

Kontinuumsmechanik. Übung 11.

FS12

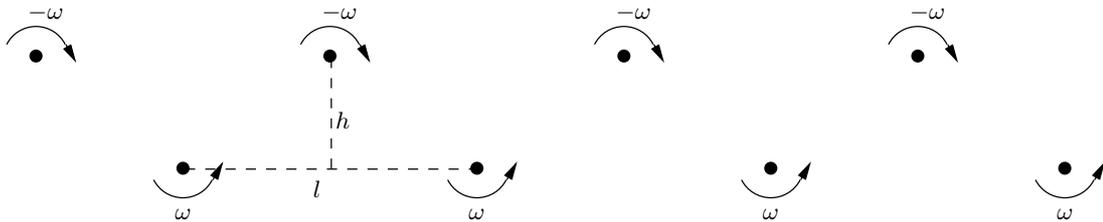
Abgabe: 29.5.12

1. Umströmung einer Kugel

Eine Kugel vom Radius R wird von einem inkompressiblen idealen Fluidum umströmt, dessen Geschwindigkeit im Unendlichen konstant und gleich \vec{u} ist. Bestimme das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x)$ und verifiziere, dass die Gesamtkraft, die auf die Kugel wirkt, verschwindet.

Hinweis: Setze $\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi_0$ als Potentialströmung an, und zwar mit $\varphi_0(x) = -\vec{u} \cdot \vec{x} + \varphi(x)$, wobei $-\vec{u} \cdot \vec{x}$ das Potential zum homogenen Geschwindigkeitsfeld \vec{u} ist. Man überlege sich, dass φ dem Potential eines elektrischen Dipols entspricht.

2. Die Karmansche Wirbelstrasse



Seien

$$z_k^\pm = \pm(z_0 + k \cdot l), \quad (k \in \mathbb{Z}; z_0 = \frac{1}{2}(l + ih))$$

die Lagen der Punktwirbel; dabei steht +, bzw. - für die obere, bzw. untere Strassenseite. Die Wirbelstärken seien $\mp\omega$. Das Geschwindigkeitsfeld ist inkompressibel und wirbelfrei ausserhalb der Punktwirbel.

Man überlege sich, dass das dazugehörige komplexe Potential Φ (mit $w = -d\Phi/dz \rightarrow 0$ für $|\text{Im } z| \rightarrow \infty$) durch die mehrwertige analytische Funktion

$$\Phi(z) = -\frac{i\omega}{2\pi} \log \frac{\sin \frac{(z-z_0)\pi}{l}}{\sin \frac{(z+z_0)\pi}{l}} \quad (1)$$

gegeben ist. Finde daraus die Geschwindigkeit eines Wirbels unter dem Einfluss der anderen:

$$\vec{u} = \left(-\frac{\omega}{2l} \text{th} \frac{h\pi}{l}, 0 \right),$$

(wie in (7.19), aber ohne eine Reihe zu summieren).

Hinweis: Zeige, dass das Feld um jeden Wirbel die passende Zirkulation aufweist. Die Selbstwechselwirkung ist von (1) zu subtrahieren.