Übung 1. *Streuung identischer Teilchen*

Wir betrachten die Streuung zweier identischer Teilchen im Schwerpunktsystem mit einem spinunabhängigen Streuungs-Hamiltonian. In diesem Bezugssystem können wir nicht zwischen einer Streuung des Teilchens um Winkel Θ und einer Streuung um Winkel $\pi - \Theta$ unterscheiden. Wir erhalten daher einen Interferenzterm zwischen den beiden Amplituden $f(\Theta)$ und $f(\pi - \Theta)$, der durch die Symmetriebedingung auf die Wellenfunktion eindeutig bestimmt ist.

(a) Schreibe für den Fall einer Streuung identischer spinloser Bosonen die auslaufende Welle mit Hilfe der Streuamplituden $f(\Theta)$ und $f(\pi-\Theta)$. Was ergibt sich demnach für den differentiellen Wirkungsquerschnitt?

(b) Gib im Falle von identischen Fermionen die Wirkungsquerschnitte an für

(1) zwei Elektronen im Singlett-Zustand

(2) zwei Elektronen im Triplett-Zustand

(3) unpolarisierte Elektronen.
Hinweis: Dies ist eine Kombination der beiden vorherigen Fälle.

Vergleiche diese jeweils für den Winkel $\Theta = \pi/2$ mit dem Ergebnis für unterscheidbare Teilchen.

Übung 2. *Gekoppelte Anyonen*

Wir betrachten zwei gekoppelte identische Teilchen in 2D. Die Schwerpunktbewegung wird vernachlässigt und die Relativbewegung wird durch die Schrödingergleichung

$$E\Psi(r,\phi) = H\Psi(r,\phi) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) + V(r)\right]\Psi(r,\phi) \tag{1}$$

beschrieben, wobei $V(r)$ für einen Potentialterm steht, der lediglich von der relativen Distanz zwischen den beiden Teilchen abhängt.

(a) Leite die oben angegebene Form für H her.

(b) Finde die irreduziblen Darstellungen der Gruppe SO(2) auf dem zu H gehörenden Hilbertraum. Was fällt auf im Vergleich zu den aus der Vorlesung bekannten Darstellungen von SO(3)?
Wie auch schon im 3-dimensionalen Fall wollen wir in der QM die Wirkung der Drehgruppe SO(2) eigentlich nur bis auf eine Phase bestimmen und interessieren uns daher für die projektiven Darstellungen der Symmetriegruppe - wie lauten diese? Vergleiche mit den projektiven Darstellungen in drei Dimensionen (unter der relevanten Gruppe SO(3)).

(c) Für die Eigenfunktionen des Drehoperators gilt offensichtlich, dass

$$\Psi_l(r, \phi + \theta) = e^{il\theta}\Psi_l(r,\phi). \tag{2}$$

Wir betrachten nun zuerst, wie sich die uns bereits bekannten Bosonen und Fermionen (also Darstellungen von SO(3) mit ganz- und halbzahligem Spin) in diesem System verhalten,

bevor wir uns in der nächsten Teilaufgabe den neuen Teilchen widmen, die die Gruppe SO(2) durch ihre projektiven Darstellungen zulässt (Anyonen).
Welche Werte von l sind also hier für Bosonen und Fermionen möglich, wenn man zusätzlich noch annimmt, dass die Spinwellenfunktion χ gerade ist unter Vertauschung der Teilchen?

(d) In der Aufgabe a) haben wir gelernt, dass der Spin in 2D nicht wie in 3D 2l+1-dimensionalen Darstellung entspricht und nur quantisierte Werte annehmen kann, sondern einer 1 dimensionalen Darstellung entspricht und dass er beliebige Werte $\nu \in \mathbb{R}$ annehmen kann. Für Bosonen wollten wir, dass die Wellenfunktion unter Austausch der Teilchen invariant bleibt. Für Fermionen gab es die Forderung, dass die Wellenfunktion ein Minuszeichen erhält. Für Anyonen ($\nu \notin \mathbb{Z}$) lautet die Randbedingung statt dessen nur folgendermassen:

$$\Psi_\nu(r, \phi + \pi) = e^{i\nu\pi}\Psi_\nu(r, \phi). \tag{3}$$

Erzeugt diese Funktion auch eine echte irreduzible Darstellung von SO(2)? Wie verhält sich diese Lösung bezüglich der Gruppe S_2?

Übung 3. *Zweite Quantisierung*

(a) Zeige, dass der fermionische Besetzungszahl-Operator $\hat{n} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ zwei Eigenwerte haben kann: 0 und 1. Hier sind $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit den aus der Vorlesung bekannten Antikommutationsrelationen.

(b) Zeige, dass für Bosonen gilt:

(1) $[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}] = \alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$

(2) $e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = \hat{a} + \alpha$

wobei $\hat{a}^\dagger$ der Erzeugungsoperator für Bosonen ist.
Wie lauten die entsprechenden Relationen für Fermionen?

(c) Wie lauten die Antikommutationsrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verschiedener fermionischer Zustände? Zeige explizit, dass aus diesen Relationen die Antisymmetrie der fermionischen Wellenfunktionen folgt.