (13.49)$$

Hurra: Das ist die Thomson Streuformel (3.82) aus Kapitel 3; (nicht-relativistische QED).

Nun berechnen wir schliesslich den Streuquerschnitt für polarisierte Photonen, aber ohne den Spin der Elektronen zu messen. Transversal polarisierte Photonen haben Polarisationsvektoren, $\vec{\varepsilon}$, mit

$$\vec{\varepsilon} = (0, \vec{\varepsilon}), \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0.$$

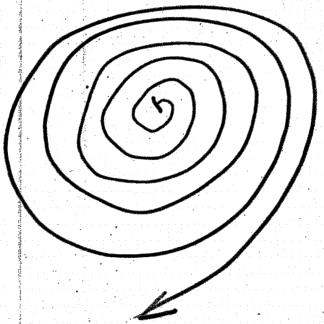
Im Laborsystem ist $p_1 = (m_p, \vec{0})$, also

$$p_1 \cdot \varepsilon_1 = p_1 \cdot \varepsilon_2 = 0.$$

Weiter gilt offensichtlich

$$p_1 \not\varepsilon_i u(p_1) = -m_p \not\varepsilon_i u(p), \quad i=1,2.$$

Now turn the crank



(e.g. Mandl & Shaw)

und zeige, dass

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Labor}} = \frac{e_R^4}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 4(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2 - 2 \right\} \quad (13.50)$$

Das ist die Klein-Nishina Formel.

Benutzt man nun die offensichtliche Beziehung, dass

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{Pol.}} (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (13.51)$$

so erhält man wieder (13.49).

Es ist recht erstaunlich, dass (13.50) schon ohne kovariante Störungstheorie und den ganzen formalen Apparat, den wir seit 1948-50 gelernt haben, korrekt hergeleitet werden konnte.

13.4. Streuung eines Elektrons im äusseren Feld

In diesem Abschnitt studieren wir die QED eines Systems, das sich in einem klassischen (äusseren) elektromagnetischen Feld, A_c , befindet. Dann ist die Lagrange-Dichte der Theorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^\gamma + \mathcal{L}_0^e + \mathcal{L}_I'$$

wo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I' &= -e \bar{\psi}^0 (\not{A}^0 + \not{A}_c^0) \psi^0 \\ &= -e_R \sum_i \bar{\psi}^R (\not{A}^R + \not{A}_c^R) \psi^R \end{aligned} \quad (13.52)$$

Die Feynman-Regeln lassen sich leicht auf diesen etwas allgemeineren Fall ausdehnen.

[LSZ - Reduktionsformalismus und Gell-Mann - Low
 Formel funktionieren wie ehedem, falls A_c zeitunabhängig ist. Falls $A_c(t, \vec{x}) \rightarrow \partial X(\vec{x})$, für $t \rightarrow \infty$, dann können wir direkt die Dyson-Reihe benutzen, um den durch $-e_R Z, \not{D}^R A_c \not{D}^R$ gestörten Propagator auszurechnen. Daraus ergibt sich dann eine Formel für S.]

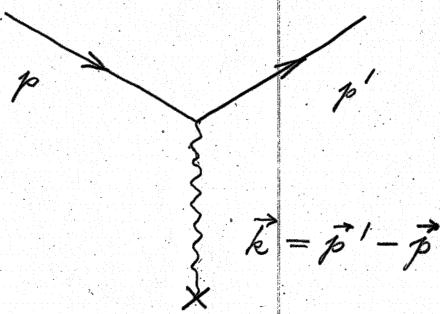
Wir wollen nun ein paar Stromprozesse im äußeren Feld explizite untersuchen. Sei $|i\rangle$ ein einlaufender Zustand, der ein Elektron mit Impuls $p = (E, \vec{p})$, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m_e^2}$ im Zustand $u_j(p)$ beschreibt. Wir wollen den Wirkungsquerschnitt für Streuung in einen auslaufenden Ein-Elektronenzustand $|f\rangle$ mit Impuls p' im Zustand $u_l(p')$ in 1. Ordnung in e_R berechnen.
 Wir nehmen an, das äußere Feld sei zeitunabhängig. Dann ist der räumliche Impuls zwar nicht mehr erhalten, aber die Energie bleibt erhalten. Die Streuamplitude ist

$$\langle f | S | i \rangle = 2\pi S (E' - E) \mathcal{M}, \quad (13.53)$$

wo

$$\mathcal{M} = ie_R \bar{u}_l(p') \hat{A}_c (\vec{k} = \vec{p}' - \vec{p}) u_j(p) + O(e_R^2) \quad (13.54)$$

Das Feynman Diagramm erster Ordnung ist



Das "Kreuz" deutet die Quelle des äusseren Feldes an.

Bemerkung: Wie wir im Abschnitt über Bremsstrahlung lernen werden, ist es gefährlich, aus der Endlichkeit von M in erster Ordnung in e_R zu "schliessen", dass die Korrektur zu M von der Ordnung e_R^2 sein muss — selbst in einer Theorie mit Ultraviolet-Cutoff, in der die Strahlungs korrekturen ultraviolet-konvergent sind. Der Grund ist, dass Infrarot-Divergenzen auftreten, wenn $\mu_R \rightarrow 0$.

Ungeachtet dieses Einwandes wollen wir nun die formalen Feynman-Regeln für die QED im äusseren Feld zusammenstellen.

(1) In der Formel für die Streuamplitude, die den Zusammenhang zwischen der "invarianten" Amplitude M und $\langle f | S | i \rangle$ herstellt, muss $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$ durch $2\pi \delta(E_f - E_i)$ ersetzt

werden, falls das äußere Feld zeitunabhängig (statisch) ist; (resp. gleichivalent zu einem statischen Felde ist).

(2) Tudem Wechselwirkungsvertex zwischen einem geladenen Teilchen und dem äusseren Feld A_c ordne man den Faktor

$$\hat{A}_c(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} A_c(\vec{x})$$

$$\begin{matrix} \text{nnnnn} \\ \vec{k} \end{matrix}$$

zu.

Die übrigen Feynman-Regeln bleiben gleich.

Wir berechnen nun den Streuquerschnitt für Streuung eines Elektrons im äusseren Feld. Dazu können wir auf die goldene Regel aus Kapitel 3) zurückgreifen.

Diese besagt, dass die Übergangsrate w durch die Gleichung

$$dw = (2\pi) \delta(E' - E) \left(\frac{m_e}{E} \right)^2 / M^2 \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \quad (13.55)$$

gegeben ist.

Dividiert man dw durch den einfallenden Teilchenfluss, $v = |\vec{p}|/E$, erhält man den Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = 2\pi \delta(E' - E) \left(\frac{m_R}{E}\right)^2 \frac{E}{|\vec{p}'|} |M|^2 \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \quad (13.56)$$

Nun benutzen wir Polarkoordinaten mit \vec{p}' als z -Achse.

Dann ist

$$d^3 p' = |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega' = |\vec{p}'| E' dE' d\Omega' \quad (13.57)$$

und wir finden

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{E'} dE' \\ &= \left(\frac{m_R}{2\pi} \right)^2 |M|^2 \end{aligned} \quad (13.58)$$

Aus (13.54) erhalten wir also in zweiter Ordnung in

e_R

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left(\frac{m_R e_R}{2\pi} \right)^2 \left| \bar{u}_l(p') A_c(\vec{k}) u_j(p) \right|^2 \quad (13.59)$$

$\vec{k} = \vec{p}' - \vec{p}$

Wir betrachten nun den Spezialfall der Streuung im Feld eines schweren Kerns. Dann ist

$$A_c(x) = \left(\frac{Ze_R}{4\pi |\vec{x}|}, \vec{\sigma} \right), \quad (13.60)$$

wo Z die Kernladung ist. Also

$$\hat{A}_c(\vec{k}) = \left(\frac{Z e_R}{|\vec{k}|^2}, \vec{0} \right). \quad (13.61)$$

Wir nehmen an, die Spins des ein- und auslaufenden Elektrons würden nicht gemessen. Dann ist über sie zu mitteln, resp. zu summieren. Das führt mit (13.59) und (13.61) auf die Gl.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \left(\frac{m_R e_R^2 Z}{2\pi |\vec{k}|^2} \right)^2 \frac{1}{2} \sum_{j,l} |\bar{u}_l(p') \gamma^0 u_j(p)|^2 \\ &= \frac{(e_R^2 Z)^2}{32\pi^2 |\vec{k}|^4} \text{Sp}((\not{p}' + m_R) \gamma^0 (\not{p} + m_R) \gamma^0) \\ &= \frac{(e_R^2 Z)^2}{8\pi^2 |\vec{k}|^4} \underbrace{(E^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}' + m_R^2)}_{E^2 + E^2 v^2 \cos \theta + E^2 - E^2 v^2} , \end{aligned} \quad (13.62)$$

Nun ist

$$E^2 + E^2 v^2 \cos \theta + E^2 - E^2 v^2 = 2E^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = |\vec{p}|^2 \cos \theta$$

$$|\vec{k}|^2 = |\vec{p}' - \vec{p}|^2 = 4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2),$$

$$|\vec{p}| = Ev.$$

Also finden wir die Mott'sche Streuformel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{(e_R^2 Z)^2}{64\pi^2 E^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} [1 - v^2 \sin^2(\theta/2)] \quad (13.63)$$

Im nicht-relativistischen Limes, ($E \approx m_R$, $v \ll 1$), erhalten wir daraus die Rutherford'sche Streuformel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{(e_R^2 Z)^2}{64\pi^2 m_R^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (13.64)$$

Diese Rechnungen sind für einen punktförmigen Kern gültig, lassen sich aber leicht auf ausgedehnte Kerne verallgemeinern. Messung des Wirkungsquerschnittes im relativistischen Bereich erlaubt eine Bestimmung der Ladungsverteilung im Kern.

Nun wollen wir den Wirkungsquerschnitt für polarisierte Elektronen berechnen. Im nicht-relativistischen Bereich ist dieser immer noch durch die Rutherford-Formel gegeben; (Spin-Erhaltung!). Im relativistischen Bereich entsteht eine Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Elektrons und dem durch den Kern erzeugten Magnetfeld im Ruhsystem des Elektrons. Deshalb ist der Spin nicht mehr erhalten.

Um die Spinabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes zu bestimmen, benutzen wir den Formalismus aus Abschnitt 13.2, (13.25). Ohne Verlust an Allgemeinheit können wir annehmen, das ein fallende

Elektron sei im Zustand $u_i(p)$, das ausfallende im Zustand $u_j(p')$. Dann müssen wir die folgende Größe berechnen:

$$X_j = |\bar{u}_j(p') \gamma^0 u_i(p)|^2$$

Mit Hilfe der Operatoren Π^\pm aus Abschnitt 13.2, (13.25) und den Formeln (13.20), (13.21) finden wir für X_j :

$$X_j = Sp [\Lambda^+(p') \gamma^0 \Pi^+(p) \Lambda^+(p) \gamma^0 \Pi^j(p')], \quad (13.65)$$

$$(\Pi^j = \Pi^+, j=1; \Pi^j = \Pi^-, j=2).$$

Die Berechnung dieser Spur ist etwas umständlich, vereinfacht sich aber im hochrelativistischen Bereich, da wir dann

$$\Pi^\pm(p) \approx \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5)$$

setzen dürfen. Dann ist

$$X_j = \frac{1}{16 m_R^2} Sp [(\not{p}' + m_R) \gamma^0 (1 + \gamma^5) (\not{p} + m_R) \gamma^0 (1 + (-1)^{j-1} \gamma^5)]$$

Also

$$X_1 = \frac{1}{16 m_R^2} Sp [(\not{p}' + m_R) \gamma^0 (1 + \gamma^5) \overbrace{(\not{p} + m_R)}^{\uparrow} \gamma^0 (1 + \gamma^5)]$$

$$= \frac{1}{16 m_R^2} Sp [\gamma^0 (\not{p}' + m_R) \gamma^0 \not{p} (1 - \gamma^5)^2]$$

$$(1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5) = 0$$

(13. 60)

$$\downarrow = \frac{1}{8m_R^2} Sp [\gamma^0 \not{p}' \gamma^0 \not{p}]$$

$$= \frac{1}{2m_R^2} \{ 2E' \cdot E - \not{p}' \cdot \not{p} \} \quad (13. 66)$$

$$X_2 = \frac{1}{16m_R^2} Sp [(\not{p}' + m_R) \gamma^0 (1 + \gamma^5) (\not{p} + m_R) \gamma^0 (1 - \gamma^5)]$$

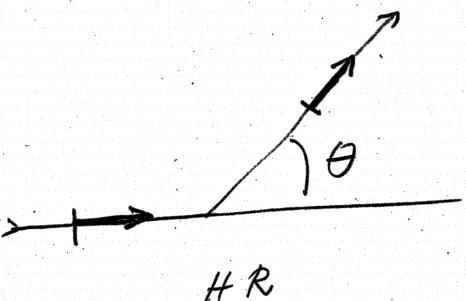
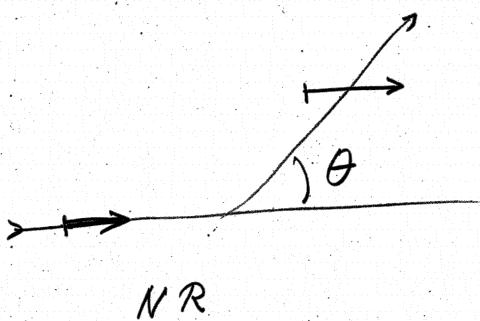
$$= \frac{1}{16m_R^2} Sp [\gamma^0 (\not{p}' + m_R) \gamma^0 m_R (1 + \gamma^5)^2]$$

$$= \frac{1}{8m_R^2} Sp [\gamma^0 m_R \gamma^0 m_R]$$

$$= \frac{1}{2m_R^2} m_R^2 \quad (13. 67)$$

$$\Rightarrow X_2 / X_1 \rightarrow 0 \quad \text{im hoch relativistischen}$$

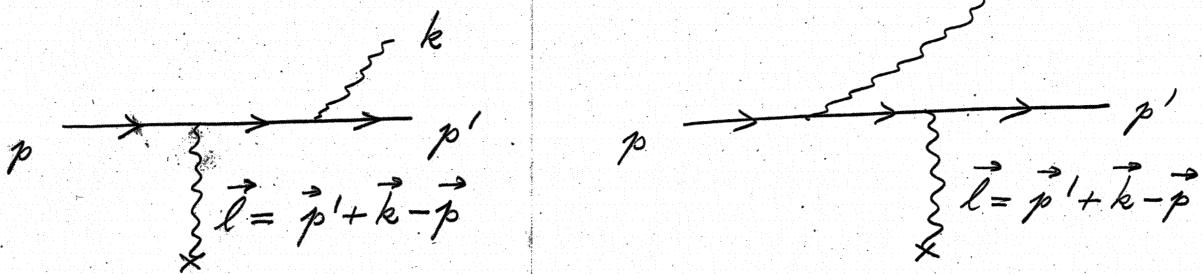
Limes \Rightarrow Helizität ist erhalten; (wogegen im nicht-relativistischen Limes der Spin erhalten ist!)



13. 5 Bremsstrahlung.

Da ein Elektron im Feld eines schweren Kernes eine beschleunigte Bewegung ausführt, ist klassisch zu erwarten, dass es strahlt und dadurch abgebremst wird. Dies geschieht auch in der QED und soll nun berechnet werden. Das Phänomen heißt Bremsstrahlung und ist von großer praktischer Bedeutung.

In tiefster Ordnung in e_R wird der Prozess der Bremsstrahlung durch die folgenden Feynman Diagramme wiedergegeben.



$$\langle f | S | i \rangle = 2\pi \delta(E' + \omega - E) M, \quad (13.68)$$

wo

$$M = -e_R^2 \bar{u}_j(p') [\not{\epsilon}(k) i S_F(p' + k) \not{A}_c(\vec{l}) + \not{A}_c(\vec{l}) i S_F(p - k) \not{\epsilon}(k)] u_j(p). \quad (13.69)$$

stehen lassen!

Nach Ausführung der Integration über E' finden wir für den Wirkungsquerschnitt (siehe (13.55), (13.56))

$$d\sigma = \frac{m_R^2}{(2\pi)^5 2\omega} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} |M|^2 d^3k d\Omega' \quad (13.70)$$

Nun benutzen wir den Formalismus aus Abschnitt 13.2, nur $d\sigma$ für den Fall, wo die Elektronenspins und die Polarisation des emittierten Photons nicht gemessen werden, anzurechnen. Dies wird uns auf die Bethe - Heitler Formel aus dem Jahre 1934(!) führen.

$$\frac{1}{2} \sum_{j', j, \varepsilon} |M|^2 = \frac{\alpha_R^3 Z^2}{\pi^2 \ell^4 / 4} F, \quad (13.71)$$

wo

$$\alpha_R = \frac{e_R^2}{4\pi}, \text{ und}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon} \text{Sp} \left[\left(\not{p}' + \not{k} + m_R \gamma^0 - \not{p} - \not{k} + m_R \not{\gamma} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\not{p} + m_R}{2m_R} \right) \left(\gamma^0 - \not{p}' + \not{k} + m_R \not{\gamma} - \not{p} - \not{k} + m_R \not{\gamma} \right) \left(\frac{\not{p} + m_R}{2m_R} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2^5 m_R^2} (F_1 + F_2 + F_3). \end{aligned} \quad (13.72)$$

Dabei sind

$$F_1 = \frac{1}{(p' \cdot k)^2} \sum_{\epsilon} \text{Sp} [\not{e}(p' + k + m_R) \not{\gamma}^0(p + m) \not{\gamma}^0(p' + k + m_R) \\ \times \not{e}(p' + m_R)]$$

$$F_2 = F_1 (p \leftrightarrow p')$$

$$F_3 = - \frac{1}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} \{ \text{Sp} [\not{\gamma}^0(p - k + m_R) \not{e}(p + m_R) \not{\gamma}^0(p' + k + m_R) \\ \times \not{e}(p' + m_R)] + (p \leftrightarrow p') \} \quad (13.73)$$

Wir wählen für $\epsilon(\vec{k})$ einen transversalen Polarisationsvektor; (insbesondere ist $\epsilon^0(\vec{k}) = 0$). Dann findet man

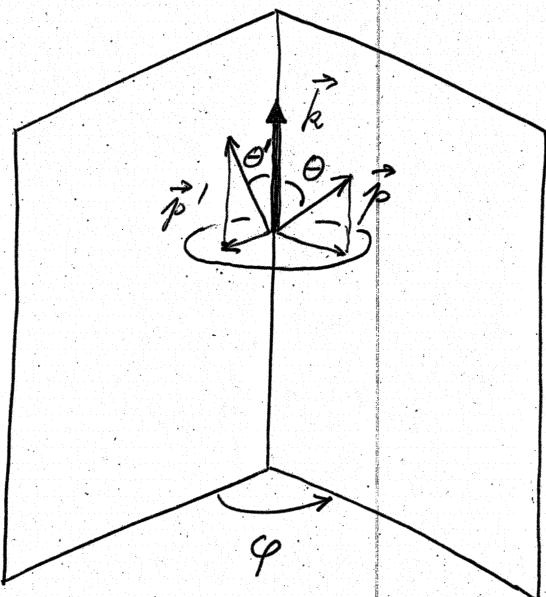
$$F_1 = \frac{8}{(p' \cdot k)^2} \sum_{\epsilon} \left[2(\epsilon \cdot p')^2 (m_R^2 + 2EE' + 2E\omega - p \cdot p' - p \cdot k) \right. \\ \left. + 2(\epsilon \cdot p')(\epsilon \cdot p)(k \cdot p') + 2E\omega(k \cdot p') \right. \\ \left. - (p \cdot k)(p' \cdot k) \right]$$

$$F_2 = F_1 (p \leftrightarrow p')$$

$$F_3 = \frac{16}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} \sum_{\epsilon} \left[(\epsilon \cdot p)(\epsilon \cdot p') (p \cdot k - p' \cdot k + 2p \cdot p' - 4EE' - 2m_R^2) \right. \\ \left. + (\epsilon \cdot p')^2 (k \cdot p) - (\epsilon \cdot p)^2 (k \cdot p') + (p \cdot k)(p' \cdot k) - m_R^2 \omega^2 \right. \\ \left. + \omega (\omega p \cdot p' - E(p' \cdot k) - E'(p \cdot k)) \right]$$

Das folgt aus höherer j-Gymnastik.

Sei nun θ' der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{p}' ,
 θ der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{p} und φ der
Winkel zwischen den Ebenen (\vec{k}, \vec{p}') und (\vec{k}, \vec{p})



Nun ist (mit $\varepsilon^0 = 0$, d.h. $\varepsilon \cdot a = -\vec{\varepsilon} \cdot \vec{a}$)

$$\sum_{\varepsilon} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p}')^2 = |\vec{p}'|^2 \sin^2 \theta'$$

$$\sum_{\varepsilon} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta$$

$$\sum_{\varepsilon} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p}')(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p}) = |\vec{p}'| |\vec{p}| \sin \theta' \sin \theta \cos \varphi$$

(Das ist elementarste Geometrie, die man aus
der Figur abliest!)

Damit erhalten wir unser Resultat für dG :

$$\begin{aligned}
 dG = & \frac{\alpha_r^3 Z^2}{4\pi^2 |\vec{k}|^4} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{d|\vec{k}|}{|\vec{k}|} d\Omega_2 d\Omega'_1 \\
 & \times \left[\frac{|\vec{p}'|^2 \sin^2 \theta'}{(E' - |\vec{p}'| \cos \theta')^2} (4E^2 - |\vec{k}|^2) + \frac{|\vec{p}'|^2 \sin^2 \theta}{(E - |\vec{p}'| \cos \theta)^2} (4E^2 - |\vec{k}|^2) \right. \\
 & + 2\omega^2 \frac{|\vec{p}'|^2 \sin^2 \theta + |\vec{p}'|^2 \sin^2 \theta}{(E - |\vec{p}'| \cos \theta)(E - |\vec{p}'| \sin \theta)} - \frac{2|\vec{p}'||\vec{p}| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi}{(E - |\vec{p}'| \cos \theta')(E - |\vec{p}'| \cos \theta)} \\
 & \left. \times (4EE' - |\vec{k}|^2 + 2\omega^2) \right], \quad (13.73)
 \end{aligned}$$

wo $\omega = |\vec{k}|$.

Dieses Resultat zeigt, dass eine Integration über $|\vec{k}|$ bei $|\vec{k}|=0$ divergiert. Das ist die sog. Infrarotkatastrophe. Sie ist mit dem Umstande verbunden, dass bei der Streuung eines Elektrons tatsächlich mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele weiche Photonen endlicher Totalenergie emittiert werden.

Nun wollen wir das Verhalten von (13.73) im Limes $|\vec{k}| \rightarrow 0$ noch diskutieren, wo sich das Resultat (13.73) enorm vereinfacht.

Im Limes $|\vec{k}| = 0$ gilt:

$$\vec{l} = \vec{p}' - \vec{p}, \quad |\vec{p}'| = |\vec{p}|,$$

wie im Falle elastischer Streuung. In (13.69) vernachlässigen wir Terme $\propto \vec{k}$ im Zähler der Elektron-Propagatoren. Dann benützen wir, dass

$$\not{p}^2 = 2 p \cdot \epsilon - \not{p}^2$$

und vereinfachen das Resultat durch Benützung der Dirac Gleichung,

$$(\not{p} - m_R) u(p) = 0,$$

$$\bar{u}(p') (\not{p}' - m_R) = 0.$$

So folgt schliesslich, dass

$$\begin{aligned} M &\approx -i e_R^2 \bar{u}(p') \not{A}_c(\vec{l}) u(p) \left[\frac{p' \cdot \epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right] \\ &|\vec{k}| \approx 0 \\ &= -e_R M_{\text{Coulomb}} \left[\frac{p' \cdot \epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right] \quad (13.74) \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} d \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{Bremsstr.}} &\approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{elastisch}} \frac{\alpha_R}{(2\pi)^2} \left[\frac{p' \cdot \epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right]^2 \frac{d^3 k}{|\vec{k}|} \\ &\quad (13.75) \end{aligned}$$

woraus man die Infrarotkatastrophe sofort erreicht.

Falls man noch über ε summiert, findet man

$$\frac{d}{d\Omega'} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{Br.} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{el.} \frac{dr}{(2\pi)^2} \left[\frac{p'}{p' \cdot r} - \frac{p}{p \cdot r} \right]^2 \frac{d^3 k}{|\vec{k}|}.$$

(Dazu benütze man (13.31) aus Abschnitt 13.2 !)

13.6 Die Infrarotkatastrophe und ihre Lösung.

Im Abschnitt 13.5 haben wir gesehen, dass die Summe über alle möglichen Photonenzustände mit Energie $|\vec{k}| \leq \varepsilon$, d.h.

$$\int d\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{Br.} \text{ in tiefster } |\vec{k}| \leq \varepsilon$$

Ordnung in ε_p bei $|\vec{k}|=0$ logarithmisch divergiert.

Das ist physikalisch unsinnig. Tatsächlich stellt sich heraus, dass in einem Streuprozess, in dem ein Elektron abgelenkt wird, mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Photonen endlicher Gesamtenergie

emittiert werden. Geladene in- und out-Zustände enthalten in der QED immer unendlich viele

Photonen endlicher (beliebig kleiner) Gesamtenergie; (Bloch - Nordsieck Ansatz). In der Störungstheorie tragen aber nur endlich viele dieser weichen Photonen, in einer vorgegebenen Ordnung in e_R , zu einer Streuamplitude bei. Auf der Grundlage zahlreicher Rechnungen wird vermutet, dass, wenn man in- und out-Zustände (die von e_R abhängen!) und den Streuoperator S alle nach Potenzen von e_R entwickelt, Übergangsamplituden in jeder festen Ordnung von e_R endlich sind.

Allgemein ist dies aber noch nicht bewiesen.

Falls man die Infrarotkatastrophe von Abschnitt 13.5 nur auf dem Niveau der Streuquerschnitte lösen will, kann man pragmatischer wie folgt vorgehen: Experimentell kann man nicht zwischen zwei auslaufenden Zuständen unterscheiden, die sich nur durch weiche Photonen

einer Gesamtenergie ε , wo ε durch die Auflösung der experimentellen Ausrüstung bestimmt ist, unterscheiden; ($\varepsilon > 0$ ist klein). Daraus gilt

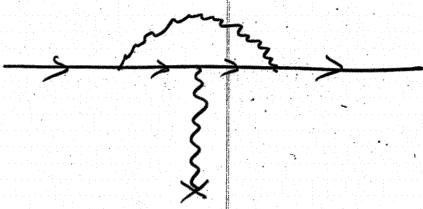
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{exp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{el.}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{Br.}(\varepsilon)} \quad (13.76)$$

wo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{Br.}(\varepsilon)} = \int_{|\vec{k}| \leq \varepsilon} d\Omega' \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{Br.}} \quad (13.77)$$

Beide Terme auf der rechten Seite von (13.76) sind nun in gleicher Ordnung in α_R zu berechnen und die Beiträge gleicher Ordnung sind zu addieren.

So muss man in 2. Ordnung in α_R in $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{el.}}$ auch das Diagramm



und den Gegenterm 2. Ordnung in α_R berücksichtigen, (siehe Kapitel 14.1). Das ergibt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{el.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{el.}}^0 \left[1 + \alpha_R R + O(\alpha_R^2) \right] \quad (13.78)$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{exp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{el.}}^0 \left[1 + \alpha_R (B(\varepsilon) + R) + O(\alpha_R^2) \right], \quad (13.79)$$

wo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{Br.}(\varepsilon)} = \alpha_R \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{el.}}^0 B(\varepsilon).$$

Die Infrarotdivergenzen in $B(\varepsilon)$ und R kompensieren sich exakt.

$$B(\varepsilon) + R \sim \ln \varepsilon$$

Yennie, Frautschi und Suura haben Argumente erstanden, die darauf hinweisen, dass eine Summation der Störungsreihe für $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{exp.}}$ das Resultat

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{exp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{el.}}^0 \exp [\alpha_R (B(\varepsilon) + R)] \sim \varepsilon^{\text{const. } \alpha_R} \quad (13.80)$$

ergibt. Ihre Rechnungen können hier aber nicht reproduziert werden.

Für



, etc. siehe Bücher!

14. Strahlungskorrekturen in der QED

Die in Kapitel 12 hergeleiteten und in Kapitel 13 anhand von Rechnungen in führender Ordnung in e_R ($e_R^2 =: \alpha$) illustrierten Feynman Regeln für die QED sind die Grundlage für die Erarbeitung eines systematischen Algorithmus zur Berechnung von Streuamplituden und von Wirkungsquerschnitten in der QED. Bis anhin haben wir nur die führenden Beiträge in e_R zu einigen Streuamplituden berechnet. Diese entsprechen Baumgraphen. Es ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung mit experimentellen Daten (im einstelligen Prozentbereich). Allerdings zeigt schon unsere Diskussion der Bremsstrahlung, dass es nötig ist, auch Strahlungskorrekturen, die Feynman Graphen mit Schleifen

entsprechen, auszurechnen. Es gibt zwei wichtige Gründe, wieso wir Strahlungskorrekturen, d.h. Feynman Amplituden, die zu Feynman Graphen mit Schleifen gehören, berechnen wollen:

(a) Wir wollen die mathematische Konsistenz der Störungstheorie testen.

(b) Höhere Ordnungen in ϵ_R müssen berechnet werden, um die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu verbessern.

Man könnte zunächst erwarten, dass die Berechnung von Strahlungskorrekturen - abgesehen von der Auswertung gewisser Integrale - keine Schwierigkeiten bietet. Wir werden jedoch sehen, dass dabei divergente Ausdrücke auftreten werden, so dass es nicht offensichtlich ist, wie man aus der Störungstheorie wohl definierte, endliche Ausdrücke gewinnen kann. Wir werden auf zweierlei Typen von Diver-

grenzen stossen:

(i) Infrarotdivergenzen \leftrightarrow Divergenzen für $k \rightarrow 0$ (k : Photon Energie-Impuls Vektor). Diese können zunächst eliminiert werden, indem man dem Photon eine kleine Masse $\mu > 0$ gibt. Es ist dann allerdings nachzuweisen, dass physikalische Größen einen endlichen Grenzwert haben, wenn $\mu \rightarrow 0$ strebt.

(ii) Ultraviolettdivergenzen \leftrightarrow Divergenzen bei hohen Impulsen unserer Photon- und Elektron-Positron Linien. Wie in Kap. 12 angedeutet, müssen diese durch geeignete Redefinition oder Renormierung der in der Lagrange dichte auftretenden "nackten" Parameter e , m und Z_1 eliminiert werden. Dazu muss zunächst ein Ultraviolett Cutoff κ in die Theorie eingeführt werden, der die Theorie ultraviolett endlich macht. Dieser soll die

Eichinvarianz der QED erhalten. Wir werden zwei derartige Regularisierungen besprechen:

- Pauli - Villars Regularisierung;
- dimensionelle Regularisierung (Raum-Zeit Dimension, d , wird als komplexer Parameter aufgefasst).

Wir wenden uns nun zuerst den Ultraviolettdivergenzen und der Renormierungstheorie zu und benützen dazu die Pauli - Villars Regularisierung. Dem Photon geben wir eine kleine Masse $\mu > 0$.

14.1 Formale Aspekte der Renormierungstheorie

Wir gehen von der Lagrange dichte (12.7) aus:

$$\mathcal{L} = \frac{Z_3}{4e_R^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2e_R^2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{\mu^2}{2e_R^2} (A_\mu A^\mu) + Z_1 (-i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \not{v} A_\mu) \quad (14.1)$$

(Feynman Eichung: Koeff. von $(\partial_\mu A^\mu)^2$ ist $\frac{1}{2e_R^2}$).

Dabei ist $e = e_R Z_3^{-1/2}$ die "nackte" Ladung.

In führender Ordnung in e_R gilt, dass $Z_3 = 1$, d.h. $e = e_R$, $Z_1 = 1$ und $m = m_R$ (= physikalische Masse des Elektrons/Positrons).

Wir reskalieren das Dirac Feld:

$$\psi = :e_R^{-1} \Psi, \bar{\psi} = :e_R^{-1} \bar{\Psi}. \quad (14.2)$$

Dann wird die Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{e_R^2} \bar{\mathcal{L}}, \quad (14.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = & \frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{\mu^2}{2} (A_\mu A^\mu) \\ & + Z_1 (-i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + m \bar{\Psi} \Psi - \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu), \end{aligned} \quad (14.4)$$

wo $Z_3 = 1 + O(e_R^2)$, $Z_1 = 1 + O(e_R^2)$, $m = m_R + O(e_R^2)$.

Für die reskalierte Theorie gilt:

- Propagatoren

$$\langle 0 | T [A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2)] | 0 \rangle = e_R^2 i D_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) \quad (14.5)$$

$$\langle 0 | T [\bar{\Psi}_{\alpha_1}(x_1) \bar{\Psi}_{\alpha_2}(x_2)] | 0 \rangle = e_R^2 S_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1 - x_2)$$

- Vertex

$$i L_I(x) = -\frac{i}{e_R^2} \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x) \quad (14.6)$$

- Physikalische Felder (in den LSZ Reduktionsformeln)

$$\psi = e_k^{-1} \Psi, \bar{\psi} = e_k^{-1} \bar{\Psi}, A_\mu = e_k^{-1} A_\mu \quad (14.7)$$

Wir untersuchen nun die Feynman Amplituden der QED, indem wir die reskalierte Theorie benützen. Sei $M(G)$ die einem Feynman Graphen G entsprechende Feynman Amplitude. (Dabei sei G zusammenhängend.) Dann implizieren die Feynman Regeln der QED die folgenden Behauptungen:

(1) $\#$ Schleifen in $G = \#$ der unabhängigen Impulsraumintegrationen in $M(G)$.

(2) $E \equiv E(G) : \# \underline{\text{äußerer Linien von } G}$
 $= \# \text{ physikalischer Felder, } \psi, \bar{\psi}$
 $\text{und } A_\mu, \text{ in } M(G);$

$I \equiv I(G) : \# \underline{\text{innerer Linien von } G};$

$V \equiv V(G) : \# \underline{\text{Vertices von } G}.$

Zu jedem Vertex von G gehört in $M(G)$ eine 4-dimensionale δ -Funktion, die die Energie-Impuls Erhaltung ausdrückt. Es gibt in $M(G)$ also ein Produkt von V solcher δ -Funktionen. Eine davon drückt die totale Energie-Impuls Erhaltung aus. Es bleiben also $V-1$ δ -Funktionen. Über den Vierimpuls jeder inneren Linie ist in der Berechnung von $M(G)$ zu integrieren; aber $V-1$ solche Integrationen sind dank der δ -Funktionen trivial auszuführen. Daher gelangen wir mit (1) auf das Resultat:

der unabhängigen Impulsraumintegrationen

$$\begin{aligned} &= \# \text{ Schleifen, } L(G), \text{ von } G \\ &= I(G) - (V(G)-1). \end{aligned} \tag{14.8}$$

(3) Ordnung in e_R von $M(G)$.

(i) Jeder Propagator der reskalierten Theorie ist proportional zu e_R^2 ; d.h. jede innere Linie

entspricht einem Faktor e_R^2 ; siehe (14.5). Eine äußere Linie entspricht dagegen wegen (14.7) lediglich einem Faktor e_R^{-2} .

(ii) Ein Vertex von G entspricht wegen (14.6) einem Faktor e_R^{-2} .

(iii) Insgesamt ist also die Ordnung in e_R von $\mathcal{M}(G)$ durch

$$\begin{aligned} & \left(e_R^2\right)^{I(G) + \frac{1}{2}E(G) - V(G)} \\ &= \left(e_R^2\right)^{I(G) - (V(G)-1) + \frac{1}{2}(E(G)-2)} \\ &= \left(e_R^2\right)^{\frac{1}{2}(E(G)-2)} \left(e_R^2\right)^{L(G)} \end{aligned} \quad (14.9)$$

gegeben. Dabei ist offenbar $L(G)$ die Ordnung in e_R^2 der zu $\mathcal{M}(G)$ beitragenden Strahlungskorrekturen. Man wird ferner wollen, dass die Parameter Z_3, Z_1 und m als Potenzzeichen in e_R^2 so zu wählen sind, dass der Gesamt-

beitrag zu einer beliebig vorgegebenen Streuamplitude in jeder Ordnung in e_R endlich sein soll.

Wir wollen nun herausfinden, welche Feynman Graphen, G , zu potentiell divergenten Feynman Amplituden, $\mathcal{M}(G)$, Anlass geben, bevor die zu $Z_3 - 1, Z_1 - 1$ und $m - m_R$ gehörenden "Gegenterme" berücksichtigt werden.

(4) "Power counting"

Es sei G ein zusammenhängender Feynman Graph.

$E_F(G)$: # äußerer Fermionlinien;

$E_B(G)$: # äußerer Photonlinien;

ebenso sind $I_F(G)$ und $I_B(G)$ definiert.

Zum Feynman Integral, das die Feynman Ampli-

tude $\mathcal{M}(G)$ ausdrückt, trägt jede innere Fermionlinie eine inverse Potenz eines Impulses bei, jede innere Photonlinie aber eine zweite inverse Potenz eines Impulses. Über jeden Impuls, der zu einer

inneren Linie gehört, ist ein $d (= 4)$ -dimensionales Impulsraumintegral zu erstrecken. Aber dank $V-1$ δ -Funktionen sind $V-1$ dieser Integrationen trivial auszuführen.

Daraus lässt sich nun der Divergenzgrad, $\omega(G)$, der dem Graphen G entsprechenden Feynman Amplitude $M(G)$ herleiten:

$$\begin{aligned}\omega(G) &:= \underbrace{d(I(G) - (V(G)-1)) - 2I_B(G) - I_F(G)}_{\# \text{ unabhängiger Integrationen}} \\ &= (d-2)I_B(G) + (d-1)I_F(G) - dV(G) + d\end{aligned}\quad (14.10)$$

Falls $\omega(G) \geq 0$, so ist G "oberflächlich (geschen)

divergent"; $\omega(G) = 2 \leftrightarrow$ quadratische Divergenz ($\sim \int_a^x dx \propto x^2$, für $x \rightarrow \infty$), $\omega(G) = 1 \leftrightarrow$ lineare Divergenz ($\sim \int_a^x dx \propto x$, $x \rightarrow \infty$), $\omega(G) = 0 \leftrightarrow$ $\left(\sim \int_a^x \frac{dx}{x} \propto \log x\right.$, $x \rightarrow \infty$).

Jede äußere Linie endet in einem Vertex; jede

innere Linie in zwei Vertices; an jedem Vertex enden zwei fermionische Linien (eine ein- und eine auslaufende) und eine Photon linie. Daher finden wir, dass

$$V(G) = 2 I_B(G) + E_B(G) \quad (14.11)$$

= # der in irgend einem Vertex einlaufenden Fermionlinien

$$= I_F(G) + \frac{1}{2} E_F(G), \quad (14.12)$$

denn nur die Hälfte der äusseren Fermionlinien laufen in einen Vertex ein. Es folgt, dass

$$I_F(G) = 2 I_B(G) + E_B(G) - \frac{1}{2} E_F(G) \quad (14.13)$$

Mit (14.10) folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \omega(G) &= (d-2) I_B(G) + 2(d-1) I_B(G) + (d-1) E_B(G) \\ &\quad - \frac{d-1}{2} E_F(G) - d V(G) + d \end{aligned}$$

$$(14.11) \quad = d + [d-2 + 2d - 2 - 2d] I_B(G)$$

$$+ [d-1 - d] E_B(G) - \frac{d-1}{2} E_F(G)$$

$$= d - E_B(G) - \frac{d-1}{2} E_F(G) + (d-4) I_B(G). \quad (14.14)$$

Wir sehen, dass für $d < 4$ $\omega(G)$ negativ wird, d.h. $K(G)$ ist "oberflächlich konvergent", sobald $I_8(G)$ gross genug ist. Es gibt daher nur endlich viele Subgraphen, die auf divergente Feynman Integrale führen. Man sagt, die QED in $d < 4$ Dimensionen sei superrenormierbar.

Für $d=4$ ergibt (14.14), dass

$$\omega(G) = 4 - E_8(G) - \frac{3}{2} E_F(G). \quad (14.15)$$

Diese Formel erlaubt es uns, alle Graphen zu finden, die zu oberflächlich divergenten Feynmanamplituden gehören ("divergente Diagramme"):

a)  $\leftrightarrow \omega = 2.$

Es wird sich herausstellen, dass dank der Eichinvarianz der QED diese Diagramme nur logarithmisch divergent sind.

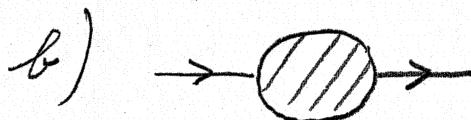
$k \text{ } \overset{\mu}{\text{---}} \text{ } \overset{\nu}{\text{---}} \text{ } \overset{\rho}{\text{---}} \text{ } \overset{\sigma}{\text{---}} \text{ } k \leftrightarrow (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) F(k^2),$ (14.16)

wo $F(k^2)$ logarithmisch divergent ist:

$$F(k^2) = F(0) + \delta F(k^2);$$

$F(0)$ ist logarithmisch divergent und bestimmt die Ladungsrenormierung: $F(0) \sim Z_3 - 1$, vgl.

mit (14.1). Dagegen ist $\delta F(k^2) \propto k^2$ endlich.

b)  $\leftrightarrow \omega = 1$.

Aus Symmetriegründen des Integranden in den entsprechenden Feynman Integralen werden wir finden, dass

$$p \rightarrow \text{loop} \rightarrow p \leftrightarrow \not{p} A(p^2) + B(p^2), \quad (14.17)$$

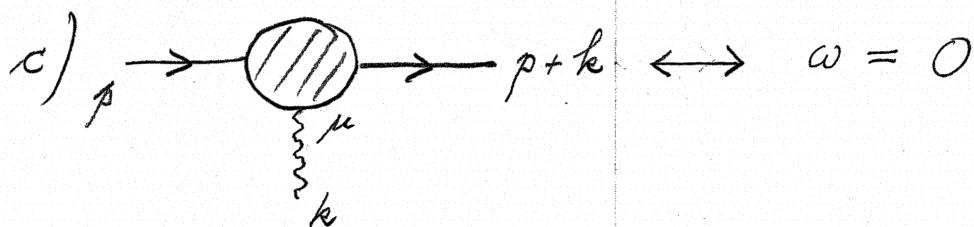
$$A(p^2) = A(m_\rho^2) + \delta A(p^2)$$

$$B(p^2) = B(m_\rho^2) + \delta B(p^2)$$

wo $A(0)$ und $B(0)$ logarithmisch divergent sind, wogegen $\delta A(p^2) \propto p^2 - m_\rho^2$ und $\delta B(p^2) \propto p^2 - m_\rho^2$ konvergent sind. Durch Vergleich mit (14.1) sehen wir, dass $A(m_\rho^2)$ die Feld-

Stärkenrenormierung Z_1 bestimmen wird ($A(m_R^2) \sim Z_1 - 1$), wogegen $B(m_R^2)$ die Massenrenormierung ($B(m_R^2) \sim Z_1 m - m_R$) bestimmen wird.

Formel (14.9) sagt, dass die Diagramme a) und b) von der Ordnung $(e_R^2)^L$, $L = \# \text{Schleifen}$, sind.



Wir werden sehen, dass

$$p \rightarrow \text{loop} \rightarrow p+k \quad \leftrightarrow \quad N^\mu(p, p+k), \quad (14.18)$$

mit

$$N^\mu(p, p+k) = N^\mu(p, p) + \delta N^\mu(p, p+k),$$

und

$$N^\mu(p, p) \sim e_R^2 g^\mu A(m_R^2), \quad p^2 \approx m_R^2, \quad (14.19)$$

(A wie in (14.17); logarithmisch divergent);

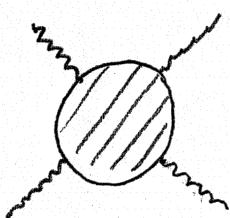
$\delta N^\mu(p, p+k) \propto k^2$ endlich. Formel (14.19) ist

Ausdruck einer sog. Ward (-Takahashi) Identität.

Die Ward Identitäten folgen aus der Eichinvarianz der QED.

Explizite Berechnung der Feynman Amplituden zu den Diagrammen c) wird es ermöglichen, das anomale magnetische Moment des Elektrons und des Positrons zu bestimmen, das sehr präzise gemessen werden kann.

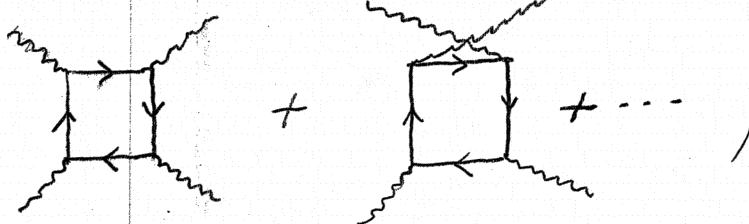
d)



$$\longleftrightarrow \omega = 0$$

Die Eichinvarianz der QED impliziert, dass die zu d) gehörenden Feynman Amplituden, die die Photon - Photon Streuung beschreiben, in der korrekt renominierten Theorie endlich sind. In führender Ordnung, e_R^4 (siehe (14.9)), in e_R findet man

d) ~



und diese Einschleifendiagramme sind in der Tat endlich; (\rightarrow Übungen).

Wird die QED eichinvariant regularisiert, so gibt es keine divergenten Diagramme, die zu einer Renormierung der Photonmasse (Koeff. von $(A_\mu A^\mu)$) oder des Koeffizienten des Eichterms $\propto (\partial_\mu A^\mu)^2$ in der Lagragedichte (14.1) der QED Anlass geben. Das wären nämlich Diagramme des Typs a). Diese erfüllen jedoch (14.16). Die Gl. (14.16) führt aber lediglich auf eine Renormierung von $Z_3 = \frac{e_R^2}{e^2}$ (Ladungsrenormierung).

14.2. Die Pauli - Villars Regularisierung der QED.

Wir ersetzen die Lagragedichte (14.1) der QED durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{Z_3}{4e_R^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2e_R^2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{\mu^2}{2e_R^2} (A_\mu A^\mu) \\ & - \sum_{s=0}^S Z_s \left(-i \bar{\psi}_s \gamma^\mu \partial_\mu \psi_s + \lambda_s m \bar{\psi}_s \psi_s - \bar{\psi}_s \gamma^\mu \psi_s A_\mu \right) \end{aligned} \quad (14.20)$$

wo $\psi_0 := \psi$, $\bar{\psi}_0 := \bar{\psi}$ das Dirac- und das konjugierte Dirac Spinorfeld (mit Fermi Statistik) sind, die die Elektronen und Positronen beschreiben,

$\lambda_0 = 1$. Alle Felder mit s gerade sind fermionische Spinorfelder; alle Felder mit s ungerade sind Spinorfelder, die mit dem falschen Zusammenhang zwischen Spin und Statistik, nämlich als Bosefelder (Vertauschungsstatt Anti-Vertauschungsrelationen) quantisiert werden). Die nackten Massen dieser Felder sind durch $\lambda_s m$ gegeben, $1 \leq \lambda_s < \infty$. Für $s \geq 1$ werden wir $\lambda_s \propto 1$ wählen, mit $1 \rightarrow \infty$; d.h. die Ruheenergien der durch $\psi_s, \bar{\psi}_s$ beschriebenen Teilchen sind proportional zu $\kappa = 1m \rightarrow \infty$, für $s = 1, \dots, S$. Die Zahl $S+1$ aller Spinorfelder sei gerade.

Wechselwirkungen aller dieser Teilchen mit Photonen der Energie $> \kappa$ werden "abgeschaltet" oder vernachlässigt.

Wir studieren nun Schleifen von Spinoren: Da

für s gerade die Spinorfelder Fermifelder sind, wogegen sie für s ungerade Bosefelder sind, haben zwei Schleifen, die sich nur durch die Parität von s unterscheiden, ein relatives Minusvorzeichen. Wären die Massen der um diese Schleifen zirkulierenden Teilchen identisch, so würden sich die entsprechenden Feynman Amplituden exakt wegheben. Sind die Massen unterschiedlich, so ist die Kompensation nicht exakt. Aber sie wird im Bereich, wo der Schleifenimpuls gegen ∞ strebt, exakt. Das bedeutet, dass das Ultraviolettverhalten der Schleifenintegration verbessert wird, falls $S+1$ gerade ist. In der QED werden für $S=3$ und $\Lambda < \infty$ alle Feynman Amplituden endlich.

Man sieht es der Lagrange dichte (14.20) sofort an, dass die Wechselwirkungen der Materiefelder,

$\psi_0, \bar{\psi}_0, \dots, \psi_s, \bar{\psi}_s$ mit dem Photonfeld die Eichinvarianz erhält: Unter der Transformation

$$\psi_s(x) \mapsto e^{i\chi(x)} \psi_s(x), \quad \bar{\psi}_s(x) \mapsto \bar{\psi}_s(x) e^{-i\chi(x)},$$

$s = 0, \dots, S$, und

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$$
(14.21)

bleibt der letzte Term auf der rechten Seite von (14.20) unverändert.

Formal reproduziert die Theorie mit Lagrangedichte (14.20) die QED im Limes $\lambda_s \propto \Lambda \rightarrow \infty$, für $s = 1, 2, \dots, S$; (die zusätzlich in die Theorie eingeführten Teilchen, die durch die Felder $\psi_1, \bar{\psi}_1, \dots, \psi_s, \bar{\psi}_s$ beschrieben werden, werden im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ unendlich schwer, entsprechen also statischen Ladungen). Für $\Lambda < \infty$ sind allerdings die Felder $\psi_1, \bar{\psi}_1, \dots, \psi_s, \bar{\psi}_s$ dynamisch, und da die Felder $\psi_s, \bar{\psi}_s$, s ungerade, den falschen Zusammenhang zwischen Spin und Statistik aufweisen,

verletzt die Theorie die Lokalität (Einstein-Kausalität). Man will nun die freien Parameter e^2 , resp. λ_3 , λ_1 und m als Funktionen von Λ so wählen, dass im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ eine physikalisch sinnvolle, lokale Quantenfeldtheorie, eben die QED, resultiert.

Konkret werden wir $S = 3$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \Lambda$ (14.22)
und $\lambda_2 = c\Lambda$, $c > 1$, wählen.

14.3 Einschleifen-Ladungsrenormierung

In diesem Abschnitt bestimmen wir den Einschleifenbeitrag, $\propto e_R^2$, zu den Diagrammen des Typs a), was uns auf die Ladungsrenormierung in der Ordnung e_R^2 führt. Dazu müssen wir die Feynman Amplituden zu den folgenden Feynman Graphen berechnen:

verletzt die Theorie die Lokalität, resp. Einstein Kausalität. Man will nun die nackten Parameter e^2 (resp. Z_3), Z_1 und m als Funktionen von Λ so wählen, dass im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ eine physikalisch sinnvolle, lokale Quantenfeldtheorie, eben die QED, resultiert.

Konkret werden wir $S = 3$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = c\Lambda$, $c > 1$, wählen.

14.3 Einschleifen-Ladung renormierung

In diesem Abschnitt bestimmen wir den Einschleifenbeitrag $\propto e_R^2$ zu den Diagrammen des Typs a), was uns auf die Ladungsrenormierung in der Ordnung e_R^2 führt. Wir beginnen mit ein paar allgemeinen Betrachtungen.

Ein Einzelchen-irreduzibler Feynman Graph, G , ist ein zusammenhängender Graph mit der Eigenschaft, dass G durch Zerschneiden irgend einer inneren Linie nicht in zwei disjunkte

Teilgraphen zerlegt werden kann. Man sagt im Jargon, G sei 1PI (für "one-particle irreducible").

Wir stellen uns nun vor die Theorie sei Pauli-Villars regularisiert, wie im (14.20), mit

$$S=3, \lambda_1 = \lambda_3 = 1, \lambda_2 = c\Lambda, c > 1, \quad (14.23)$$

und die Photon Frequenzen seien bei $\kappa = 1$ m abgeschnitten, für ein $\Lambda < \infty$. Dann sind alle Feynman Amplituden ultraviolett-endlich, d.h. durch ultraviolett-konvergente Integrale gegeben.

Man versucht nun, die Parameter λ_3, λ_2 und m als Funktionen von e_R und Λ so zu wählen, dass in jeder endlichen Ordnung in e_R der Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ existiert. Wir zeigen im Folgenden, dass dies zumindest in der Ordnung e_R^2 , d.h. für Einschleifen-Feynman Amplituden möglich ist.

Man denke sich nun, es sei möglich, für $\Lambda < \infty$ alle zu 1PI Graphen mit zwei äusseren Photon-

linien gehörenden Feynman Amplituden aufzusummen. Graphisch bezeichnen wir diese Summe mit

$$\text{Diagramm } k \xrightarrow[\mu]{\nu} \text{ (14.24)}$$

Die Striche bedeuten, dass die äusseren Photonlinien amputiert sind. Die (14.24) entsprechende Feynman Amplitude für die regularisierte Theorie mit Lagrangedichte (14.20) bezeichnen wir mit $-i\pi^{\mu\nu}(k)$. Sie wird "Vakuumspolarisationstensor" genannt.

In der Ordnung e_k^2 tragen zu (14.24) die Diagramme

$$\text{Diagramm } s \xrightarrow[\mu]{\nu} \text{ , } \text{Diagramm } \mu\nu \xrightarrow[\mu\nu]{\nu\nu} \text{ (14.25)}$$

mit $s=0,1,2,3$, bei. Dabei steht \times für den Beitrag 2ter Ordnung in e_k zu Z_3 . Der dem Graphen $\mu\nu\mu\nu$ entsprechende Beitrag zu $-i\pi^{\mu\nu}(k)$ hat auf Grund der Form der Lagrangedichte (14.20) die Form

$$e_R^2 \xi_{3,2}(\Lambda) [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu]$$

374
(14.26)

Dank der Eichinvarianz des Terms

$$\sum_{s=0}^3 Z_s (-i \bar{\psi}_s g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_s + \lambda_s m \bar{\psi}_s \psi_s - \bar{\psi}_s g^{\mu\nu} \psi_s A_\mu)$$

in der Lagrangedichte (14.20) gilt auch, dass

$$k_\mu^{\mu\mu} \circlearrowleft \overset{s}{\circlearrowright} = \overset{s}{\circlearrowleft} \circlearrowright k_\nu = 0, \quad (14.27)$$

wo k der durch das Diagramm laufende Viererimpuls ist. Dies kann auch als eine Folge der Stromerhaltung an jedem Vertex verstanden werden.

Daher hat der den Graphen

$$\overset{s}{\circlearrowleft} \circlearrowright , \quad s = 0, 1, 2, 3$$

entsprechende Beitrag zu $i\pi^{\mu\nu}(k)$ die Form

$$e_R^2 \omega_2(k^2, \Lambda) [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] \quad (14.28)$$

Man wird nun $\xi_{3,2}(\Lambda)$ so wählen wollen, dass

$$[\omega_2(k^2, \Lambda) + \xi_{3,2}(\Lambda)]_{k=0} = 0. \quad (14.29)$$

Man nennt (14.29) die Renormierungsbedingung

für die Ladungsrenormierung (in der Ordnung e_R^2).

Man kann nun allgemein zeigen, dass in jeder Ordnung in ϵ_R

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = \Pi^{\mu\nu}(k) k_\nu = 0, \quad (14.30)$$

so dass

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = \omega_R(k^2, \lambda) [g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu]. \quad (14.31)$$

Man wählt $Z_3(\epsilon_R^2, \lambda)$ so, dass in jeder Ordnung in ϵ_R $\omega_R(k^2, \lambda)$ einen endlichen Grenzwert besitzt, wenn $\lambda \rightarrow \infty$ strebt, und dass die

Renormierungsbedingung

$$\omega_R(0, \lambda) = 0 \quad (14.32)$$

erfüllt ist.

Nun kann man die Fouriertransformierte, $G_{\mu\nu}(k)$, des renormierten Photon-propagators,

$$\langle \Omega, T[A_\mu(x) A_\nu(y)] \Omega \rangle, \quad (14.33)$$

($A_\mu = e_R^{-1} A_\mu$; siehe (14.6), (14.7)), der QED durch Summation einer geometrischen Reihe erhalten:

$$G_{\mu\nu}(k) = \underbrace{\mu \nu}_{\mu} \underbrace{\nu}_{\nu} + \underbrace{\mu \nu \text{ (111) } \nu \mu}_{\mu} + \underbrace{\mu \nu \text{ (111) } \nu \mu}_{\nu} \underbrace{\text{ (111) } \nu \mu}_{\mu},$$

$$+ \dots \quad (14.34).$$

wo $\mu \nu \leftrightarrow -i \hat{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i0}$ (in der Feynman Eichung). Man findet also, dass

$$G(k) = -i \hat{D}(k) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} [-\Pi(k) \hat{D}(k)]^n \right),$$

oder, mit (14.31),

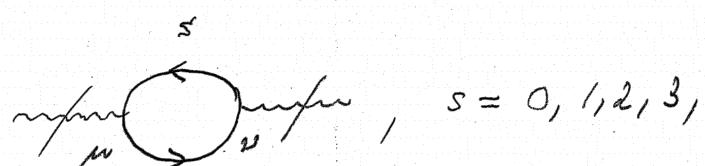
$$G_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 (1 + \omega_R(k^2, \Lambda)) - \mu^2 + i0} + \text{Terme} \propto k_\mu k_\nu \quad (14.35)$$

Dank der Renormierungsbedingung (14.32) gilt, dass

$$G_{\mu\nu}(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i0} \quad (14.36)$$

Nun wollen wir den Beitrag der Ordnung e_R^2 zu $\Pi^{\mu\nu}(k)$ explizite berechnen; siehe (14.25).

Die Feynman Amplitude zu den Diagrammen



wird mit $-ie_R^2 \tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(k)$ bezeichnet und ist durch das folgende Integral gegeben:

$$\tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(k) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{r=0}^2 C_r \text{Sp} \left(g^\mu \frac{i}{p - \lambda_r m_R + i0} g^\nu \right. \\ \left. \times \frac{i}{p - k - \lambda_r m_R + i0} \right), \quad (14.37)$$

mit $C_0 = \lambda_0 = 1$, $C_1 = -2$, $\lambda_1 = 1$, $C_2 = 1$, $\lambda_2 = c\Lambda$;
siehe (14.23). Die Spur über die g^μ -Matrizen
kann explizit ausgeführt werden, und wir erhalten:

$$\tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(k) = 4i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{p^\mu(p-k)^\nu + p^\nu(p-k)^\mu - g^{\mu\nu}(p^2 - p \cdot k - m_R^2)}{(p^2 - m_R^2 + i0)((p-k)^2 - m_R^2 + i0)} \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^2 C_r (m_R \rightarrow \lambda_r m_R) \right\} \quad (14.38)$$

Das Integral über p auf der R.S. ist nun
offensichtlich konvergent, und man zeigt mit Hilfe
von (14.37) leicht, dass

$$k_\mu \tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(k) = \tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(k) k_\nu = 0; \quad (14.39)$$

(Übung!) Wir wollen nun (14.39) mit Hilfe
der sog. Feynmanschen (oder Schwingerschen)
 λ -Parameter Darstellung explizit berechnen.

Dazu bemerken wir, dass

$$\frac{i}{p^2 - m_R^2 + i0} = \int_0^\infty dx e^{i\alpha(p^2 - m_R^2 + i0)} \quad (14.40)$$

$$\frac{p^\mu(p-k)^\nu}{p^2 - m_R^2 + i0} = -i \frac{\partial}{\partial z_1^\mu} \frac{\partial}{\partial z_2^\nu} \left[\int_0^\infty dx e^{i\alpha(p^2 - m_R^2 + i0)} \right. \\ \left. \times e^{z_1 \cdot p + z_2 \cdot (p-k)} \right] \Big|_{z_1 = z_2 = 0} \quad (14.41)$$

etc.

Wir setzen nun (14.40) und (14.41) in (14.38) ein.

Dann können wir das Gaußsche Integral über p

(mit Hilfe von quadratischer Ergänzung) explizit

berechnen, indem wir benützen, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dq}{2\pi} e^{-i\alpha q^2} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\alpha}},$$

oder

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\alpha p^2} = - \frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \quad (14.42)$$

Daraus folgt, dass

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\alpha p^2 + p \cdot z} = e^{i\alpha \frac{z^2}{4\alpha^2}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\alpha \left(p + \frac{z}{2i\alpha}\right)^2}$$

$$= - \frac{1}{(4\pi\alpha)^2} e^{i \frac{k^2}{4\alpha}}. \quad (14.43)$$

Setzen wir nun (14.40), (14.41) in (14.38) ein und benützen (14.43), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left[\left\{ \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k^\mu k^\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g^{\mu\nu} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 k^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} - \frac{i}{\alpha_1 + \alpha_2} + m_R^2 \right) \right\} \times \right. \\ &\quad \times \exp i \left[-(m_R^2 - i0)(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^2 C_r(m_R \rightarrow \lambda_r m_R) \right] \end{aligned} \quad (14.44)$$

Bemerkung. Wegen (14.39) folgt, dass

$$\tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(k) = -i\omega_2(k^2, \Lambda) [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu]. \quad (14.45)$$

Daher genügt es

$$\tilde{\Pi}_{2\mu}^\mu(k) = -3i\omega_2(k^2, \Lambda) k^2$$

auszwecken, was die Arbeit ein wenig erleichtert.

Gl. (14.45) folgt aber auch direkt aus (14.44): Das Polynom in k im Integranden von (14.44) ist

$$2(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2) \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^4} - \frac{g^{\mu\nu}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left[m_R^2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k^2 - \frac{i}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] \quad (14.46)$$

Der erste Term in (14.46) hat die gewünschte Form; der zweite Term ist proportional zu $g^{\mu\nu}$, den Koeffizienten nennen wir $\Delta\omega(k^2, \Lambda)$. Er ist durch das folgende Integral gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta\omega(k^2, \Lambda) &= -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \sum_{r=0}^2 C_r \left[-\frac{\alpha_1 \alpha_2 k^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\alpha_1 + \alpha_2} + (\lambda_r m_R)^2 \right] \exp i \left[-((\lambda_r m_R)^2 - i0)(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \\ &= -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^3} i \wp \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{1}{p} \sum_{r=0}^2 C_r \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp i \wp \left[-((\lambda_r m_R)^2 - i0)(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\}_{p=1} \quad (14.47) \end{aligned}$$

wo $C_0 = 1$, $\lambda_0 = 1$ ist. Konvergenz bei $\alpha_1 = \alpha_2 = \infty$ ist offensichtlich. Konvergenz bei $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfordert, dass $\sum_{r=0}^2 C_r = 0$! In diesem Fall kann man

die Integration über α_1 und α_2 mit der Ableitung nach ρ vertauschen. Wir müssen also die ρ -Abhängigkeit von

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^3} \rho^{-1} \left(\sum_{n=0}^2 C_n \exp i \rho \left[-((\lambda_n m_R)^2 - i0)(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right)$$

bestimmen. Ersetzt man α_i durch $\rho^{-1}\beta_i$, $i=1,2$, so sieht man, dass dieses Integral ρ -unabhängig ist. Es folgt daher, dass

$$\Delta \omega(k^2, \Lambda) = 0. \quad (14.48)$$

Mit (14.46) folgt nun, dass

$$\tilde{\pi}^{\mu\nu}(k) = -i \omega(k^2, \Lambda) [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu],$$

$$\begin{aligned} \omega_2(k^2, \Lambda) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^4} \times \\ &\times \sum_{n=0}^2 C_n \exp i \left[-((\lambda_n m_R)^2 - i0)(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \end{aligned} \quad (14.49)$$

Nun setzen wir die Identität

$$1 = \int_0^\infty d\rho \delta(\rho - \alpha_1 - \alpha_2)$$

in (14.49) ein und ändern die Integrationsvariablen zu

$$\alpha_i = \rho \beta_i, \quad i=1,2.$$

Dann finden wir, dass

$$\begin{aligned} \omega_2(k^2, \Lambda) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 d\beta_1 \int_0^1 d\beta_2 \delta(1-\beta_1-\beta_2) \beta_1 \beta_2 \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \left(\sum_{r=0}^2 C_r e^{i\rho[-(\lambda_r m_R)^2 - i0 + \beta_1 \beta_2 k^2]} \right) \end{aligned} \quad (14.50)$$

Falls $\sum_{r=0}^2 C_r = 0$, so ist das ρ -Integral in (14.50)

konvergent. Um (14.50) zu berechnen, integrieren wir das ρ -Integral partiell:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} e^{-\rho \xi} &= \int_{\delta\xi}^\infty \frac{d\rho'}{\rho'} e^{-\rho'} \\ &\quad \text{Re } \xi > 0 \quad \delta \xi &= [\ln \rho' e^{-\rho'}]_{\delta\xi}^\infty + \underbrace{\int_{\delta\xi}^\infty \ln \rho' e^{-\rho'} d\rho'}_{\rightarrow \text{const.}, \delta \rightarrow 0} \\ &= -\ln(\delta\xi) e^{-\delta\xi} + \text{const.}, (\delta \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Da $\sum_{r=0}^2 C_r = 0$, trägt der Term $\propto -\ln \delta$ nicht bei.

Daher gelangen wir auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} \omega_2(k^2, \Lambda) &= -\frac{1}{\pi^2} \int_0^1 d\beta_1 \int_0^1 d\beta_2 \delta(1-\beta_1-\beta_2) \beta_1 \beta_2 \times \\ &\times \left[\ln \left(1 - \frac{\beta_1 \beta_2 k^2}{m_R^2} \right) + \sum_{r=1}^2 C_r \ln \lambda_r^2 \right], \end{aligned} \quad (14.51)$$

für $k^2 < m_R^2$.

Wir definieren die Cutoff-Energie \bar{x} durch

$$\sum_{r=1}^2 C_r \ln \lambda_r^2 =: -\ln \left(\frac{\bar{x}^2}{m_R^2} \right), \quad (14.52)$$

$(\bar{x} \propto m_R \Lambda)$. Nun führen wir die β_2 -Integration aus und setzen $\beta := \beta_1$. Das führt auf den Ansdruck

$$\omega_2(k^2, \lambda) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^1 d\beta \beta (1-\beta) \left\{ \ln \left[1 - \beta (1-\beta) \frac{k^2}{m_R^2} \right] - \ln \left(\frac{\bar{x}^2}{m_R^2} \right) \right\} (14.53)$$

Dieses Integral kann elementar berechnet werden.

$$\int_0^1 d\beta \beta (1-\beta) \ln [1 - \beta(1-\beta)\alpha] \quad (\alpha = \frac{k^2}{m_R^2})$$

$$= \left[\left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{3} \right) \ln [1 - \beta(1-\beta)\alpha] \right]^1_0$$

$$-\int_0^1 d\beta \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{3} \right) \frac{2\alpha\beta - \alpha}{1 - \beta(1-\beta)\alpha}$$

Partialbruchzerlegung!

Das Resultat ist

$$\omega_2(k^2, \lambda) = -\frac{1}{6\pi^2} \left\{ -\ln\left(\frac{\bar{x}^2}{m_R^2}\right) + \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{2m_R^2}{k^2}\right) \times \right. \\ \left. \times \left[\sqrt{\frac{4m_R^2}{k^2} - 1} \arccot \sqrt{\frac{4m_R^2}{k^2} - 1} - 1 \right] \right\} \quad (14.54)$$

Nun wählen wir den Koeffizienten

$$\xi_{3,2}(\Lambda) \propto \ln\left(\frac{\bar{\kappa}^2}{m_R^2}\right)$$

des Beitrags der Ordnung e_R^2 zur Ladungsrenormierungs konstanten Z_3 so, dass

$$\omega_2(k^2, \Lambda) + \xi_{3,2}(\Lambda) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} 0, \quad (14.55)$$

siehe (14.29). Offensichtlich ist $\xi_{3,2}(\Lambda)$ reell.

Außerdem zeigt (14.54), dass $\text{Im } \omega(k^2, \Lambda)$ auch für $k^2 > 4m_R^2$ (Zwei-Elektronenschwelle) unabhängig von Λ , resp. $\bar{\kappa}$ ist, mit

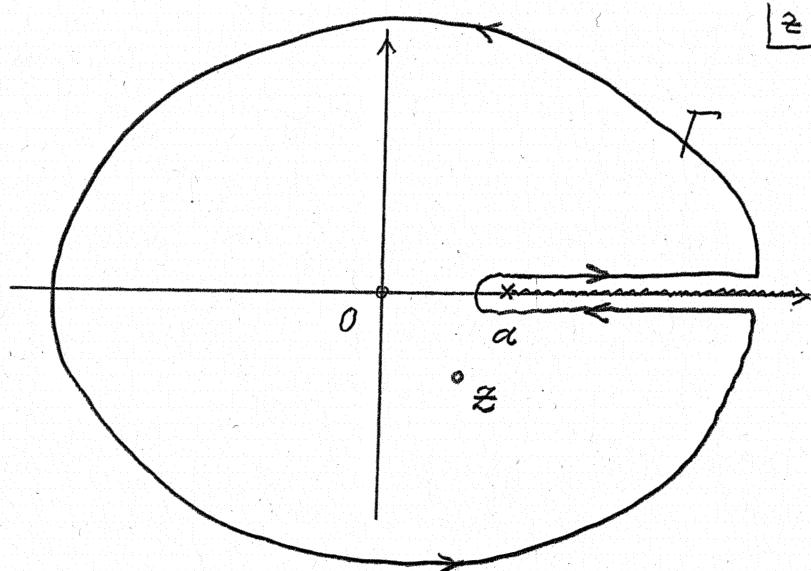
$$\text{Im } \omega(k^2, \Lambda) = 0, \quad \text{für } k^2 < 4m_R^2.$$

Für $k^2 > 4m_R^2$ findet man

$$\text{Im } \omega_2(k^2, \Lambda) = \frac{i}{6\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{k^2}} \left(1 + \frac{2m_R^2}{k^2} \right); \quad (14.56)$$

(man benütze, dass $\text{Re } \text{arc cot } i\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist).

Wir können nun $\omega_2(k^2, \Lambda)$ aus einer einmal subtrahierten Dispersion s relation (Cauchy Integral satz) gewinnen:



f sei in der komplexen z -Ebene analytisch, außer im Punkt $z = a > 0$, der ein Verzweigungspunkt sei.

Wir schneiden die z -Ebene entlang des Intervalls $[a, \infty)$ auf und wählen die Integrationskontur Γ wie in der Figur angedeutet. Dann ist nach

Cauchy

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d\xi \left[\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right] f(\xi) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^{\infty} dx \left[\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x} \right] (Df)(x) \\ &= \frac{z}{2\pi i} \int_a^{\infty} dx \frac{1}{(x-z)x} (Df)(x), \end{aligned}$$

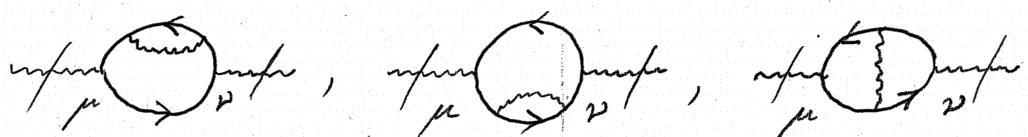
wo $Df(x) = \lim_{y \rightarrow 0} (f(x+iy) - f(x-iy)), \quad (x > a).$

Angewandt auf $\omega_2(k^2, \Lambda)$ finden wir mit
 $D\omega_2(k^2, \Lambda) = \text{Im } \omega(k^2, \Lambda)$, ($k^2 > 4m_R^2$), und (14.56)
das konvergente Resultat

$$\omega_2(k^2, \Lambda) - \omega_2(0, \Lambda) = \frac{k^2}{6\pi^2} \int_{\frac{4m_R^2}{x}}^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{1}{x - k^2} \times \\ \times \sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{x}} \left(1 + \frac{2m_R^2}{x} \right), \quad (14.57)$$

mit $x = (k')^2$.

Man könnte nun weiterfahren und die Ladungsrenormierung in der Ordnung e_R^4 bestimmen. Dazu müssten die Diagramme

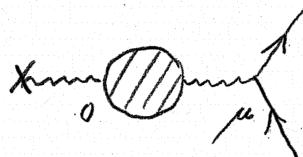


berechnet werden. Die zwei ersten Diagramme drücken die Renormierung des Elektronenpropagators, insbesondere die Renormierung der Elektronenmasse aus. Dies wird später behandelt. Die Feynman Amplitude zum dritten Diagramm ist für die Be-

rechnung von $E_{3,4}$ (1) direkt relevant und wurde von Tost und Luttinger durchgeführt. Man findet eine Divergenz, die sich wie $(\ln(\frac{\bar{x}^2}{m_e^2}))^2$ verhält; (jede Schleife trägt eine Potenz von $\ln(\frac{\bar{x}^2}{m_e^2})$ bei). (Pauli hatte gehofft, dass sich die Divergenzen in den Ordnungen e_R^2 und e_R^4 gegenseitig wegheben, wenn man den Wert von e_R gezielt wählt – Bestimmung der Feinstrukturkonstante! Aber diese Hoffnung erfüllte sich nicht.)

14.4 Korrekturen zum Coulomb Gesetz

Wir kehren nun zur elastischen Streuung eines Elektrons an einem schweren Kern zurück, wollen nun aber die Korrekturen zum Coulomb Gesetz bestimmen, die sich aus der Einschleifenrenormierung der Feinstrukturkonstanten ergeben. Wir betrachten den Prozess



Wir werden die Vertex Korrekturen

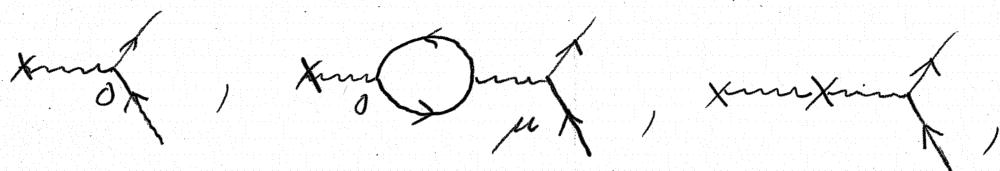


zu denen die Diagramme und

$\propto (Z_1 - 1) \times$ beitragen, später behan-

deln. Ersetzt man das Elektron durch eine statische Ladung, so tragen die Vertexkorrekturen (14.58) ohnehin nicht bei. Wir beschränken uns darauf,

die Amplituden zu den Diagrammen



siehe (14.25) aufzusummen. Da

$$k_\mu \Pi_2^{\mu\nu}(k^2, \Lambda) = \Pi_2^{\mu\nu}(k^2, \Lambda) k_\nu = 0, \text{ und da am}$$

Elektronvertex,

finden wir für die Summe der Amplituden zu den oben angegebenen Diagrammen den Ausdruck

$$\hat{\phi}(k^2) = \hat{\phi}^{(0)}(k^2) + \hat{\phi}^{(2)}(k^2), \quad (14.59)$$

wo

$$\hat{\phi}^{(0)}(k^2) = -\frac{Ze_R^2}{|\vec{k}|^2} \delta(k_0) \quad (Zc_R: \text{Kernladung}),$$

und

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{(2)}(k^2) &= e_R^2 \hat{\phi}^{(0)}(k^2) [\omega_2(k^2, \Lambda) - \omega_2(0, \Lambda)] \times \\ &\times k^2 \frac{1}{k^2 + i0} \end{aligned} \quad (14.60)$$

Der Ausdruck (14.60) wird in den Übungen genauer hergeleitet. Im Ortsraum finden wir daher für $\phi^{(2)}$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(\vec{x}, t=0) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{\phi}^{(2)}(\vec{k}^2) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ &= -\frac{Ze_R^4}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{|\vec{k}|^2} [\omega_2(-\vec{k}^2, \Lambda) - \omega_2(0, \Lambda)] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$

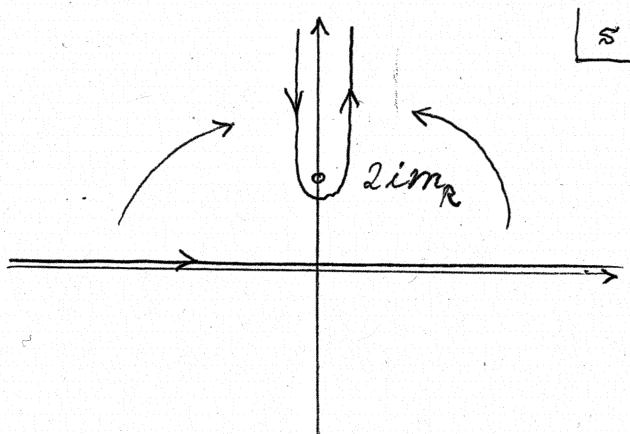
Polarkoordinaten, $\vec{k} = -\frac{Ze_R^4}{4\pi|\vec{x}|} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{e^{i\vec{x}/\sqrt{t}} - e^{-i\vec{x}/\sqrt{t}}}{2i} \times$

$$\times [\omega_2(-t, \Lambda) - \omega_2(0, \Lambda)]$$

$$= i \frac{Ze_R^4}{4\pi^2 |\vec{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{i\vec{x}/s} \underbrace{[\omega_2(-s^2, \Lambda) - \omega_2(0, \Lambda)]}_{\text{analytisch in der oberen s-Halbebene, mit Ausnahme eines Schnittes entlang } i[2m_R, \infty)}$$

analytisch in der oberen s-Halbebene, mit Ausnahme eines Schnittes entlang $i[2m_R, \infty)$

Wir können nun die Integrationskontur in der komplexen s -Ebene wie folgt deformieren:



Dann finden wir mit (14.56):

$$\begin{aligned}\phi^{(2)}(\vec{x}) &= -\frac{Ze_R^4}{2\pi^2|\vec{x}|} \int_{2m_R}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma} e^{-\sigma/|\vec{x}|} \text{Im } \omega_2(\sigma^2, \Lambda) \\ &= -\frac{Ze_R^4}{4\pi|\vec{x}|} \frac{1}{3\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u} e^{-2m_R|\vec{x}|/u} \frac{\sqrt{u^2-1}}{u} \left(1 + \frac{1}{2u^2}\right).\end{aligned}$$

Damit erhält man für $\phi(\vec{x})$

$$\phi(\vec{x}) \xrightarrow[m_R(\vec{x}) \ll 1]{} -\frac{Ze_R^2}{4\pi|\vec{x}|} \left[1 + \frac{e_R^2}{3\pi^2} \left(\ln \frac{1}{m_R(\vec{x})} - \frac{5}{6} - \gamma_E \right) \right]$$

und

$$\phi(\vec{x}) \xrightarrow[m_R(\vec{x}) \gg 1]{} -\frac{Ze_R^2}{4\pi|\vec{x}|} \left[1 + \frac{e_R^2}{8\pi^{3/2}} \frac{e^{-2m_R|\vec{x}|}}{(m_R|\vec{x}|)^{3/2}} \right]$$

Die elektrostatische Kraft wird also bei kurzen Abständen stärker als die Coulombkraft!

14.5 Renormierungsbedingungen und äußere Linien

Wir benützen für unsere Diskussion die Lagrangedichte (14.1), (14.20); d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{Z_3}{4e_R^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2e_R^2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{\mu^2}{2e_R^2} (A_\mu A^\mu) \\ & + Z_1 \left\{ -i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \right. \\ & \quad \left. + \text{Pauli-Villars Terme} \right\} \quad (14.61) \end{aligned}$$

Die von Pauli und Villars eingeführten, zusätzlichen zwei bosonischen Spinorfelder und das zusätzliche fermionische Spinorfeld haben Massen $\propto \Lambda^{m_R}$, wo Λ ein Ultraviolet-Cutoff ist. Die physikalischen Felder sind ψ , $\bar{\psi}$ und $A_\mu = e_R^{-1} \tilde{A}_\mu$. Die nackte Elementarladung ist

$$e = e_R Z_3^{-1/2}. \quad (14.62)$$

Um die Störungsreihe der QED zu renormieren, entwickelt man die nackten Parameter Z_3 , Z_1 und m in Potenzen von e_R :

$$Z_i(\Lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(\Lambda) e_R^{2n}, \quad i=1,3 \quad (14.63)$$

$$m(\Lambda) = m_R + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\Lambda) e_R^{2n} \quad (14.64)$$

wo $-e_R$ die elektrische Ladung und m_R die physikalische Masse eines Elektrons sind. Man versucht, die Koeffizienten $\xi_{i,n}(\Lambda)$ und $\mu_n(\Lambda)$ als Funktionen des Ultraviolet-Cutoffs Λ so zu bestimmen, dass

(1) alle Feynman Amplituden in jeder Ordnung von e_R endlich bleiben, wenn $\Lambda \rightarrow \infty$; und

(2) gewisse Renormierungsbedingungen (die sich aus einer operationellen Definition von e_R und m_R herleiten lassen) erfüllt sind.

Die Feynman-Regeln der QED sind:

$$\begin{array}{ccc} k & & \leftrightarrow \\ \overbrace{\mu}^{\alpha} & \overbrace{\nu}^{\beta} & \end{array} \quad \frac{-ie_R^2 g_{\mu\nu}}{k^2 + i0} \times e^{-((\vec{k})/\Lambda m_R)^2} + \text{Terme} \propto k_\mu k_\nu$$

$$\begin{array}{ccc} p & & \leftrightarrow \\ \alpha & \overrightarrow{} & \beta \end{array} \quad \left(\frac{i}{p - m_R + i0} \right)_{\beta\alpha} = i \left(\frac{p + m_R}{p^2 - m_R^2 + i0} \right)_{\beta\alpha}$$

Vertices:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Diagramm: } & \longleftrightarrow -ig^\mu & \text{Diagramm: } \longleftrightarrow -ig^\mu \xi_{1,n}(\Lambda) \\
 \begin{array}{c} \nearrow \\ \downarrow \\ \mu \end{array} & & \begin{array}{c} \nearrow \\ \downarrow \\ \mu \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 k \\
 \text{Diagramm: } \longleftrightarrow i \frac{\xi_{3,n}(\Lambda) e_R^{2n}}{2 e_R^2} [g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu] \quad (14.65) \\
 \mu \quad n \quad \nu
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 p \\
 \rightarrow \times \rightarrow \\
 n
 \end{array} \longleftrightarrow e_R^{2n} \left\{ i \xi_{1,n}(\Lambda) (\not{p} - m_R) - i (Z_1 \delta m)_n(\Lambda) \right\},$$

wo $\delta m := m - m_R$. Die Subskripte n deuten die Ordnung in e_R^2 an. Eine äußere Photonlinie,

$\begin{array}{c} k \\ \mu \quad \nu \\ \end{array}$, wird amputiert, indem man mit $i \frac{g_{\mu\nu}}{e_R} k^2$ multipliziert; eine äußere Spinorlinie, indem man mit $-i (\not{p} - m_R)$ multipliziert.

Renommierte Propagatoren:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagramm: } + \\
 \text{Diagramm: } = \text{Diagramm: } + \text{Diagramm: } + \dots,
 \end{array}$$

R

wo $\not{p} \text{Diagramm}$ eine Summe von Einteilchen-irreduziblen Diagrammen bedeutet. In Abschnitt 14.3 haben wir

gesehen, dass ($\mu \geq 0$: Photonmasse)

$$\frac{k}{\mu} \leftrightarrow G_{\mu\nu}(k, \Lambda) = \frac{-ig_{\mu\nu} e_R^2}{k^2(1 + \omega_R(k^2, \Lambda)) - \mu^2 + i0} + \text{Terme} \propto k_\mu k_\nu, \quad (14.66)$$

mit der Renormierungsbedingung

$$\omega(\mu^2, \Lambda) = 0. \quad (14.67)$$

Sie bestimmt $\zeta_3(\Lambda)$ als formale Potenzreihe in e_R^2 ,
(jedenfalls in der Einschleifen Näherung $\propto e_R^2$).

In diesem Abschnitt wollen wir den renormierten Elektron-Propagator untersuchen:

$$\overrightarrow{} + \overrightarrow{} = \overrightarrow{} + \overrightarrow{\text{blob}} \overrightarrow{} + \overrightarrow{\text{blob}} \overrightarrow{\text{blob}} \overrightarrow{} + \dots,$$

wo $\overrightarrow{\text{blob}}$ eine Summe von Einzelchen-irreduziblen Diagrammen bedeutet. Die entsprechende Feynman-Amplitude bezeichnen wir mit $\Sigma(p, \Lambda)$.

Man nennt $\Sigma(p, \Lambda)$ die "Elektron-Selbstenergie".

$$\overrightarrow{} \leftrightarrow S_R(p, \Lambda) = \frac{i}{p + \Sigma(p, \Lambda) - m_R + i0} \quad (14.68)$$

Man fordert die Renormierungsbedingungen

$$\sum(p,\lambda) \Big|_{p^2 = m_\mu^2} = 0, \quad \frac{\partial \sum(p,\lambda)}{\partial p_\mu} \Big|_{p^2 = m_\mu^2} = 0, \quad (14.69)$$

solange $\mu > 0$. Sie bestimmen $Z_1(\lambda)$ und $\delta m(\lambda)$ als formale Potenzreihen in e_R^2 , (jedenfalls für massive Photonen, $\mu > 0$, sodass keine Infrarotdivergenzen auftreten). Nun sind alle freien Parameter, $Z_3(\lambda)$, $Z_1(\lambda)$ und $\delta m(\lambda) = m(\lambda) - m_\mu$, wenigstens im Sinne formaler Potenzreihen in e_R^2 fixiert.

Nun studieren wir den renominierten Wechselwirkungsvertex:

$$\longleftrightarrow -i(Z_1(\lambda) - 1) g^\mu \quad (14.70)$$

$$R \overset{=} \epsilon_\mu^\mu \quad \longleftrightarrow \text{renominiertes Vertex, } \Lambda_R^\mu(p, p+k; \lambda) \quad (14.71)$$

wo eine Summe Einzelchen-irreduzibler Diagramme bedeutet.

Wegen (14.61), (14.65) (dritte Zeile), (14.68) und (14.70) sollte offenbar gelten, dass

$$\Lambda_R^\mu(p, p) = -i \left(g^\mu + \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p) \right). \quad (14.72)$$

Diese Identität ist in der Tat richtig. Sie ist ein Spezialfall der Ward Identitäten der QED und wurde in den Übungen bis zur Ordnung e_R^2 verifiziert. Wegen (14.69) gilt nun, dass

$$\left. \Lambda_R^\mu(p, p; \Lambda) \right|_{p^2 = m_R^2} = -i g^\mu. \quad (14.73)$$

Daraus folgt, dass im Limes verschwindenden Photon-impulses ($\vec{k} \rightarrow 0$) die Thomsonische Streuformel (siehe (13.49)) exakt wird, und dies kann für eine operationelle Definition der physikalischen Ladung, $-e_R$, des Elektrons benutzt werden.

Natürlich sollten die Renormierungsbedingungen (14.67) und (14.69) und die Ward Identität (14.72) ausführlicher behandelt werden. Aber dazu fehlt uns

leider die Zeit; (siehe jedoch z. B. Itzykson-Zuber).

Zur Berechnung von Streuamplituden ist es wichtig zu verstehen, wie äussere Linien und klassische äussere Felder zu behandeln sind. Wie wir in Kapitel 10 (LSZ Reduktionsformeln) gelernt haben, sind in der Berechnung der Streuamplituden die äusseren Linien zu amputieren und anschliessend auf die Massenschalen, $k^2 = \mu^2$, resp. $p^2 = m_R^2$, zu restriktieren. Für eine äussere Fermionlinie,

$$p \xrightarrow{R} \left(\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} F \right)$$

impliziert die LSZ Vorschrift, dass der renormierte Elektronpropagator $S_R(p, \Lambda)$ mit $-i(\not{p} - m_R)$ zu multiplizieren ist; anschliessend ist ein Ein elektronenzustand $\bar{\psi}_j(p)$ einzusetzen, mit $p^2 = m_R^2$. Das ergibt insgesamt:

$$-i\bar{\psi}_j(p)(\not{p} - m_R)S_R(p, \Lambda) \Big|_{p^2 = m_R^2} F(p, \dots) \Big|_{p^2 = m_R^2} =$$

$$(14.68) \quad = \bar{u}_j(p) \frac{p - m_R}{p + \sum(p, \Lambda) - m_R^2 + i0} F(p, \dots) \Big|_{p^2 = m_R^2}$$

$$(14.69) \quad = \bar{u}_j(p) F(p, \dots) \Big|_{p^2 = m_R^2} \quad (14.74)$$

Genauso behandelt man $\tilde{F} \rightarrow p$.

Schliesslich betrachten wir $\begin{array}{c} k \\ \text{---} \\ \lambda \end{array} \text{---} L$

Die LSZ Vorschrift verlangt, dass der renominierte Photon Propagator, $G(k, \Lambda)$, mit $i g(k^2 - \mu^2)$,

$g = (g^{\mu\nu})$, zu multiplizieren ist und anschliessend mit einem Einphotonenzustand $\epsilon_{r,\mu}(k)$, $r=1,2$, zu kontrahieren und auf die Klasse $k^2 = \mu^2$, zu restringieren ist. Das ergibt mit (14.66)

$$\epsilon_{r,\nu}(k) \frac{k^2 - \mu^2}{k^2(1 + \omega_R(k^2, \Lambda)) - \mu^2 + i0} L^\nu(k, \dots) \Big|_{k^2 = \mu^2}$$

$$(14.67) \quad = \epsilon_{r,\nu}(k) L^\nu(k, \dots) \Big|_{k^2 = \mu^2}. \quad (14.75)$$

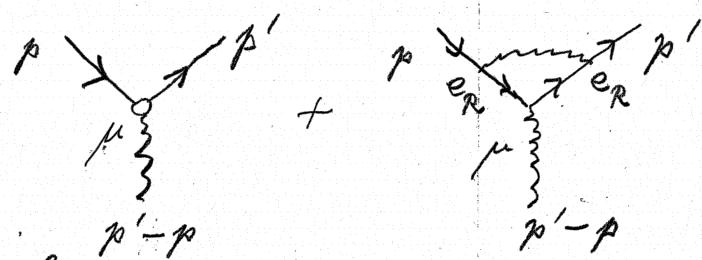
Dabei wird die Eichinvarianz der QED in der Form

$$k_\mu L^\mu(k, \dots) = 0 \quad (14.76)$$

benutzt. Für Streuung in einem äusseren elektromagnetischen Feld, $A_\mu(x)$, ist in (14.75) $\epsilon_{r,\omega}(k)$ durch $\hat{A}_\nu(k)$ zu ersetzen. Es gilt jetzt aber i.a. nicht mehr, dass $k^2 = \mu^2$!

Wir sehen aus (14.74) und (14.75), dass die Renormierungsbedingungen (14.69) und (14.67) implizieren, dass in der Berechnung von Streuamplituden äussere Linien mit Viererimpulsen, die auf der Massenschale liegen, nicht renormiert werden müssen!

Nun machen wir uns hinter die Berechnung der Vertexkorrektur in zweiter Ordnung in e_R . Dazu ist die Feynman-Amplitude zu den Diagrammen



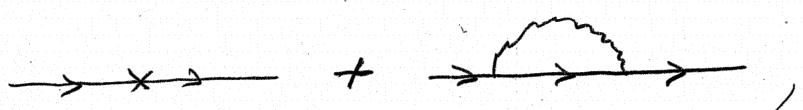
zu berechnen.

Sie ist durch

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{\mu}(p'; p) &= -i g^\mu \Sigma_{1,1}(\Lambda) e_R^2 \\ &- \frac{i e_R^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \mu^2 + i0} g^\alpha \frac{1}{p' - k - m_R + i0} g^\mu \times \\ &\times \frac{1}{p - k - m_R + i0} g_\alpha e^{-(|k|/m_R \Lambda)^2} \quad (14.77) \end{aligned}$$

(Eine Infrarotdivergenz, die bei $p^2 = (p')^2 = m_R^2$ auftreten würde, wird durch Einführen einer Photonenmasse $\mu > 0$ eliminiert.) Vergleicht man (14.77)

mit der Berechnung von $\sum(p, \Lambda)$ in zweiter Ordnung in e_R ,



so sieht man leicht, dass (14.77) einen endlichen Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ hat, falls man $\Sigma_{1,1}(\Lambda)$ so wählt,

dass $\left. \frac{\partial \Sigma_2(p, \Lambda)}{\partial p_\mu} \right|_{p^2 = m_R^2} = 0$; (Übungen).

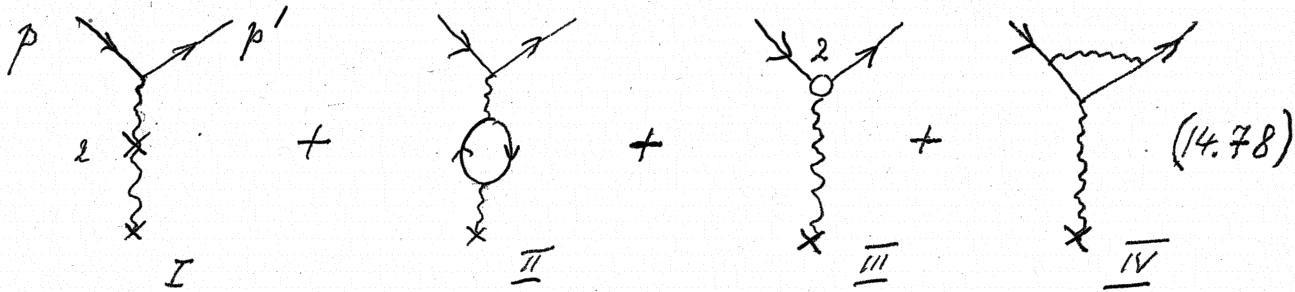
Als Anwendung dieser allgemeinen Betrachtungen wollen wir nun das anomale magnetische Moment des

Elektrons bestimmen. Das magnetische Moment eines Teilchens kann z. B. durch Streuung in einem äußeren Magnetfeld gemessen werden; (Beschleunigerexperiment, QH Experiment).

In tiefster Ordnung Störungstheorie ist die Übergangsamplitude, M , durch

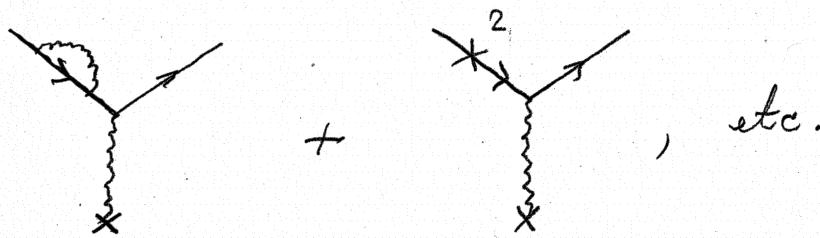
$$p \rightarrow p' \leftrightarrow ie_R \bar{u}_{j_1}(p') \hat{\mathcal{A}}_c(\vec{p}' - \vec{p}) u_j(p)$$

gegeben; siehe Abschnitt 13.4. Die Einschleifen-Strahlungskorrekturen (Ord. e_R^3) gehören zu den Diagrammen



Die Amplituden zu den ersten beiden Diagrammen wurden im Abschnitt über Ladungsrenormierung behandelt; die Berechnung der Amplituden zu den letzten zwei Diagrammen wurde oben angedeutet und wird im nächsten Kapitel explizit ausge-

führt. Die Diagramme



müssen in der Berechnung von Streuamplituden nicht beachtet werden, da die äußeren Elektronenimpulse auf der Massenschale liegen: $p^2 = (p')^2 = m_e^2$. Wie in Abschnitt 14.3 gezeigt, findet man im Limes $\Lambda \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$, dass

$$\underline{I} + \underline{II} = -ie_R^3 \bar{u}_{j'}(p') \hat{A}_c(q) \omega_{R,2}(q^2) u_j(p),$$

mit $q := (0, \vec{p}' - \vec{p})$ und

$$\omega_R^{(2)}(q^2) \propto \frac{q^2}{m_R^2} + \dots, \quad q \rightarrow 0.$$

Außerdem findet man, dass

$$\begin{aligned} \underline{III} + \underline{IV} &\underset{(q \rightarrow 0)}{\approx} ie_R \bar{u}_{j'}(p') \left[\frac{ie_R^2}{4\pi m_R} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \hat{A}_{c\mu}(q) \right] u_j(p) \\ &+ ie \bar{u}_{j'}(p') \hat{A}_c(q) F(q^2) u_j(p), \end{aligned} \quad (14.79)$$

wo $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$; der zweite Term auf der

R. S. von (14.79) ist für die Berechnung des anomalen

magnetischen Moments des Elektrons unwichtig. Der erste Term wurde zuerst von Julian Schwinger anno 1948 berechnet. Wir wollen ihn nun physikalisch interpretieren. Den Beitrag tiefster Ordnung in e_R ,

$$ie_R \bar{u}_j(p') \hat{A}_c(q) u_j(p)$$

kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\frac{ie_R}{2m_R} \bar{u}_j(p') [(\not{p}' + \not{p})^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u_j(p) \hat{A}_{cp}^\mu(q) \quad (14.80)$$

Dies folgt aus der Identität von Gordon:

$$2m_R \bar{u}_j(p') \gamma^\mu u_j(p) = \bar{u}_j(p') [(\not{p}' + \not{p})^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (\not{p}' - \not{p})_\nu] u_j(p),$$

die aus der trivialen Gleichung

$$\bar{u}_j(p') [\not{d}(\not{p} - m_R) + (\not{p}' - m_R) \not{e}] u_j(p) = 0$$

folgt. Man setze $\not{p} = \frac{1}{2}(\not{p}' + \not{p}) - \frac{1}{2}(\not{p}' - \not{p})$

und $\not{p}' = \frac{1}{2}(\not{p}' + \not{p}) + \frac{1}{2}(\not{p}' - \not{p})$; dann erhält

man einen Kommutator- und einen Antikommutator-

term; schliesslich setzt man $\not{d} = \gamma^\mu$.

Der zweite Term auf der R.S. von (14.80) beschreibt

im nicht-relativistischen Limes die Übergangsamplitude für ein Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen mit magnetischem Moment $-\frac{e_R}{2m_R}$, d.h. mit g -Faktor 2.

Um dies zu verstehen, benutzen wir die Standard-Darstellung der g -Matrizen und Spinoren u, \bar{u} ; (Schluss von Kap. 4). Wir setzen $\sqrt{\vec{p}^2 + m_R^2} + m_R \approx 2m_R$ und $\frac{\vec{p}}{m_R} \approx 0$. Es sei nun A_μ das Vektorpotential zu einem zeitlich konstanten Magnetfeld \vec{B} . Dann folgt im nicht-relativistischen Limes:

$$\begin{aligned} i \frac{e_R}{2m_R} \bar{u}_{j'}(p') \sigma^{\mu\nu} u_j(p) & \underbrace{i q_\nu \hat{A}_{\mu}(q)}_{\rightarrow \hat{F}_{\nu\mu}(q)} \\ & = -i \frac{e_R}{2m_R} (\bar{u}_{j'} \vec{B} \cdot \vec{S} u_j), \quad (14.81) \end{aligned}$$

$$\text{mit } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}.$$

Ersetzt man u, \bar{u} durch v, \bar{v} so ändert auf der R.S. von (14.81) das Vorzeichen, was dem Ersetzen des Elektrons durch das Positron entspricht. Das Result-

tat (14.81) stimmt mit denjenigen überein, das man in erster Ordnung Störungstheorie aus der Pauli-Gleichung herleitet.

Kombiniert man nun (14.80) mit (14.79), so findet man für das anomale magnetische Moment des Elektrons bis zur Ordnung e_R^3 den Ausdruck

$$-\frac{e_R}{2m_R} \left(1 + \frac{e_R^2}{2\pi} \right), \quad (14.82)$$

d.h.

$$\alpha_e := \frac{g-2}{2} = \frac{e_R^2}{2\pi} + O(e_R^4) \approx 0.00116,$$

was mit dem Experiment sehr gut übereinstimmt.

Im Experiment kann man direkt α_e messen, was auf eine phantastische Genauigkeit führt.

Der genaueste experimentelle Wert ist (Gabrielse)

$$\alpha_e^{\text{exp}} = 1.159'652'180'85(76) \times 10^{-3}$$

Die Berechnung von α_e in Ordnung e_R^4 führt auf 7 Diagramme, in der Ordnung e_R^6 auf 72, und in der Ordnung e_R^8 auf 891 Diagramme. Cvitanovic und Kinoshita fanden:

$$\alpha_e^{\text{theor.}} = \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328'478'965 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.181'241 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 1.914'4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4,$$

wo $\alpha = e_R^2$. Setzt man $\alpha_e^{\text{exp}} = \alpha_e^{\text{theor.}}$, so findet man für die Feinstrukturkonstante α den Wert

$$\alpha^{-1} = 137.035'999'710(96)$$

in sehr guter Übereinstimmung mit unabhängigen Messungen von α ; (etwa Quanten-Hall-Effekt).

Die QED ist die quantitativ präziseste physikalische Theorie.

Wegelassen: Lamb-Shift.

15. Dimensionelle Regularisierung und Anwendungen.

Im Kapitel 14 haben wir eine Regularisierung eingeführt, die alle Feynman-Amplituden endlich macht und dabei trotzdem die Eichinvarianz, insbesondere die Ward-Identität $\Lambda_\mu(p,p) - \gamma_\mu = \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}$, erhält. Das ist die Pauli-Villars Regularisierung.

Sie besteht darin, dass man eine Fermion-Schleife, L , durch eine Linearkombination von Fermion- und Boson-Schleifen mit verschiedenen Massen ersetzt; z.B.

$$L(m_R^2) \longrightarrow L(m_R^2) - 2L(m_R^2 + 2\Lambda^2) + L(m_R^2 + 4\Lambda^2)$$

Wird die Linearkombination unter dem Integral durchgeführt, so verbessert sich das Verhalten des Integranden bei hohen Schleifenimpulsen, und das Integral konvergiert.

In diesem Kapitel wollen wir Feynman Amplituden durch analytische Fortsetzung in der Raum-Zeit Dimension, D , regularisieren.

Wir ersetzen M^4 durch \mathbb{R}^D und geben

\mathbb{R}^D die Metrik $g_{\alpha\beta}$, mit

$$g_{00} = -g_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, D-1$$

$$g_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \alpha \neq \beta.$$

Dann ist

$$k^2 = (k^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (k^i)^2.$$

Bei der Berechnung von Schleifen-Integralen treten Integrale der Form

$$I(n, D) = \int \frac{d^D k}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} \quad (15.1)$$

wo s ein Parameter ist. Wir wollen nun zeigen, dass

$$I(n, D) = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}. \quad (15.2)$$

Hier ist Γ die Γ -Funktion, d.h.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-t} \quad (15.3)$$

$$= (n-1)!, \quad \text{für } n \geq 1 \text{ ganzzahlig}$$

$\Gamma(z)$ ist meromorph in z , mit einfachen Polen bei $z = 0, -1, -2, \dots$. Wir sehen also, dass für n ganz

zählig die rechte Seite von (15.2) analytisch und regulär in D ist, außer bei geraden Werten von $D \geq 2n$. Um (15.2) zu beweisen, benutzen wir die Formel

$$\frac{1}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = i^n \int_0^\infty d\alpha \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} e^{i\alpha(k^2 + s + i\varepsilon)} \quad (15.4)$$

Also

$$I(n, D) = \int d^D k i^n \int_0^\infty d\alpha \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} e^{i\alpha(k^2 + s + i\varepsilon)}$$

Nun setzen wir $(k^\circ, \vec{k}) = (ip^\circ, \vec{p})$, $\alpha = -it$.

Dann erhalten wir

$$I(n, D) = i \int d^D p \int_0^\infty dt \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t(p^2 + s)}$$

Wir verfassen die t - und die p -Integrationen und benutzen, dass

$$\int d^D p e^{-tp^2} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{D/2}$$

Damit finden wir

$$I(n, D) = i \pi^{\frac{D}{2}} \int_0^\infty \frac{dt}{\Gamma(n)} t^{n-1 - \frac{D}{2}} e^{-ts}$$

Nun setzen wir $ts = x$. Das ergibt

$$\begin{aligned} I(n, D) &= i \pi^{D/2} s^{D/2-n} \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^\infty dx x^{n-1-D/2} e^{-x} \\ &= i \pi^{D/2} s^{D/2-n} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)}, \end{aligned}$$

nach Definition der Γ -Funktion. Dies beweist
(15.2).

Wir wollen für später erwähnen, dass

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + \dots, \quad z \approx 0, \quad (15.3')$$

wo $\gamma = 0.5772\dots$ die Euler'sche Konstante ist.

Zusätzlich zu (15.2) werden wir auch die folgenden Integrale benötigen:

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = 0. \quad (15.5)$$

(Das folgt, für D ganzzahlig, aus der Tatsache, dass

$(k^2 + s + i\varepsilon)^{-n}$ gerade unter $k^\mu \mapsto -k^\mu$ ist, wo gegen k^μ ungerade ist. Für D komplex folgt (15.5) durch analytische Fortsetzung, bis auf eine Vieldeutigkeit $\propto \sin \pi D$, die man

weglässt.) Weiter haben wir

$$\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n - \frac{D}{2} - 1}} \quad (15.6)$$

Für $\mu \neq \nu$ ist der Beweis von (15.6) genau wie derjenige von (15.5). Für $\mu = \nu$ bemerken wir, dass

$$\int d^D k \frac{(k^\mu)^2}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = \frac{1}{D} \int \frac{k^2}{(k^2 + s + i\varepsilon)}$$

(Es ist zweckmässig, auf beiden Seiten (k^0, \vec{k}) durch (ip^0, \vec{p}) zu ersetzen.) Es genügt also zu zeigen, dass

$$\int d^D k \frac{k^2}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{2\Gamma(n)} \cdot \frac{D}{s^{n - \frac{D}{2} - 1}} \quad (15.7)$$

Dies folgt aus (15.2). Denn

$$\int d^D k \frac{k^2}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = \int d^D k \frac{1}{(k^2 + s + i\varepsilon)^{n-1}}$$

$$- \int d^D k \frac{s}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n}$$

Die rechten Seiten von (15.6) und (15.7) sind
meromorphe Funktionen von D mit Polen nur bei
 hinreichend grossen, geraden Werten von D . Da $d^D k$
ein translationsinvariantes Mass ist, darf man in
(15.2) - (15.7) k^2 durch $k^2 + l \cdot k = (k + \frac{l}{2})^2 - \frac{l^2}{4}$
ersetzen. (Das kommt in den Anwendungen vor!)

Nun müssen wir die " γ -Gymnastik" auf beliebige Werte von D verallgemeinern.

$$1) \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D \quad (15.8_i)$$

$$2) \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

Die γ -Matrizen sind $f(D) \times f(D)$ Matrizen, wo $f(D)$ eine Funktion ist, die bei gerad-zahligen Werten von D die üblichen Werte annimmt; (d.h. $f(0)=1$, $f(2)=2$, $f(4)=4$, $f(D)=2^{D/2}$, für D gerade).

Es sei I die $f(D) \times f(D)$ Einheitsmatrix.

Dann haben wir auf Grund von 1) und 2).

$$3) \quad \gamma_\alpha \gamma^\alpha = D \cdot I$$

$$4) \quad \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = -(D-2) \gamma^\mu$$

$$5) \quad \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = (D-4) \gamma^\mu \gamma^\nu + 4g^{\mu\nu}$$

$$6) \quad \gamma_\alpha \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} \gamma^{\mu_n} \gamma^\alpha$$

$$= - (\gamma_\alpha \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} \gamma^\alpha) \gamma^{\mu_n}$$

$$+ 2 \gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{n-1}}$$

Weiter haben wir die Spur Identitäten

$$7) \quad \text{Sp I} = f(D)$$

$$8) \quad \text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = f(D) \gamma^{\mu\nu}$$

$$9) \quad \text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho) = f(D) [g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}]$$

$$10) \quad \text{Sp}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0 \quad (15.8_f)$$

Warning: Es ist nicht möglich, die Matrix

$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ins D -Dimensionale fortzu-

setzen. Deshalb ist die dimensionelle Regulari-
sierung im Stadium von schwachen Prozessen und chiralen Anomalien problematisch. Sie ist auch in der Untersuchung

supersymmetrischer Feldtheorien unbrauchbar,

da die Zahlen fermionischer und bosonischer Frei-

heitsgrade verschieden von D abhängen, und daher nach Fortsetzung von D (weg von $D_{\text{phys.}} = 4$) die Supersymmetrie gebrochen wird.

Nun haben wir zu zeigen, dass wir die Schleifen-Integrale, die in einigermassen allgemeinen Feynman Amplituden auftreten, auf Integrale der Form (15.2) und (15.5) - (15.7) zurückführen können. Dazu benützen wir die Technik der Feynman Parameter.

In allgemeinen Schleifen-Integranden treten Nenner der Form

$$\prod_{j=1}^n \frac{1}{(k+q_j)^2 - m_j^2 + i\varepsilon} \quad (15.9)$$

auf. Sie sind also nicht von der Form

$$(k^2 + s + i\varepsilon)^{-n}$$

Der vollständige Schleifen-Integrand ist von der Form (15.9), multipliziert mit einem Polynom in k, q_1, \dots, q_n , und ist über k mit dem Mass $d^D k$ zu integrieren. Es gibt zwei Methoden,

solche Integrale auszuführen:

(1) Die Methode der α -Parameter, die wir im Abschnitt 14.3, Formeln (14.40) - (14.43) einge führt hat, und die wir auch in (15.4) wieder benutzt haben. Damit wird die Berechnung allgemeiner Schleifen-Integrale zwar nicht auf (15.2) - (15.7) zurück geführt, kann aber in einer Weise durchgeführt werden, die degenerieren von (15.2) ganz ähnlich ist. Die Zähler im Schleifen-Integranden kann man dabei wie in Abschnitt 14.3, (14.41) und (14.44), loswerden. (Für eine allgemeine Darstellung dieser Techniken konsultiere man etwa: G. 't Hooft und M. Veltman, Nucl. Phys. B 44, 189 (1972); "Diagrammar" (CERN Report); E. Speer, in "Renormalization Theory", G. Velo und A.S. Wightman (Eds.), Erice-Vorlesungen 1975, Plenum Press 1976.)

(2) Die Methode der Feynman Parameter.

In ihrer einfachsten Form (nur zwei Nenner) besteht

aus einer einfachen Identität:

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \frac{dt}{t^2} \quad (15.10)$$

Nun definiere man den Feynman Parameter z durch

$$t = b + (a-b)z.$$

Dann wird aus (15.10)

$$\frac{1}{a \cdot b} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2} \quad (15.11)$$

und das ist von der gewünschten Form, zum Preis allerdings, dass nun eine weitere Integration auszuführen sein wird; die z -Integration.

Allgemein findet man

$$\frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n} = \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \times [a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{(n+1)} \quad (15.12)$$

Diese Formel beweist man induktiv wie folgt:

$$\text{Es seien } A = a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})z_{n-1}$$

$$\text{und } A' = a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_{n-1} \\ = A + (a_n - a_{n-1})z_{n-1} \quad (15.13)$$

Dann haben wir

$$\int_0^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \dots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}}$$

$$= \int_0^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{[A + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a_n - a_{n-1}} \left[\frac{(-1)}{[A + (a_n - a_{n-1})z]_0^{n+1}} \right]^{z_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a_n - a_{n-1}} \left(\frac{1}{A^n} - \frac{1}{(A')^n} \right), \quad (15.14)$$

wegen (15.13). Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\int_0^1 dz_1 \cdots \int_0^{z_{n-2}} dz_{n-1} \frac{1}{A^n} = \frac{1/\Gamma(n)}{a_0 a_1 \cdots a_{n-2} a_{n-1}}$$

und

$$\int_0^1 dz_1 \cdots \int_0^{z_{n-2}} dz_{n-1} \frac{1}{(A')^n} = \frac{1/\Gamma(n)}{a_0 a_1 \cdots a_{n-2} a_n}$$

Also folgt:

$$\text{Rechte Seite von (15.12)} = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \cdot \frac{1}{a_n - a_{n-1}} \cdot \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n-2}}$$

$$\times \left[\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right]$$

$$= \Gamma(n) \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n-2} a_{n-1} a_n}$$

Damit ist (15.12) bewiesen.

Weitere Resultate erhält man aus (15.11), (15.12) durch Differentiation nach einem a_j. Zum Beispiel erhält man aus (15.11) durch Differentiation nach a die Identität

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[b + (a-b)z]^3} \quad (15.15)$$

etc.

Bemerkungen.

1) Es kann nützlich sein, die Identität

$$\begin{aligned} \frac{k^\mu}{[k^2 + s + i\varepsilon]^n} &= \frac{\partial}{\partial l_\mu} \left. \frac{-\frac{1}{n-1}}{[k^2 + l \cdot k + s + i\varepsilon]^{n-1}} \right|_{l=0} \\ &= -\frac{1}{n-1} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \left. \frac{1}{[(k + \frac{l}{2})^2 + (s - \frac{l^2}{4}) + i\varepsilon]^{n-1}} \right|_{l=0} \end{aligned} \quad (15.16)$$

wiederholt zu benutzen. So könnte man etwa (15.5) und (15.6) aus (15.2) herleiten.

2) Benutzt man, etwa in der Berechnung von $\Pi(q^2, m^2)$ (Vakuum polarisation) die Pauli-Villars Regularisierung, so ist es gut, sich an

Newton's Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung zu erinnern:

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)^n} - \frac{1}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{1}{n} \int_{\lambda^2}^{k^2} \frac{dt}{(k^2 - t + i\varepsilon)^{n+1}}, \quad (15.17)$$

den man iteriert anwendet.

Damit haben wir einen "standard bag of tricks" bereit gestellt, nämlich (15.2) – (15.7), (15.8), (15.4) und (1) (α -Parameter), und (2), (15.11) – (15.17) (Feynman-Parameter), mit dessen Hilfe wir dimensionell (oder auch Pauli-Villars) regulisierte Schleifen-Integrale berechnen können.

Wir wollen nun das Gelernte auf die Berechnung der Vertex-Korrektur in 2. Ordnung in e_R anwenden.

$$e_R^{-2} \Lambda^\mu(p', p) = - \frac{i e_R^2}{(2\pi)^4} \int d^D k N^\mu(p', p, k) \times$$

$$\times \frac{1}{(k^2 - \mu_R^2 + i\varepsilon)[(p' - k)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(p - k)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]} \quad (15.18)$$

wo

$$N^\mu(p', p, k) = \gamma_\alpha (\not{p}' - \not{k} + m_R) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m_R) \gamma^\alpha \quad (15.19)$$

ist.

Nun führen wir Feynman Parameter, wie in Gl. (15.12), für $n=2$, ein:

$$e_R^{-2} \Lambda^\mu(p', p) = -\frac{i e_R^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^3 k \ 2 N^\mu(p', p, k) \times \\ \times \frac{1}{[k^2 - 2k(p'y + pz) - r + i\varepsilon]^3}, \quad (15.20)$$

wo

$$r = \mu_R^2 (1-y-z) - y((p')^2 - m_R^2) - z(p^2 - m_R^2)$$

ist. Nun setzen wir

$$t^\mu = k^\mu - a^\mu = k^\mu - (p'y + pz)^\mu \quad (15.21)$$

und erhalten

$$e_R^{-2} \Lambda^\mu(p', p) = -\frac{i e_R^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^3 t \ \frac{2 N^\mu(p', p, t+a)}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3} \quad (15.22)$$

Wir organisieren nun $N^\mu(p', p, t+a)$ nach Potenzen von t :

$$N^\mu(p', p, t+\alpha) = \sum_{i=0}^2 N_i^\mu(p', p, t)$$

wo

$$N_0^\mu(p', p, t) = \gamma_\alpha (\not{p}' - \not{p} + m_R) \gamma^\mu (\not{p} - \not{d} + m_R) \gamma^\alpha$$

$$\begin{aligned} N_1^\mu(p', p, t) &= -\gamma_\alpha [\not{k} \gamma^\mu (\not{p} - \not{d} + m_R) \\ &\quad + (\not{p}' - \not{d} + m_R) \gamma^\mu \not{k}] \gamma^\alpha \end{aligned}$$

und

$$N_2^\mu(p', p, t) = \gamma_\alpha \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\alpha. \quad (15.23)$$

Damit haben wir

$$\Lambda^\mu(p', p) = \sum_{i=0}^2 \Lambda_i^\mu(p', p), \text{ mit}$$

$$\Lambda_i^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^D t \frac{2N_i^\mu(p', p, t)}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3} \quad (15.24)$$

Aus (15.5) folgt nun, dass $\Lambda_1^\mu(p', p) = 0$, da

$N_1^\mu(p', p, t) \propto t$. Natürlich ist $N_0^\mu(p', p)$ konvergent für $D < 6$, da im Zähler keine

Potenzen von t auftreten. Hingegen divergiert

$\Lambda_2^\mu(p', p)$ für $D \geq 4$. Wir setzen (15.23) in (15.24)

ein und benützen Gl. (15.6). Das ergibt

$$\Lambda_2^\mu(p', p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\pi^{D/2} \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu$$

$$\times \gamma^\epsilon \gamma^\alpha \left[-(r + \alpha^2) \right]^{2 - D/2} \quad (15.25)$$

Wir setzen $D = 4 - \varepsilon$ und betrachten das Verhalten für $\varepsilon \approx 0$. Mit Hilfe von Gl. (15.8), 4), (15.3') und von

$$s^{-\varepsilon/2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln s + O(\varepsilon^2) \quad (15.26)$$

erhalten wir

$$e_R^{-2} \Lambda_2^\mu(p', p) = \gamma^\mu \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left[\left(\frac{2}{\varepsilon} - y \right) - \ln \left[-(r + \alpha^2) \right] \right]$$

$$= O\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \gamma^\mu + \text{konvergent.} \quad (15.27)$$

Damit haben wir die Renormierungskonstante Z_1 in 2. Ordnung in e_R bestimmt.

Nun benützen wir (15.27) zur Berechnung des anomalen magnetischen Momentes des Elektrons.

Wir schreiben

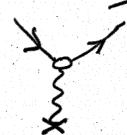
$$\begin{aligned}
 & i e_R \bar{u}(p') e_R^2 \Lambda^\mu(p', p) u(p) A_{\text{cl.}\mu}(\vec{p}' - \vec{p}) \\
 &= i e_R \bar{u}(p') \left[g^\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m_R} \delta^{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2) \right] u(p) \\
 & \quad \times A_{\text{cl.}\mu}(\vec{q}), \\
 & \quad (15.28)
 \end{aligned}$$

mit $q = p' - p$. Diese Form der Vertex Korrektur

folgt aus der Lorentz Kovarianz von Λ^μ , der Eichbedingung $q_\mu A_{\text{cl.}}^\mu(q) = 0$ und der Identität von Gordon. [In anderen Eichungen könnte noch ein Term $\propto q^\mu$ zu Λ^μ dazu kommen; Λ^μ ist nicht eichinvariant.] Für die Berechnung des anomalen magnetischen Momentes ist nur der Term $\propto F_2(q^2)$ relevant.

Der Term $O(\frac{\alpha_R}{\epsilon}) g^\mu$ in (15.27) wird durch den Gegenterm  kompensiert. Der

konvergente Anteil trägt nur zum Term $\propto F_1(q^2)$

bei, und es gilt $F_1(0) = 0$, da wir  so wählen, dass $\Lambda^\mu(p, p) = 0$. Also macht $\Lambda_2^\mu(p', p)$ keinen Beitrag zum anomalen magnetischen Moment, also zum Term $\propto F_2(q^2)$ in (15.28). Dieser kommt also von $\Lambda_0^\mu(p', p)$, und $\Lambda_0^\mu(p', p)$ ist durch ein konvergentes Integral gegeben, das wir nun berechnen wollen.

Wir setzen die erste Gl. in (15.23) (Definition von N_0^μ) in (15.24) ein und führen die t -Integration mit Hilfe von (15.2), für $n=3$, aus. Das gibt für $D=4$:

$$e_R^2 \bar{u}(p') \Lambda_0^\mu(p', p) u(p) = -\frac{\alpha_R}{4\pi} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz (r+a^2)^{-1} \times \bar{u}(p') N_0^\mu(p', p) u(p) \quad (15.29)$$

Das ergibt nach etlicher γ -Gymnastik

$$F_2(q^2) = \frac{m_R^2 \alpha_R}{\pi} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{(y+z)(1-y-z)}{\mu_R^2 (1-y-z) + (p'y + pz)^2}$$

also

$$F_2(0) = \frac{d_R}{\pi} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{1-y-z}{y+z} = \frac{d_R}{2\pi} \quad (15.30)$$

Das ist das schon in Kapitel 14 diskutierte Resultat von Schwinger aus dem Jahre 1948.

Übung: Berechne mit Hilfe der hier vorgeführten Techniken die Selbstenergiekorrektur $\Sigma(p)$ zum Elektron Propagator. (Hinweis: Wegen der Ward Identität genügt es $\bar{u}(p)\Sigma(p)u(p)$, $p^2 = m_R^2$, zu berechnen. Der Koeffizient des Terms $\propto p_\mu$ in $\Sigma(p)$ ist wegen der Ward Identität $\propto V^\mu(p,p)$.)

(1)

16. Die Renormierungsgruppe in der QED.

Ausgangspunkt: Renormierte Störungsreihe für

$$\alpha = \alpha_R + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n \alpha_R^n \quad \left(\alpha_R = e_R^2 \right)$$

$$m = m_R + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \alpha_R^n \quad (\times)$$

$$Z_i = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n} \alpha_R^n, \quad i = 1, 3$$

Ward Identitäten:

$$\alpha_R = Z_3 \alpha \Rightarrow \varepsilon_n \leftrightarrow \xi_{3,n}$$

Renormierbarkeit: Können ε, μ, ξ_i so

wählen, dass Limes des Cutoffs $\Lambda \rightarrow \infty$ existiert,
im Sinne formaler Potenzreihen in α_R .

(Λ : Pauli-Villars (+ UV cutoff für A_μ))

Fragen:

1) \exists QED im nicht-störungstheor. Sinne?

2) Konvergiert die renommierte Störungsreihe

(Nein (?); Dyson's Argument; Instabilität
für neg. α_R .)

3) Ist renormierte Störungsreihe asymptotisch?

$f(\alpha_R)$: phys. Größe.

Störungsreihe asymptotisch, falls

$$\left| f(\alpha_R) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \alpha_R^n \right| < \frac{|f^{(k+1)}(t\alpha_R)|}{(k+1)!} \alpha_R^{k+1}$$

KEINE RIGOROSEN ANTWORTEN

Untersuchung der Selbstkonsistenz der ren. St. Reihe.

- Beziehungen zwischen nativen und renormierten Parametern.
- Asymptotisches Verhalten hoher Ordnungen Störungstheorie.

Studieren zunächst Zusammenhang

$\alpha \leftrightarrow \alpha_R$

α_R def. durch Coulomb Streuung:

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{4\pi \alpha_R}{|\vec{q}|^2} \frac{1}{1 + \bar{\omega}(-\vec{q}^2)}$$

Das Coulomb'sche Gesetz soll asymptotisch, für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, exakt sein, mit $\alpha_R = \text{Feinstrukturkonstante} \approx 1/137$. Daraus folgt, dass

$$\lim_{|\vec{q}| \rightarrow 0} |\vec{q}|^2 \hat{\phi}(\vec{q}) = 4\pi \alpha_R,$$

und daher

$$\bar{\omega}(0) = 0. \quad (\alpha)$$

Es bezeichne Λ den Ultraviolet Cutoff der Theorie (Pauli-Villars für Fermion Schleifen, Impulsraum Cutoff für Photonen).

Beiträge zu $\bar{\omega}(q^2)$ in 2. Ordnung in e_R für die QED mit UV Cutoff sind:

$$-\left[g_{\mu\nu}q^2 - g_{\mu\nu}q_\nu\right] \bar{\omega}^{(2)}(q^2) = \begin{array}{c} \text{Diagramm 1: } \\ \text{Zwei vertikale Linien mit einem Pfeil zwischen ihnen.} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagramm 2: } \\ \text{Ein geschlossener Kreislauf mit einem Pfeil im Uhrzeigersinn.} \end{array}$$

$$= -\left[g_{\mu\nu}q^2 - g_{\mu\nu}q_\nu\right] (Z_{3,1} + \omega_2(q^2)),$$

daher aufgrund von (a)

$$\omega_2(0) =: -Z_3^{(2)} \quad (\beta)$$

Nun ist

$$\alpha_R = Z_3 \alpha,$$

oder

$$\alpha = \frac{\alpha_R}{Z_3} = \frac{(\alpha)}{1 - \omega_2(0) + \dots}, \quad (1)$$

mit

$$-[g_{\mu\nu} q^2 - g_{\mu} q_{\nu}] \omega_2(q^2) = \text{Diagramm mit einem vertikalen Zickzack-Linienstrich}$$

(für endliche Werte von Λ).

Nun haben wir gesehen, dass

$$\omega_2(q^2) = \frac{2 \alpha_R}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m_R^2} - \ln \left[1 - x(1-x) \frac{q^2}{m_R^2} \right] \right\} dx + O(\alpha_R^2) \quad (2)$$

Kombination von (1) und (2) ergibt

$$\alpha = \alpha_R + \frac{2 \alpha_R^2}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{m_R} \right) + O(\alpha_R^3) \quad (3)$$

Der 2. Term auf der R.S. von (3) ist vergleichbar mit dem 1., falls

$$\Lambda \gtrsim e^{\frac{3\pi}{2\alpha_R}} m_R \approx 10^{280} \text{ MeV}$$

4.

Nun untersuchen wir, wie sich $\alpha = \alpha(\lambda)$

als Funktion von λ verhalten muss, damit α_R
fest bleibt.

$$\bar{\beta}(\alpha, \lambda) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda) / \underset{\alpha_R, m_R = \text{const.}}{\alpha(\lambda)^2}$$

$$(3) \quad = \frac{2}{3\pi} \alpha(\lambda)^2 + O(\alpha(\lambda)^3) \quad (4)$$

Beweis:

$$(3) \Rightarrow \lambda \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{2\alpha_R^2}{3\pi} - \frac{m_R}{\lambda} \cdot \frac{1}{m_R} \cdot \lambda + \dots$$

$$\approx \frac{2}{3\pi} \alpha^2 + \dots$$

$$(4) \Rightarrow \frac{d\alpha}{\alpha^2} \approx \frac{2}{3\pi} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$-\frac{1}{\alpha(\lambda)} + \frac{1}{\alpha(m)} = \frac{2}{3\pi} \int_m^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$= \frac{2}{3\pi} \ln\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha(\lambda)} = \frac{1}{\alpha(m)} - \frac{2}{3\pi} \ln\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(\lambda) = \frac{\alpha(m)}{1 - \frac{2\alpha(m)}{3\pi} \ln(\lambda/m)}} \quad (5)$$

\Rightarrow Landau Pol!

Wegen (3) : $\alpha(m) \simeq \alpha_R$, für $m = m_R$. (6)

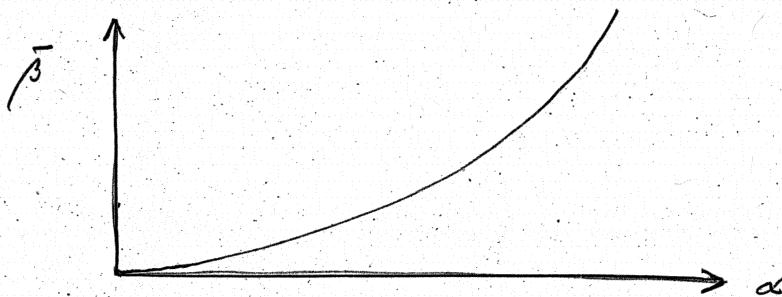
\Rightarrow Störungstheorie ungenügend, falls

$$\frac{1}{\alpha_R} \simeq 137 \simeq \ln\left(\frac{\Lambda}{m_R}\right)$$

Bemerkungen: QED \subset grösste Theorie;

wegen (3) ist eine QED mit UV Cutoff ausreichend.

Mögliche Verhalten von $\bar{\beta}$:



$$\Lambda \frac{d\alpha}{d\Lambda} = \bar{\beta}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{\bar{\beta}(\alpha)} = \frac{d\Lambda}{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\alpha_R}^{\alpha(\Lambda)} \frac{d\alpha}{\bar{\beta}(\alpha)} = \ln\left(\frac{\Lambda}{m_R}\right)}$$

(7)

Betrachten $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\lambda \rightarrow \infty \text{ ex.} \Leftrightarrow \int_{\alpha_R}^{\alpha(\infty)} \frac{d\alpha}{\bar{\beta}(\alpha)} \quad \text{divergent}$$

$$(1) \quad \alpha(\infty) = \infty \Rightarrow \int_{\alpha_R}^{\infty} \frac{d\alpha}{\bar{\beta}(\alpha)} \quad " "$$

$$\Rightarrow \bar{\beta}(\alpha) \leq \text{const } \alpha.$$

Dies ist inkompatibel mit Verhalten

$$\bar{\beta}(\alpha) \sim \alpha^2 !$$

$$(2) \quad \alpha(\infty) = \alpha_* < \infty$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha_R}^{\alpha_*} \frac{d\alpha}{\bar{\beta}(\alpha)} \quad \text{divergent}$$

$$\Rightarrow \bar{\beta}(\alpha_*) = 0, \text{ und}$$

$\bar{\beta}(\alpha) \sim \alpha^* - \alpha$;
 $(\alpha^* \text{ heisst UV Fixpunkt}).$

In allen anderen Fällen, existiert der Limes
 $\lambda \rightarrow \infty$ nicht, und der Landau Pol ist echt.

7.

Diese Analyse basiert auf der Forderung, dass

$$\alpha_R > 0$$

Umkehrung: $\alpha(\infty) < \infty$, $\beta(\alpha) \stackrel{\text{e.g.}}{\sim} \alpha^2$



$$\alpha_R = 0$$

("Trivialität" der QED!)

Callan - Symmetrie Gl.

$$r = \frac{m}{\Lambda} \quad (m: \underline{\text{nackte Masse}})$$

$$\begin{aligned} d_0(q^2, \alpha, r, 1) &\equiv \frac{1}{\alpha} (1 + \omega_0(q^2, \alpha, r, 1)) \\ &\quad \uparrow \text{(Entwicklung nach nackter Ladung)} \\ &\equiv d(q^2, \alpha_R, m_R) \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{1}{\alpha_R} (1 + \bar{\omega}(q^2, \alpha_R, m_R^2)); \quad (8)$$

α_R misst Stärke der e.m. WW bei Impulsübergang q .

$$d_0 \text{ dimensionlos} \Rightarrow d_0 = d_0 \left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \alpha, r, 1 \right).$$

Nun wollen wir α, r so ändern, dass

$d(q^2, \alpha_R, m_R)$ konstant bleibt; (d ist eine RG-Invariante!).

$$d(q^2, \alpha_R, m_R) = \frac{1}{\alpha_R} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[1 - x(1-x) \frac{q^2}{m_R^2} \right] dx + O(\alpha_R^2) \quad (9)$$

$$\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \left\{ \ln \alpha^2 + \ln \left[1 - x(1-x) \frac{q^2}{r^2 \Lambda^2} \right] \right\} dx + O(\alpha^2)$$

$$\stackrel{(8)}{=} d_o(q^2, \alpha, r, \Lambda) \quad (10)$$

Invarianz von d unter Änderungen von Λ , ($\Lambda \frac{d}{d\Lambda} d = 0$):

$$\Rightarrow \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \bar{\beta}(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{\delta}(\alpha, r) \frac{\partial}{\partial r} \right) d_o(q^2, \alpha, r, \Lambda) = 0 \quad (11)$$

$$\bar{\beta}(\alpha) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda \frac{d\alpha}{d\Lambda} \Big|_{\alpha_R, m_R} = -\frac{2}{3\pi} \alpha^2 + O(\alpha^3) \quad (12)$$

$$\bar{\delta}(\alpha, r) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda \frac{dr}{d\Lambda} \Big|_{\alpha_R, m_R} = -r + \frac{3}{2\pi} \alpha r + O(\alpha^2) \quad (13)$$

Aus Berechnung von
 $\Sigma(p)$! Siehe (x)

$\Rightarrow \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} d_o$ aus (11)! Resultat stimmt mit (10) überein.

(8.')

Aus den Einschleifenrechnungen für die Vakuum-polarisation und die Elektron-Selbstenergie (e.g. I.-Z., Gl. (7-33)) findet man:

$$\bar{\beta}(\alpha) = \frac{2}{3\pi} \alpha^2 + O(\alpha^3),$$

$$\bar{\delta}(\alpha, r) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda \left. \frac{\partial r}{\partial \Lambda} \right|_{d_R, m_R} = -r + \frac{3}{2\pi} \alpha r + O(\alpha^2).$$

Benutzt man auch das Einschleifenresultat für d_o , so findet man:

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} d_o = \frac{4}{\pi} \int_0^1 (x(1-x))^2 \frac{q^2}{r^2 \Lambda^2} \left/ \left(1 - x(1-x) \frac{q^2}{r^2 \Lambda^2} \right) \right. dx + O(\alpha)$$

$$\bar{\beta}(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} d_o = -\frac{2}{3\pi} + O(\alpha)$$

$$\bar{\delta}(\alpha, r) \frac{\partial}{\partial r} d_o = \frac{4}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \left[1 - x(1-x) \frac{q^2}{r^2 \Lambda^2} \right] \left/ \left(1 - x(1-x) \frac{q^2}{r^2 \Lambda^2} \right) \right. dx + O(\alpha)$$

Damit ist Gl. (11) in Einschleifennäherung verifiziert. Gl. (11) impliziert, dass, für grosse Werte von Λ , $d_o(q^2, \alpha, r, \Lambda) = d_o\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \alpha, r, 1\right)$ auf den Kurven $(q^2, \alpha(\lambda), r(\lambda), \Lambda)$ konstant ist, wo $\alpha(\lambda)$ & $r(\lambda)$ Lösungen der RG Flussglv. sind.

Allgemeiner: Callan - Symanzik Gln. für

Green'sche Funktionen!

Idee: Renommierte Green'sche Fu. sind

λ -unabhängig \Rightarrow Gln. für λ -Abhängigkeit der nackten Green'schen Funktionen.

Renomierungsfluss:

$$\lambda \frac{d\alpha}{d\lambda} = \bar{\beta}(\alpha) \quad , \text{ aus (12)} .$$

$$\lambda \frac{dr}{d\lambda} = \bar{\delta}(\alpha, r) = r \cdot \delta(\alpha) \quad \text{aus (13)}$$

Ebenso:

$$\lambda \frac{d^2 z_1}{d\lambda} = \bar{\gamma}(\alpha) \quad \text{dimensionslos} \quad \text{aus (x)}$$

Fixpunkt: $\alpha = r = 0, z_1 = 1$.

Was sagt (11) aus?

$$d_o(q^2, \alpha, r, \lambda) = d_o\left(\frac{q^2}{\lambda}, \alpha, r\right)$$

konstant auf Kurven $\left(\frac{q^2}{\lambda}, \alpha(\lambda), r(\lambda)\right)$

$$\Rightarrow d_0(q^2, \alpha(1), r(1))$$

$$= d_0(1, \alpha(1/q), r(1/q)) \quad (15)$$

$q^2 \rightarrow 0$ Asymptote der QED gegeben

durch $(\alpha(1/q) \rightarrow 0, r(1/q) \rightarrow 0)$ -Theorie.

$$\downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0$$

\Rightarrow Theorie wird frei bei $|q| \approx 0$, d.h. sie

hat Infrarot Fixpunkt!

"Running coupling constants":

α_μ : eff. Ladung bei Impulsübertrag

$$q^2 = -\mu^2 < 0.$$

$$\frac{1}{\alpha_\mu} \equiv d_0(-\mu^2, \alpha, r, \lambda) \equiv d(-\mu^2, \alpha_R, m_R) \quad (16)$$

Benutzen α_μ , um Theorie zu parametrisieren.

$$\underline{\text{Def.}}: D_{\text{ren}}(q^2, \alpha_\mu, m_R, \mu) \equiv d(q^2, \alpha_R, m_R) \quad (17)$$

(11)

Aus (16) & (9) (Formel für d):

$$\frac{1}{\alpha_\mu} = \frac{1}{\alpha_R} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[1 + x(1-x) \frac{\mu^2}{m_R^2} \right] dx + O(\alpha_R^{-2}) \quad (18)$$

$$\Rightarrow D_{\text{ren.}}(q^2, \alpha_\mu, m_R, \mu) = d(q^2, \alpha_R(\alpha_\mu), m_R)$$

$$\begin{aligned} (9), (18) \\ &= \frac{1}{\alpha_\mu} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[\frac{1+x(1-x) \frac{q^2}{m_R^2}}{1+x(1-x) \frac{\mu^2}{m_R^2}} \right] dx + O(\alpha_\mu) \\ &= \frac{1}{\alpha_\mu} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) dx \\ &\quad + O\left(\frac{m_R^2}{q^2}, \frac{m_R^2}{\mu^2}\right) + O(\alpha_\mu) \quad (19) \end{aligned}$$

→ Asymptotik für $m_R^2 \ll -q^2, \mu^2$!

(Masseloser Limes der QED! möglich
off shell!)

Nun gilt:

$$D_{\text{ren.}}(q^2, \alpha_\mu, m_R, \mu)$$

ist nach Def. unabhängig von μ !

In s.b. ist

$$D_{\text{ren.}}^{\text{as}}(q^2, \alpha_\mu, \mu) := \lim_{m_R \rightarrow 0} D_{\text{ren.}}^{\text{as}}(q^2, \alpha_\mu, m_R, \mu)$$

unabh. von μ .

$$\Rightarrow \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\alpha_\mu) \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} \right) D_{\text{ren.}}^{\text{as}}(q^2, \alpha_\mu, \mu) = 0, \quad (20)$$

wo

$$\beta(\alpha_\mu) = \mu \frac{d\alpha_\mu}{d\mu} \Big|_{\alpha, m_R = \text{const.}}, \quad (21)$$

$m_R \rightarrow 0$

Aus (18) folgt:

$$\beta(\alpha_\mu) = \mu \frac{d\alpha_\mu}{d\mu} = \frac{2}{3\pi} \alpha_\mu^2 + \dots \quad (22)$$

[Nächster Term ist $\frac{1}{2\pi^2} \alpha_\mu^3$.]

(20) impliziert, dass

$$D_{\text{ren.}}^{\text{as}}(q^2, \alpha_\mu, \mu) = D_{\text{ren.}}^{\text{as}}\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_\mu\right) \quad (23)$$

Konstant auf Kurven (μ, α_μ) ist,

wo α_μ eine Lösung von (21) ist.

Wir wollen $D_{\text{ren}}^{\text{as.}}(q^2, \alpha_\mu, \mu)$ für grosse q^2 studieren. Dazu können wir benutzen, dass

$$D_{\text{ren.}}^{\text{as.}}\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_\mu\right)$$

$$(23) \quad = D_{\text{ren.}}^{\text{as.}}(1, \alpha_{|q|}) = D_{\text{ren.}}^{\text{as.}}(q^2, \alpha_1), \text{ d.h.}$$

(gross - q) - Asymptote von $D_{\text{ren.}}^{\text{as.}}$

= $D_{\text{ren.}}^{\text{as.}}$ bei festem q , aber $\alpha \rightarrow \alpha_{|q|}$

$\alpha_{|q|}$ wächst gemäß (22).

→ Hohennergie-Verhalten nicht störungstheoretisch!

Aber Tiehennergie-Verhalten ist

störungstheoretisch, da $\alpha_{|q|} \rightarrow \alpha_R$, für $|q| \rightarrow 0$.

→ Gegensatz zur QCD !!

Zurück zur Gell-Mann - Low Funktion.

Aus (16)

$$\mu \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} d^{-1} \left(-\frac{\mu^2}{m_R^2}, \alpha_R \right)$$

$$= \frac{2}{3\pi} \alpha_\mu^2 + \frac{d\mu^3}{2\pi^2} + \frac{2d\mu^4}{3\pi^2} \left(\beta(3) - \frac{101}{96} \right)$$

$$= \bar{\beta}(\alpha_\mu),$$

$$\beta(3) = 1.202.$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) = \int_{\alpha_{\mu_1}}^{\alpha_{\mu_2}} \frac{d\alpha}{\bar{\beta}(\alpha)} \quad (24)$$

$\Rightarrow \alpha_{\mu_2}$ aus (24) und $\bar{\beta}(\alpha)$ in tiefer Ord. in α .

$$\alpha_{\mu_2} = d^{-1} \left(-\frac{\mu_2^2}{m_R^2}, \alpha_R \right)$$

\Rightarrow Also d in höherer Ordnung aus
 $\bar{\beta}(\alpha)$ in tieferen Ordnung!