

Übung 1. Bound states and the cross section

Lernziel: The scattering phase is a result of the properties of the scattering potential. Here we remind ourselves about it and rederive a simple formula from the script.

Reread chapter 6.4.3, Analyticity of $s_l(E)$, in the script and make sure you understand it.

(a) Derive the following equation for the scattering phase:

$$s_l = 1 + \frac{2i}{\cot(\delta_l) - i} \quad (1)$$

Lösung This is a simple exercise in trigonometry. We start with the definition of the scattering phase and work our way through:

$$s_l = e^{2i\delta_l} \quad (L.1)$$

$$= 1 - 1 + e^{2i\delta_l} \quad (L.2)$$

$$= 1 + e^{i\delta_l}(e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}) \quad (L.3)$$

$$= 1 + 2ie^{i\delta_l} \sin(\delta_l) \quad (L.4)$$

$$= 1 + 2i \frac{\sin(\delta_l)}{\cos(\delta_l) - i \sin(\delta_l)} \quad (L.5)$$

$$= 1 + \frac{2i}{\cot(\delta_l) - i} \quad (L.6)$$

Übung 2. Geometrical interpretation of the scattering length

Lernziel: In class we have calculated the scattering length, here we will familiarise ourselves with it. There is a very simple geometric interpretation of the scattering length in terms of the wavefunction which we will investigate.

Consider a finite spherically symmetric potential, meaning that $V = 0$ for $r > r_0$ and $V(\mathbf{r}) \equiv V(r)$. In class we defined the parameter α as a short hand when dealing with boundary conditions of this kind of potentials:

$$\alpha_l = \frac{1}{R_l} \left. \frac{\partial R_l}{\partial r} \right|_{r_0}. \quad (2)$$

Here $R_l = u_l/r$ is the radial wavefunction and r_0 is the range of the potential. We have also seen that the scattering length is then given by:

$$-\frac{1}{a} = \lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0 = \lim_{k \rightarrow 0} k \left. \frac{(\partial_r - \alpha_0)n_0(kr)}{(\partial_r - \alpha_0)j_0(kr)} \right|_{r_0}. \quad (3)$$

With j_l and n_l the spherical Bessel functions.

(a) Show that this is equivalent to writing

$$-\frac{1}{a} = \lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0 = \lim_{k \rightarrow 0} k \left. \frac{(\partial_r - \gamma_0)rn_0(kr)}{(\partial_r - \gamma_0)rj_0(kr)} \right|_{r_0} \quad (4)$$

where

$$\gamma_l = \frac{1}{u_l} \left. \frac{\partial u_l}{\partial r} \right|_{r_0}. \quad (5)$$

(b) In the limit $x \rightarrow 0$ the spherical Bessel functions are given by

$$j_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!} \quad (6)$$

$$n_l(x) = -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}. \quad (7)$$

Use these approximations to find a geometrical interpretation for the scattering length in terms of u .

Lösung

(a) We begin by writing γ_l in terms of α_l :

$$\gamma_l = \partial_r \ln u_l \Big|_{r_0} = \partial_r \ln r R_l \Big|_{r_0} = \frac{1}{r_0} + \partial_r \ln R_l \Big|_{r_0} = \frac{1}{r_0} + \alpha_l. \quad (L.7)$$

We may then plug this into the given expression for a :

$$-\frac{1}{a} = \lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0 \quad (L.8)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} k \frac{(\partial_r - 1/r - \alpha_0) r n_0(kr) \Big|_{r_0}}{(\partial_r - 1/r - \alpha_0) r j_0(kr) \Big|_{r_0}} \quad (L.9)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} k \frac{(1 + r \partial_r - 1 - r \alpha_0) n_0(kr) \Big|_{r_0}}{(1 + r \partial_r - 1 - r \alpha_0) j_0(kr) \Big|_{r_0}} \quad (L.10)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0 = \lim_{k \rightarrow 0} k \frac{(\partial_r - \alpha_0) n_0(kr) \Big|_{r_0}}{(\partial_r - \alpha_0) j_0(kr) \Big|_{r_0}} \quad (L.11)$$

$$= -\frac{1}{a} \quad (L.12)$$

Thus we have shown that the expressions in terms of α and γ are in fact equivalent.

(b) Next we use the expressions for the spherical Bessel functions

$$j_0(x) \approx 1, \quad n_0(x) \approx -1/x \quad (L.13)$$

in the expression for the scattering length (4). We then obtain

$$r_0 - a = \gamma_0^{-1} = \frac{u_0}{\partial_r u_0} \quad (L.14)$$

This has a nice geometrical interpretation, the intercept on the r axis of the asymptotic behaviour of u is the scattering length.

Übung 3. Streulängen

Lernziel: Die ganze Streuphysik bei niedrigen Energien lässt sich durch eine einzige Grösse, die Streulänge a , beschreiben. Der Nutzen dieser Einparameterbeschreibung wird ersichtlich, wenn man erkennt, dass sich ein beliebiges Streupotential $V(r)$ durch ein (universelles) effektives Potential $V_{\text{eff}}(a, r)$ beschreiben lässt.

Wir betrachten in dieser Aufgabe Streuung von Wellenfunktionen mit kleiner Energie ($k \rightarrow 0$) an einem Potential $V(r)$. In diesem Zusammenhang wird oft eine Streulänge a wie folgt definiert

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cot(\delta_0) = -\frac{1}{a}, \quad (8)$$

wobei δ_0 die Streuphase für s -Wellen Streuung ist.

- (a) Zeige, dass für das Potential einer harten Kugel mit Radius r_0 (c.f. Aufg. 2 Übungsblatt 10) $a = r_0$ gilt.
- (b) Zeige dass im Limes kleiner Energien der totale Wirkungsquerschnitt gegeben ist durch $\sigma = 4\pi a^2$.
- (c) Argumentiere anhand von (6.58) das $a > 0$ ($a < 0$) für ein schwach repulsives (attraktives) Potential gilt. Zeige, dass a gleich der Nullstelle der asymptotischen Funktion $u^\infty \sim (\sin(kr) + \tan(\delta_0) \cos(kr))/k$ im Limes $k \rightarrow 0$ ist, und skizziere u und u^∞ für ein schwach attraktives und repulsives Potential.
- (d) Ähnlich wie man in der Elektrostatik beliebige Ladungsverteilungen durch eine Punktladung ersetzen kann, falls man weit genug weg ist, wollen wir auch hier zeigen, dass man ein beliebiges Potential V durch ein Pseudopotential V_{eff} ersetzen kann, falls die Energie des gestreuten Teilchens klein genug ist. Zeige, dass dieses Potential für $k \rightarrow 0$ gegeben ist durch

$$V_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2 a}{2m} 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}) \partial_r r, \quad (9)$$

was in diesem Limes äquivalent zur Streuung an einer harten Kugel mit Radius a ist.

Lösung

- (a) From exercise 2 on sheet 10 we know that s -wave phase shift for the scattering from a hard sphere of radius r_0 is given by $\delta_0 = -kr_0$. Hence

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cot(\delta_0) = -\frac{1}{r_0} = -\frac{1}{a}, \quad \Rightarrow \quad a = r_0 \quad (L.15)$$

- (b) From the script we know that for the low energies scattering the partial cross section behaves as $\sigma_l \sim k^{4l}$ (cf. section 6.4.4 of the script). Hence the main contribution into the total cross section comes from the s -wave scattering, and

$$\sigma \approx \sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(\delta_0) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 4\pi a^2. \quad (L.16)$$

Above we used eq. (6.58) of the script.

- (c) The radial part of the wavefunction outside the scattering region has the following asymptotic behavior (cf. eq. (6.55) of the script):

$$R_0^\infty(r) \sim e^{i\delta_0} j_0(kr + \delta_0). \quad (L.17)$$

From this we can check the asymptotic behavior of $u(r)$ given in the exercise sheet:

$$u^\infty(r) = r R_0^\infty(r) \quad (L.18)$$

$$\sim r e^{i\delta_0} j_0(kr + \delta_0) = \frac{r}{\delta_0 + kr} \left(\sin(kr) + \frac{1}{\cot(\delta_0) - i} \right) \quad (L.19)$$

$$\sim (\sin(kr) + \tan(\delta_0) \cos(kr))/k. \quad (L.20)$$

At small energies ($k \cong 0$) we have

$$u^\infty(r) \sim r + \frac{1}{k \cot(\delta_0)} = r - a. \quad (\text{L.21})$$

This can be understood as the infinitely long wavelength limit of the wavefunction outside the scattering region (L.18). Note that a is the intercept of the asymptotic wavefunction. Hence the root of the asymptotic wavefunction is the scattering length a .

In the case of an attractive (repulsive) potential $V < 0$ ($V > 0$) the wavefunction is “pulled” (“pushed”) by the scattering region. Due to the constraint $u(r=0) = 0$ it follows from the last statement that $a < 0$ ($a > 0$) for $V < 0$ ($V > 0$) (see Fig. 1).

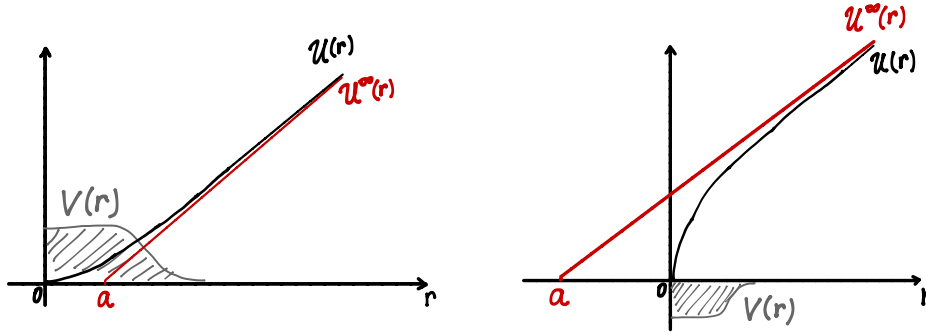


Abbildung 1: The sketch of the function $u(r)$ and $u^\infty(r)$ for repulsive and attractive potentials.

- (d) Above we learned that $u^\infty(r) \sim (r - a)$. Hence the wavefunction has the asymptotic form

$$R_0^\infty(r) = \chi \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad (\text{L.22})$$

where χ is a constant and it can be determined by $\chi = \partial_r(rR_0^\infty(r))$. Since we are interested in the asymptotic behavior of the wavefunction, we want to find an effective potential, which gives the same asymptotic form. In the limit $k \rightarrow 0$ the equation for the radial part of the wavefunction for a given potential $V_{\text{eff}}(r)$ has the following form

$$[\vec{\nabla}^2 + k^2]R_0(r) \approx \vec{\nabla}^2 R_0(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V_{\text{eff}}(r) R_0(r). \quad (\text{L.23})$$

Using $\vec{\nabla}^2(1/r) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$, we can write the following equation for $R_0^\infty(r)$

$$\vec{\nabla}^2 R_0^\infty(r) = 4\pi\chi a \delta^{(3)}(\vec{r}) = 4\pi a \delta^{(3)}(\vec{r}) \partial_r(rR_0^\infty(r)) \quad (\text{L.24})$$

Comparing Eq. (L.24) with (L.23), we find for the potential which gives $R_0^\infty(r)$ as a solution

$$V_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2 a}{2m} 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}) \partial_r r. \quad (\text{L.25})$$

Übung 4. Streulänge für den sphärischen Potentialtopf

Lernziel: Die niederenergetische Streuphysik eines sphärischen Potentialtopfes kann exakt gelöst werden. Dabei stellt sich heraus, dass das attraktive Potential meistens repulsiv wirkt, d.h. ein Streuzustand wird durch die gebundenen Zustände im Topf abgestossen. Nur für präzise gewählte Potentialtiefen (kurz bevor ein neuer Zustand gebunden wird) wirkt das Potential attraktiv.

Wir betrachten einen sphärischen (3D) Potentialtopf der Tiefe $V_0 < 0$ und mit Radius r_0

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (10)$$

Die Stärke des Potential ist durch die dimensionslose Grösse $\chi_0 = \text{sgn}(V_0)\sqrt{2m|V_0|r_0^2}/\hbar$ parametrisiert. Wir wollen die niederenergetischen Streuzustände dieses Potentials charakterisieren. Dazu untersuchen wir das Verhalten der Streulänge $a(\chi_0)$ in Abhängigkeit der Potentialstärke.

- (a) Wie verhält sich die Streulänge falls der Topf einen gebundenen Zustand nahe bei $E = 0$ besitzt? Berechne a und zeige wie sich die Streulänge in diesem Fall mit der Bindungsenergie in Verbindung bringen lässt.
- (b) Die Streulänge $a(\chi_0)$ lässt sich für jede Stärke dieses Potentials exakt berechnen. Bestimme $a(\chi_0)$ und erweitere das Resultat für einen abstossenden Potentialtopf $V_0 > 0$.

Lösung Aus Aufgabe 3 wissen wir, dass das Vorzeichen (positiv / negativ) der Streulänge den Charakter (repulsiv / attraktiv) des Streuzentrums für den Bereich niedriger Energien bestimmt. Für einen Potentialtopf der Tiefe $V_0 < 0$ wollen wir deshalb die Streulänge berechnen. Wir betrachten deshalb nur den ($l = 0$)-Sektor und finden mit $R_0(r) = u(r)/r$

$$u(r) \propto \begin{cases} \sin(kr + \delta_0) & r > r_0 \\ \sin(\tilde{k}r) & r < r_0, \end{cases} \quad (L.26)$$

wobei $\tilde{k}^2 = k^2 + 2m|V_0|/\hbar^2$. Die Randbedingung $\partial_r \ln u(r_0^-) = \partial_r \ln u(r_0^+)$ bei r_0 liefert uns dann

$$k \cot(kr_0 + \delta_0) = \tilde{k} \cot(\tilde{k}r_0) \quad (L.27)$$

- (a) Aus der Berechnung der gebundenen Zustände [siehe Skript Gl. (5.33) und (5.35)] folgt, dass ein neuer gebundener Zustand auftaucht wenn $2mr_0^2|V_0|/\hbar^2 = \pi^2(n + 1/2)^2$ (mit $n \in \mathbb{N}$). Diese Bedingung nimmt mit dem dimensionslosen Parameter $\chi_0 = \text{sgn}(V_0)\sqrt{2m|V_0|r_0^2}/\hbar$ die einfache Form $\chi_0 = -(\pi/2)(2n + 1)$. Für Potentialtiefen (mit $0 < \epsilon \ll 1$)

$$V_0 = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} [(\pi/2)^2(2n + 1)^2](1 + \epsilon) \quad \chi_0 = -(\pi/2)(2n + 1)\sqrt{1 + \epsilon} \quad (L.28)$$

ist ein gebundener Zustand nahe bei $E = 0$. Für kleinen kr_0 und ϵ ergibt Gl. (L.27)

$$k \cot(\delta_0) = -\frac{\pi^2(2n + 1)^2}{8r_0} \epsilon + \mathcal{O}(k^2). \quad (L.29)$$

Daraus folgt sofort für die Streulänge

$$a = \frac{8r_0}{\pi(2n + 1)^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (L.30)$$

Jedes Mal wenn ein gebundener Zustand bei $E = 0$ auftaucht divergiert die Streulänge wie ϵ^{-1} . Der Potentialtopf ist in diesem Fall extrem repulsiv ($a/r_0 \gg 1$). Diese Singularität wird für grosse n immer schärfer wegen dem Faktor $(2n + 1)^{-2}$. Bemerke, dass das Ergebnis auch für $\epsilon < 0$ gültig ist, d.h. kurz bevor ein neuer Zustand im Topf gebunden wird ist das Potential extrem attraktiv ($-a/r_0 \gg 1$).

(b) Wir können Gleichung (L.27) auch exakt lösen. Dazu schreiben wir

$$\delta_0 + kr_0 = \arctan(k \tan(\tilde{k}r_0)/\tilde{k}) \quad (\text{L.31})$$

und finden

$$a = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan(\delta_0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \tan\left(kr_0 - \arctan\left[kr_0 \frac{\tan(\chi_0)}{\chi_0}\right]\right)/k = r_0\left(1 - \frac{\tan \chi_0}{\chi_0}\right) \quad (\text{L.32})$$

Weg von den Divergenzen des Tangenz strebt $\tan(\chi_0)/\chi_0$ gegen Null. Der attraktive Potentialtopf verhält sich also hauptsächlich repulsiv mit $a = r_0$. Für die repulsive Barriere $V_0 > 0$ erhalten wir durch die Substitution $\tilde{k} \rightarrow i\tilde{k}$ und $\chi_0 = -\chi_0$

$$a = r_0\left(1 - \frac{\tanh \chi_0}{\chi_0}\right) \quad (\text{L.33})$$

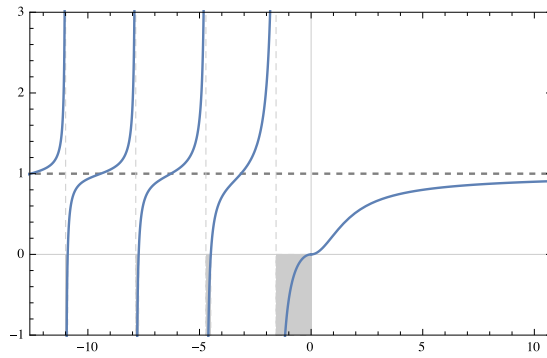


Abbildung 2: Graphische Darstellung der Streulänge a/r_0 als Funktion des Parameters $\chi_0 \propto \sqrt{V_0}$. Der Topf ($\chi_0 < 0$) ist effektiv repulsiv, ausser in den grauen Bereichen. Für $-\chi_0 \gg 1$ (weg von den $-\pi(n + 1/2)$) verhält sich das attraktive Potential wie eine harte repulsive Kugel. Die Streulänge der repulsiven Kugel steigt gegen den Wert r_0 einer harten Kugel [siehe Gl. (L.15)]