Differentialformen und äussere Ableitung

Dual zu Vektoren sind Formen; dual zu VF sind die sog. 1-Formen. Sie sind Schnitte des Kotangentialbündels T^*M, wo M eine Mf. ist. Im Abschnitt über Operationen auf Vektorbündeln haben wir die Tensorbündel $T^p_q M$ kennengelernt; (Seite 61).

Ein Spezialfall eines Tensorbündels ist das Bündel

$$T_q M = T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M \tag{81}$$

der q-fach kovarianten Tensoren. Ersetzt man in (81) die Tensorprodukte $\otimes$ durch die <u>anti-symmetrischen Tensorprodukte</u>, $\wedge$, so erhält man das "Unterbündel", $\Lambda^q M$, der total antisymmetrischen q-fach kovarianten Tensoren, oder q-<u>Formen</u>. Man nennt

$$\Lambda^* M = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q M, \quad n = \dim M, \tag{82}$$

das Bündel der <u>Differentialformen</u>. Den Raum der Schnitte von $\Lambda^q M$ bezeichnet man mit $\Omega^q(M)$

(q-Formen), denjenigen von $\Lambda^* M$ mit $\Omega^*(M) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q(M)$ (Differentialformen). Diese Räume sind $C^p(M)$-Module; (p = Diff.-barkeitsklasse von M. Im folgenden der Einfachheit halber $p = \infty$, Auf $\Lambda^* M$, resp. $\Omega^*(M)$ sind einige wichtige Operationen definiert.

(1) Schiefe Multiplikation

Für $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)$ definieren wir

$$\alpha \wedge \beta := \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) \in \Omega^*(M), \tag{83}$$

wo $\mathcal{A}$ "Antisymmetrisierung" bedeutet. Damit wird $\Omega^*(M)$ zu einer $\mathbb{Z}_+$-gradierten Algebra. Es gilt dann

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{rs} \alpha \wedge \beta, \tag{84}$$

für $\alpha \in \Omega^r(M)$, $\beta \in \Omega^s(M)$; (r = "Grad" von α).
Eine Algebra mit diesen Eigenschaften heisst Grassmann Algebra.

(2) Die innere Multiplikation

Es seien $X_1, \dots, X_r$ Vektorfelder, d.h. Schnitte von TM und $\alpha \in \Omega^r(M)$ eine r-Form. Man kann $X_1, \dots, X_r$ und α die Funktion $\alpha(X_1, \dots, X_r)$ in $C^\infty(M)$ zuordnen, deren Wert in einem Punkt $x \in M$ durch $\alpha_x(X_1(x), \dots, X_r(x))$ gegeben ist; in lokalen Koordinaten:

$$\alpha(X_1, \dots, X_r)(x) := \sum_{i_1, \dots, i_r = 1}^{n} \underbrace{\alpha_{i_1 \dots i_r}(x)}_{\text{Komponenten von } \alpha} \underbrace{X_1^{i_1}(x) \cdots X_r^{i_r}(x)}_{\text{Komponenten der VF}}, \quad (85)$$

$$\alpha_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(r)}}(x) = \operatorname{sig}\pi \; \alpha_{i_1 \dots i_r}(x), \; \forall \text{ Permuta-}$$

tionen, π, von $\{1, \dots, r\}$.

Für X ein Vektorfeld auf M und α eine r-Form definieren wir die innere Multiplikation, i_X, von α mit X durch

$$(i_X \alpha)(X_2, \dots, X_r) = r\,\alpha(X, X_2, \dots, X_r), \quad (86)$$

mit $i_X \alpha = 0$, falls $\alpha \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Offenbar bildet i_X $\Omega^r(M)$ nach $\Omega^{r-1}(M)$ ab, (aber <u>nicht</u> "auf"!). Man kann nun i_X linear auf ganz $\Omega^*(M)$ ausdehnen. Wir bezeichnen $i_X \alpha$ auch mit $X \lrcorner \alpha$, $\alpha \in \Omega^*(M)$. Die innere Multiplikation ist eine tensorielle, d.h. $C^\infty(M)$-lineare Abbildung von $\Omega^*(M)$ nach $\Omega^*(M)$. Sie ist eine <u>"Antiderivation"</u> der Algebra $(\Omega^*(M), \wedge)$, d.h.

$$X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (X \lrcorner \beta),$$

$\forall\, \alpha \in \Omega^r(M)$, $\beta \in \Omega^*(M)$; (gradierte Leibniz Regel)

(3) <u>Klassische Tensornotation</u>

In einer Karte von M wählen wir eine lokale Basis von VF, $X_1, \dots, X_n$ ($n = \dim M$) für den Raum, $T(M)$, der Schnitte von TM. (Wenn TM ein triviales Bündel ist, dann gibt es sogar eine globale Basis von VF in $T(M)$). Wir können nun in $\Omega^1(M)$ eine <u>duale Basis</u>, $\omega^1, \dots, \omega^n$, von 1-Formen wählen:

$$\omega^i(X_j) \equiv \langle \omega^i, X_j \rangle = \delta^i{}_j, \tag{87}$$

$i, j = 1, \dots, n$. Die Tensor Felder $X_{i_1} \otimes \dots \otimes X_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s}$ bilden dann eine lokale Basis im Raum der Schnitte von $T^r_s M$; (siehe S 61, oben). Jedes Tensorfeld

$T \in \mathcal{T}^r_s(M) \equiv \Gamma(T^r_s M)$ kann dann nach dieser Basis entwickelt werden:

$$T(x) = \sum T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x)\, X_{i_1}(x) \otimes \cdots \otimes X_{i_r}(x) \otimes \omega^{j_1}(x) \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}(x),$$

$x \in U \subseteq M$. Die $T^{i_1\cdots i_r}_{j_1,\cdots,j_s}(x)$ heissen <u>Komponenten</u> von T in der gewählten Basis:

$$T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \overset{(87)}{=} T(\omega^{i_1},\dots,\omega^{i_r}; X_{j_1},\dots,X_{j_s}) \qquad (88$$

Wählen wir auf $U \subseteq M$ Koordinaten(funktionen) $x^1,\dots,x^n$, so gibt es eine "ausgezeichnete Basis" von VF: $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\dots,X_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$, $\qquad (89,$
mit

$$X_i(f)(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)(x) = \frac{d}{d\varepsilon} f(x^1,\dots,x^i+\varepsilon,\dots,x^n)\Big|_{\varepsilon=0}$$

Die duale Basis von 1-Formen wird mit

$$\omega^1 = dx^1,\dots,\omega^n = dx^n, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \right\rangle = \delta^j_i \qquad (90)$$

bezeichnet. Das sind die "<u>Koordinatenbasen</u>".

<u>Basis Transformationen.</u>

Sei $\{\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_n\}$ eine zweite Basis von $\mathcal{T}(M) = \Gamma(TM)$ und $\{\tilde{\omega}^1,\dots,\tilde{\omega}^n\}$ die entsprechende duale Basis von $\Omega^1(M)$. Dann gibt es matrix-wertige Funktionen

("Vielbeine"), $(\Lambda_i{}^j)$ und $(\Lambda^j{}_i)$, $\Lambda_i{}^j, \Lambda^j{}_i$ in $C^\infty(\Lambda$
dergestalt, dass

$$\tilde{X}_i = \Lambda_i{}^j X_j, \quad \tilde{\omega}^i = \Lambda^i{}_j\, \omega^j.$$

Da $\omega^i(X_j) = \tilde{\omega}^i(\tilde{X}_j) \equiv \delta^i{}_j$, $\forall\, i,j$, folgt, dass

$$\Lambda^i{}_j(x)\, \Lambda^j{}_k(x) = \delta^i{}_k, \quad \forall\, x \in U,$$

d.h. die Matrizen $(\Lambda^i{}_j(x))$ und $(\Lambda_j{}^i(x))$ sind zueinander <u>invers</u>. Aus (88) folgt nun, dass

$$\tilde{T}^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} = \Lambda^{i_1}{}_{k_1} \cdots \Lambda^{i_r}{}_{k_r}\, \Lambda_{j_1}{}^{l_1} \cdots \Lambda_{j_s}{}^{l_s}\, T^{k_1 \cdots k_r}{}_{l_1 \cdots l_s}.$$

(4) <u>Metrik</u>

Eine <u>Metrik</u> auf TM ist eine Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{T}(M) \otimes_{C^\infty(M)} \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M),$$

mit den Eigenschaften

(1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist $C^\infty(M)$-linear in beiden Argumenten:

$$\langle fX, gY \rangle = f \cdot \langle X, Y \rangle \cdot g,$$

$\forall\, X, Y$ in $\mathcal{T}(M) = \Gamma(TM)$, $\forall\, f, g$ in $C^\infty(M)$;

(2) $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$, $\forall\, X, Y$ in $\mathcal{T}(M)$;

(3) $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ist <u>nicht-entartet</u>, d.h.

$$Y \in TM \longmapsto \langle \cdot , Y \rangle \in \Omega^1(M)$$

ist ein $C^\infty(M)$-linearer Isomorphismus von $T(M)$ auf $\Omega^1(M)$.

Man sagt, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ sei positiv-definit, oder <u>"Riemannsch"</u>, falls $\langle X, X \rangle \geq 0$, $\forall X \in T(M)$, und $= 0 \Leftrightarrow X = 0$. Wählt man eine Basis, $X_1, \dots, X_n$, von VF, so definiert man die Komponenten der Metrik durch

$$g_{ij}(x) = \langle X_i(x), X_j(x) \rangle$$

Die g_{ij} sind die Komponenten eines zweifach kovarianten Tensorfeldes. Die Metrik ist nicht-entartet, falls $(g_{ij}(x))$ regulär ist, d.h. $g(x) := \det (g_{ij}(x)) \neq 0$, $\forall x$.

(5) <u>Lie Ableitung von Tensorfeldern</u>

Sei $\alpha \in \Omega^r(M)$ eine r-Form. Wir definieren ihre Lie Ableitung in Richtung eines VF X durch

$$X(\alpha(X_1, \dots, X_r)) =: (L_X \alpha)(X_1, \dots, X_r) + \\ + \alpha(L_X X_1, \dots, X_r) + \dots + \alpha(X_1, \dots, L_X X_r)$$

für beliebige VF $X_1, \dots, X_r$. Es folgt, dass

$$(L_X \alpha)(X_1, \dots, X_r) = X(\alpha(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{k=1}^{r} \alpha(X_1, \dots, [X, X_k], \dots, X_r) \quad (91)$$

Nun kann man die Lie Ableitung eines beliebigen Tensorfeldes $T \in \mathcal{T}^r_s(M) \equiv \Gamma(T^r_s M)$ wie folgt definieren:

$$(L_X T)(X_1, \dots, X_s, \omega^1, \dots, \omega^r) := X(T(X_1, \dots, X_s, \omega^1, \dots, \omega^r)) - \sum_{k=1}^{s} T(\dots, L_X X_k, \dots, \omega^1, \dots, \omega^r) - \sum_{l=1}^{r} T(X_1, \dots, X_s, \dots, L_X \omega^l, \dots) \quad (92)$$

<u>Übung.</u> Man bestimme L_X in einer lokalen Koordinatenbasis. Ausserdem stelle man die wichtigsten Eigenschaften von L_X zusammen.

(6) <u>Die äussere Ableitung, d, von Differentialformen.</u>

Wir kehren zur Untersuchung von Differentialformen zurück, die in der Differentialtopologie und -geometrie eine prominente Rolle spielen. Der wichtigste Begriff in diesem Abschnitt ist die <u>"äussere Ableitung"</u> von

Differentialformen. Ein grundlegendes Resultat ist

<u>Satz 6.</u> Es gibt genau einen Operator

$$d : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M),$$

<u>die äussere Ableitung</u>, mit den folgenden Eigenschaften

(i) $d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$, $r = 0, \dots, n = \dim M$, mit $\Omega^{n+1}(M) = \{0\}$.

(ii) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$, für alle $\alpha \in \Omega^r(M)$, $r = 0, \dots, n$, $\beta \in \Omega^*(M)$.

(iii) $$d^2 = 0.$$

(iv) Für $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ gilt

$$df(X) \equiv \langle df, X \rangle = X(f), \quad \forall X \in T(M).$$

Wir beweisen Satz 6 durch Benützung von lokalen Koordinaten, $x^1, \dots, x^n$, auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ und der entsprechenden Koordinatenbasis von VF und 1-Formen. Sei $\alpha \in \Omega^r(M)$. Dann hat die Restriktion, $\alpha/_U$, von α auf U die Form

$$\alpha/_U(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \alpha_{i_1 \dots i_r}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \quad x \in U, \tag{93}$$

mit $\alpha_{i_1 \dots i_r}(x) \in C^\infty(U)$, $\forall\, i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n$; (siehe

(85), (86) und (90)).

Wenn $\alpha \in \Omega^0(M)$, dann sollen die Komponenten von $d\alpha$ die Komponenten des Gradienten von α sein, damit (iv) erfüllt ist; (dx^i ist also die äussere Abl. der Koordinatenfunktion x^i, $i = 1, \dots, n$.)

Damit (i) – (iii) erfüllt sind, definieren wir

$$d\alpha|_U(x) := \sum_{i_0 < \dots < i_r} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \frac{\partial \alpha_{i_0 \dots \check{i}_k \dots i_r}(x)}{\partial x^{i_k}} \times \\ \times dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \tag{94}$$

Die Eindeutigkeit von d folgt aus (94).

Eine Form α mit $d\alpha = 0$ heisst <u>geschlossen</u>; eine Form α mit $\alpha = d\beta$ heisst <u>exakt</u>. Da $d^2 = 0$, ist eine exakte Form automatisch geschlossen.

<u>Poincaré Lemma.</u> Sei U sternförmig und α so, dass $d(\alpha|_U) = 0$. Dann gibt es eine Form β so, dass

$$\alpha|_U = d\beta|_U.$$

Um Einzelheiten in den Beweisen von Satz 6 und des Poincaré Lemmas zu klären, benütze man die

Existenz von Zerlegungen der 1 auf M.

Sei $G^k \subset \Omega^k(M)$ der Unterraum der geschlossen k-Formen. Wir definieren

$$H^k(M,\mathbb{R}) := G^k / d\Omega^{k-1}(M), \qquad (95)$$

(k^{te} Kohomologiegruppe mit reellen Koeffizienten).

Für $\alpha \in H^k$, $\beta \in H^l$ ist dann $\alpha \wedge \beta \in H^{k+l}$, (mit $H^k = \{0\}$, für $k > n$). Daher ist

$$H^*(M,\mathbb{R}) := \bigoplus_{k=0}^{n} H^k(M,\mathbb{R})$$

eine assoziative Algebra bez. der Mult. $\wedge$.

Die Kohomologiegruppen H^k sind "topologische Invarianten" von M; insb. sind die sog. Betti Zahlen $b_k := \dim H^k(M,\mathbb{R})$ topologische Invarianten.

Eine Schlüsseleigenschaft von d ist ihr Verhalten unter glatten Abbildungen $\varphi : M \to N$: Sei α eine Form auf N. Wir definieren den <u>"Pull back"</u>, $\varphi^*\alpha$, von α durch

$$\varphi^*\alpha(x) = \alpha(\varphi(x)), \quad x \in M, \qquad (96)$$

mit

$$\alpha(\varphi(x)) := \frac{1}{r!} \sum_{i_1,\dots,i_r} \alpha_{i_1\dots i_r}(\varphi(x)) \frac{\partial\varphi^{i_1}(x)}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial\varphi^{i_r}(x)}{\partial x^{j_r}} \times$$

$$\times\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r},$$

mit lokalen Koordinaten $y^i = \varphi^i(x)$, $i = 1, \dots, p = \dim N$, auf N. Wenn $\alpha \in \Omega^r(N)$, dann ist $\varphi^*\alpha \in \Omega^r(M)$, und man schliesst aus (94) und (96), dass

$$d\varphi^*\alpha = \varphi^* d\alpha, \quad \forall\, \alpha \in \Omega^*(N). \tag{97}$$

<u>Beweis:</u> Übungen; (man benütze, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} = 0$).

<u>Manifest invariante Definition von d.</u>

Sei $\alpha \in \Omega^r(M)$, $X_1, \dots, X_{r+1} \in \mathcal{T}(M)$. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{1 \le i \le r+1} (-1)^{i+1} X_i\, \alpha(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{r+1}) \end{aligned} \tag{98}$$

Dies ist ein Korollar von Satz 6; (benütze lokale Koordinaten). – Beispiel: Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$; dann ist

$$\begin{aligned} d\alpha(X,Y) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial_j \alpha_i (X^j Y^i - X^i Y^j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \{X(\alpha_i)Y^i - Y(\alpha_i)X^i\} \\ &= X(\alpha(Y)) - \sum_i \alpha_i X(Y^i) - Y(\alpha(X)) \\ &\qquad + \sum_i \alpha_i Y(X^i) \\ &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]). \end{aligned}$$

<u>Korollar 7.</u>

(i) $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$

(ii) $dL_X = L_X d$.

Bemerke, dass (ii) unmittelbar aus (i) und $d^2 = 0$ folgt. Wir beweisen (i) im Spezialfall von 1-Formen: Es sei $\alpha \in \Omega^1(M)$. Dann ist (siehe (91)):

$$(L_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X,Y]).$$

Weiter ist

$$d i_X\alpha(Y) = \langle d i_X\alpha, Y\rangle = Y(\alpha(X)) \tag{99}$$

und wegen (98)

$$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]);$$

daher

$$(i_X d\alpha)(Y) \overset{(94)}{=} d\alpha(X,Y)$$
$$\overset{(98)}{=} X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]).$$

Addieren wir diese Gl. zu (99), so finden wir:

$$d i_X \alpha(Y) + (i_X d\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X,Y])$$
$$= (L_X \alpha)(Y).$$

(7) <u>Hodge $*$ und Kodifferential δ</u>

Ein Atlas einer differenzierbaren Mf. M ist orientiert, falls für jedes Paar, $(\varphi, U), (\psi, V)$, von Karten im Atlas die Jacobi Determinante der Koordinatentransformation $\psi \circ \varphi^{-1}$ <u>positiv</u> ist. M ist <u>orientierbar</u>, falls M einen orientierten Atlas besitzt. Zwei Atlanten, A_1 und A_2, von M haben die gleich Orientierung, falls $A_1 \cup A_2$ orientiert ist. Eine Äquivalenzklasse orientierter Atlanten definiert eine Orientierung von M. Eine orientierbare Mf. M mit einer konkreten Wahl von Orientierung heisst orientiert.

<u>Satz 8.</u> Es sei M eine n-dim. orientierbare Mf.. Dann gibt es auf M eine glatte n-Form, die nirgends verschwindet, und umgekehrt.

Eine n-Form, ω, wie in Satz 8 heisst <u>Volumenform</u>

Sei M eine (pseudo-) Riemannsche Mf. mit Metrik $g = (g_{ik}(\cdot))$. In lokalen Koordinaten definieren wir

$$g(x) := \det\left(g_{ik}(x)\right), \tag{100}$$

mit $g(x) \neq 0$, da g nicht entartet ist. Man verifiziert nun leicht, dass

$$dvol := \sqrt{|g(x)|}\; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{101}$$

eine Volumenform auf M definiert; (Übung!)

Es sei ω eine r-Form auf M. In lokalen Koordinaten, $x^1, \ldots, x^n$:

$$\omega(x) = \frac{1}{r!}\; \omega_{i_1 \cdots i_r}(x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

und

$$dvol(x) = \frac{1}{n!} \sqrt{|g(x)|}\; \varepsilon_{i_1 \cdots i_n}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n},$$

(Summationskonvention!), wo $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} = \operatorname{sig}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$.

Wir definieren

$$(*\omega)_{j_1\cdots j_{n-r}} := \frac{1}{r!}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{n-r}}\,\omega^{i_1\cdots i_r}, \qquad (102)$$

wo

$$\omega^{i_1\cdots i_r}(x) := g^{i_1 k_1}(x)\cdots g^{i_r k_r}(x)\,\omega_{k_1\cdots k_r}(x), \qquad (103)$$

und $(g^{ij}(x))$ die Inverse von $(g_{ij}(x))$ ist.

Für α, β in $\Omega^r(M)$ folgt, dass

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \alpha, \beta \rangle\, dvol, \qquad (104)$$

wo

$$\langle \alpha, \beta\rangle(x) := \frac{1}{r!}\,\alpha_{i_1\cdots i_r}(x)\,\beta^{i_1\cdots i_r}(x)$$

das von $(g_{ij}(x))$ bestimmte Skalarprodukt auf $\Lambda^r_x M$ ist. Für $\alpha \in \Omega^r(M)$ kann man daher $*\alpha$ auch durch die Gl.

$$\langle *\alpha, \beta\rangle := \langle \beta \wedge \alpha, dvol\rangle, \quad \forall \beta \in \Omega^{n-r}(M)$$

definieren.

Definition des Kodifferentials, δ.

Das Kodifferential, δ, ist eine Abbildung

$$\delta : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r-1}(M),$$

die durch

$$\delta := sig(g)\,(-1)^{nr+n} * d * \qquad (105)$$

definiert ist. Da

$$*(*\alpha) = (-1)^{r(n-r)} \, sig(g)\, \alpha, \tag{106}$$

$\forall\, \alpha \in \Omega^r(M)$, folgt, dass

$$\delta^2 = (-1)^{r(n-r)-n} * d^2 * = 0.$$

Wenn $U \subseteq M$ sternförmig ist, so folgt nun mit Hilfe des Poincaré Lemmas, dass

$$\delta\alpha/_U = 0 \implies \alpha/_U = \delta\beta/_U .$$

In lokalen Koordinaten gilt

$$(\delta\alpha)_{i_1 \cdots i_{r-1}} = |g|^{-1/2} \partial_k \left(|g|^{1/2} \alpha^k{}_{i_1 \cdots i_{r-1}} \right), \tag{107}$$

wo $\alpha^k{}_{i_1 \cdots i_{r-1}} = g^{kl} \alpha_{l\, i_1 \cdots i_{r-1}}$. Man kann daher δ auch durch

$$\langle \alpha, d\beta \rangle = - \langle \delta\alpha, \beta \rangle, \tag{108}$$

$\alpha \in \Omega^r(M)$, $\beta \in \Omega^{r-1}(M)$, und

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle := \int_M \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle (x)\, dvol_x ,$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^r(M)$, definieren.

Ein Diffeo $\varphi : M \longrightarrow M$ heisst <u>Isometrie</u>, wenn

$$\varphi^* g = g, \quad g \text{ eine Metrik},$$

gilt; (Übung: Wie ist $\varphi^* g$ definiert? Antwort:

$$(\varphi^* g)(X,Y) = g(\varphi_* X, \varphi_* Y), \quad X, Y \text{ in } \mathcal{T}(M),$$

wo $\varphi_* X$ der "push forward" von X ist.) Wenn φ eine Isometrie von M ist, dann gilt

$$* \varphi^* \alpha = \varphi^*(* \alpha), \text{ und } \varphi^* \delta \alpha = \delta \varphi^* \alpha. \qquad (109)$$

Integration von r-Formen über r-dim. Untermannigfaltigkeiten von M

Sei M eine orientierte, glatte n-dim. Mf., und N eine orientierte, glatte r-dim. Untermannigfaltigkeit von M. Auf offenen Teilmengen, U, von M, die N schneiden, kann man für N eine Parameterdarstellung wählen: Seien $x^1, \dots, x^n$ Koordinaten auf U. Ein Punkt $x = (x^1, \dots, x^n) \in U$ liegt in N, falls

$$x^i = \psi^i(s^1, \dots, s^r), \quad i = 1, \dots, n,$$

wo $s = (s^1, \dots, s^r)$ in einer offenen Teilmenge, V, von $\mathbb{R}^r$ liegt. Sei nun α eine r-Form. Wir definieren

$$\int_{N \cap U} \alpha := \int_V \alpha_{i_1 \cdots i_r}(\psi(s)) \frac{\partial \psi^{i_1}(s)}{\partial s^1} \cdots \frac{\partial \psi^{i_r}(s)}{\partial s^r} \times$$

$$\times \, ds^1 \dots ds^r$$

total antisymm. in $i_1, \dots, i_r$!

$$= \sum_{i_1<\dots<i_r} \int_V \alpha_{i_1\dots i_r}(\psi(s)) \det\left(\frac{\partial \psi^{i_k}(s)}{\partial s^l}\right) ds^1 \dots ds^r. \tag{110}$$

Diese Definition ist offensichtlich <u>unabhängig</u> von der gewählten Parametrisierung von $N \cap U$. Denn, sei

$$s = \phi(\tilde{s}), \quad \tilde{s} = (\tilde{s}^1, \dots, \tilde{s}^r) \in \tilde{V} \subset \mathbb{R}^r,$$

dann gilt, dass

$$\int_{N\cap U} \alpha = \sum_{i_1<\dots<i_r} \int_V \alpha_{i_1\dots i_r}(\psi(s)) \det\left(\frac{\partial \psi^{i_k}(s)}{\partial s^l}\right) ds^1 \dots ds^r$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_r} \int_{\tilde{V}} \alpha_{i_1\dots i_r}(\psi(\phi(\tilde{s}))) \det\left(\frac{\partial \psi^{i_k}(\phi(\tilde{s}))}{\partial s^l}\right) \times$$

$$\times \det\left(\frac{\partial \phi^p(\tilde{s})}{\partial \tilde{s}^q}\right) d\tilde{s}^1 \dots d\tilde{s}^r$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_r} \int_{\tilde{V}} \alpha_{i_1\dots i_r}(\psi(\phi(\tilde{s}))) \det\left(\frac{\partial \psi^{i_k}(\phi(\tilde{s}))}{\partial \tilde{s}^l}\right) \times$$

$$\times\, d\tilde{s}^1 \dots d\tilde{s}^r,$$

wo wir $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ benützt haben.

Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen so, dass $\bigcup_{i\in I} N \cap U_i = N$, und sei $\{h_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen so, dass $\operatorname{supp} h_i \subseteq U_i$, $\forall i \in I$, und $\sum_{i\in I} h_i(x) = 1$, $\forall x \in N$. Dann definieren wir

$$\int_N \alpha := \sum_{i \in I} \int_{N \cap U_i} h_i \alpha .$$

Eigenschaften des Integrals.

(1) $\int_N (\cdot)$ ist $\mathbb{R}$-linear

(2) Sei $\varphi : N \to \tilde{N}$ ein orientierungserhaltender Diffeo. von $N \subset M$ auf $\tilde{N} \subset \tilde{M}$. Dann gilt

$$\int_N \varphi^* \alpha = \int_{\tilde{N}} \alpha ,$$

für $\alpha \in \Omega^r(\tilde{M})$; $(r = \dim N = \dim \tilde{N})$.

(3) Ändert man die Orientierung von N, so multipliziert sich $\int_N \alpha$ mit (-1).

Die Sätze von Stokes und Gauss.

Sei D eine offene, orientierte r-dim. Untermannigfaltigkeit von M mit kompaktem Abschluss, $\bar{D}$, und einem Rand, ∂D, der aus einer Vereinigung glatter, $(r-1)$-dim. Untermannigfaltigkeiten von M besteht. Diese sind dann automatisch orientierbar, und eine Orientierung von D induziert eine Orientierung auf ∂D.

Sei nun α eine glatte $(r-1)$-Form auf M. Dann gilt der

Satz von Stokes.

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha . \qquad (111)$$

Sei ω eine Volumenform auf M und X ein glattes VF auf M. Wir definieren $\operatorname{div}_\omega X$ durch

$$L_X \omega =: (\operatorname{div}_\omega X)\, \omega \qquad (112)$$

Da $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ (Korollar 7!) und $d\omega = 0$, da ω eine n-Form ($n = \dim M$) ist, folgt

$$(\operatorname{div}_\omega X)\, \omega = d\, i_X \omega , \qquad (113)$$

und der Satz von Stokes impliziert den

Satz von Gauss.

Sei M orientiert, ω eine Volumenform auf M, $D \subset M$ eine offene Teilmenge von M mit der Eigenschaft, dass ∂D aus einer endlichen Vereinigung glatter Untermf. von M besteht. Dann gilt, dass

$$\int_D (\operatorname{div}_\omega X)\, \omega = \int_{\partial D} i_X \omega \qquad (114)$$

Wenn $\omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (in lokalen Koordinaten), dann finden wir, dass

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{div}_\omega X)\,\omega = L_X \omega &= d(i_X \omega) \\
&= d\left(\sqrt{|g|}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i X^i\, dx^1\wedge\dots\wedge \check{dx^i}\wedge\dots\wedge dx^n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\,X^i\right) dx^1\wedge\dots\wedge dx^i\wedge\dots\wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\,X^i\right)\omega,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\mathrm{div}_\omega X = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\,X^i\right) \tag{115}
$$

Man zeigt nun leicht, dass

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_\omega (f X) &= X(f) + f\, \mathrm{div}_\omega X, \\
\mathrm{div}_{f\omega} (X) &= \mathrm{div}_\omega X + \frac{1}{f} X(f), \\
i_X \omega &= * \xi, \quad \text{falls } \omega = \sqrt{|g|}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n,
\end{aligned}
$$

mit $f \in C^\infty(M)$ $(f(x) \neq 0, \forall x)$, $\xi = \xi_i\, dx^i$, wo $\xi_i(x) = g_{ij}(x) X^j(x)$. Aus der dritten Gl. folgt dann, dass

$$
(\mathrm{div}_\omega X)\,\omega = d(i_X\omega) = d * \xi, \quad \text{d.h.}
$$

$$
\mathrm{div}_\omega X = \delta\xi, \tag{116}
$$

für $\omega = \sqrt{|g|}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$.

Laplace Operator und Hodge Zerlegung

Der Laplace – de Rham – Hodge Operator, Δ, auf $\Omega^*(M)$ ist durch

$$\Delta = d\delta + \delta d \tag{117}$$

definiert. Eine Form $\alpha \in \Omega^*(M)$ heisst <u>harmonisch</u>, falls

$$\Delta \alpha = 0.$$

Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik $g = (g_{ij}(\cdot))$. Die Metrik g bestimmt ein positiv-definites Skalarprodukt auf $\Omega^*(M)$: Für α, β in $\Omega^*(M)$ definieren wir

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle := & \int_M \alpha \wedge * \beta \\ = & \sum_{r=0}^{n} \int_M \alpha_{i_1 \cdots i_r}(x) g^{i_1 j_1}(x) \cdots g^{i_r j_r}(x) \times \\ & \times \beta_{j_1 \cdots j_r}(x) \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned} \tag{118}$$

Dann ist $\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0$, $\forall \alpha \in \Omega^*(M)$, $= 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Sei α harmonisch. Dann ist $\Delta\alpha = 0$ und daher

$$0 = \langle \alpha, \Delta \alpha \rangle = \langle \alpha, d\delta\alpha \rangle + \langle \alpha, \delta d \alpha \rangle$$

$$= -\underbrace{\langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle}_{\geq 0} - \underbrace{\langle d\alpha, d\alpha \rangle}_{\geq 0}$$

Es folgt, dass

$$d\alpha = \delta\alpha = 0 . \qquad (119)$$

Umgekehrt folgt aus (119), dass $\Delta\alpha = 0$.

<u>Satz 9.</u> Sei (M, g) eine Riemannsche Mf. Eine Form $\alpha \in \Omega^r(M)$ kann eindeutig in

$$\alpha = d\beta + \delta\gamma + \nu , \qquad (120)$$

$\beta \in \Omega^{r-1}(M)$, $\gamma \in \Omega^{r+1}(M)$, $\nu \in \Omega^r(M)$ harmonisch, zerlegt werden; ("Hodge Zerlegung").

<u>Beweis.</u> $d\Omega^{r-1}(M)$ bildet einen Unterraum von $\Omega^r(M)$. Sei $\alpha \in \Omega^r(M)$ orthogonal zu $d\Omega^{r-1}(M)$ im Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (siehe (118)). Dann gilt

$$\langle \alpha, d\beta \rangle = 0 , \quad \forall \beta \in \Omega^{r-1}(M) ,$$

also
$$\langle \delta\alpha, \beta \rangle = 0 , \quad \forall \beta \in \Omega^{r-1}(M) ,$$

daher
$$\delta\alpha = 0 .$$

Sei nun $\gamma \in \Omega^{r+1}(M)$. Dann ist $\delta\gamma \in \left(d\Omega^{r-1}(M)\right)^{\perp}$.

Denn
$$\langle \delta\gamma, d\beta \rangle = \pm \langle \gamma, d^2\beta \rangle = 0 , \quad \forall \beta \in \Omega^{r-1}(M) .$$

Wir können daher $\Omega^r(M)$ wie folgt in orthogonale Unterräume zerlegen:

$$\Omega^r(M) = d\Omega^{r-1}(M) \oplus \left(\delta\Omega^{r+1}(M) \oplus \mathcal{H}^r(M)\right).$$

Für $\nu \in \mathcal{H}^r(M)$ gilt offenbar:

$$\langle \nu, d\beta \rangle = 0, \quad \forall \beta \in \Omega^{r-1}(M),$$

also $\delta\nu = 0$, und

$$\langle \nu, \delta\gamma \rangle = 0, \quad \forall \gamma \in \Omega^{r+1}(M),$$

also

$$d\nu = 0.$$

- Mit (117) folgt, dass ν harmonisch ist. Umgekehrt erfüllt jede harmonische Form ν die Gln. $d\nu = 0 = \delta\nu$; (siehe (119)), d.h. $\mathcal{H}^r(M)$ ist der Raum der harmon. r-Formen.

  Damit ist Satz 9 bewiesen.

  Nun überlegt man sich, dass

$$\mathcal{H}^r(M) \cong H^r(M, \mathbb{R}). \tag{121}$$

- Sei α eine geschlossene r-Form, d.h. $d\alpha = 0$,

  Dann ist

$$[\alpha] := \left\{ \alpha + d\mu \,\middle|\, \mu \in \Omega^{r-1}(M) \right\} \in H^r(M, \mathbb{R}).$$

Wir behaupten, dass es eine Form $\nu \in [\alpha]$ gibt, die <u>harmonisch</u> ist: $\nu = \alpha + d\mu$ erfüllt automatisch die Gl. $d\nu = 0$, da α geschlossen ist.

Nun gälte $\quad \delta\nu = \delta\alpha + \delta d\mu = 0,$