

Übung 1. Der Aharonov-Bohm-Effekt

- (a) Im Gebiet G verschwindet das Magnetfeld, somit kann dort das Vektorpotential als Gradientenfeld $\mathbf{A} = \nabla\Lambda$ geschrieben werden mit

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}). \quad (\text{L.1})$$

Die Wellenfunktion ψ_B findet man aus

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi_B = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_B. \quad (\text{L.2})$$

Nach einer Eichtransformation mit $\chi = -\Lambda$ folgt $\mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla(-\Lambda) = 0$ und diese Gleichung lautet

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 \tilde{\psi}_B = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_B, \quad (\text{L.3})$$

wobei $\tilde{\psi}_B = \psi_B \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}(-\Lambda)\right)$.

Dies ist aber genau die Gleichung für das ausgeschaltete Magnetfeld

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 \psi_0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0. \quad (\text{L.4})$$

Daher folgt, dass

$$\psi_B(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}_B(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda\right) = \psi_0(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda\right) = \psi_0(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s})\right). \quad (\text{L.5})$$

- (b) Es seien ψ_1 und ψ_2 die Wellenfunktionen wo nur der Spalt 1 resp. der Spalt 2 geöffnet ist. Mit (a) finden wir

$$\psi_{1,B}(\mathbf{x}) = \psi_{1,0}(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_1 d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s})\right) \quad (\text{L.6})$$

$$\psi_{2,B}(\mathbf{x}) = \psi_{2,0}(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_2 d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s})\right), \quad (\text{L.7})$$

wobei die Wegintegrale 1 resp. 2 von der Quelle durch den jeweiligen Spalt nach \mathbf{x} verlaufen. Für den Fall, dass beide Spalten offen sind, bilden wir die Superposition dieser beiden Wellenfunktionen

$$\psi_B(\mathbf{x}) = \psi_{1,B}(\mathbf{x}) + \psi_{2,B}(\mathbf{x}) = \psi_{1,0}(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_1 d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s})\right) + \psi_{2,0}(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_2 d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s})\right). \quad (\text{L.8})$$

Die relative Phase der beiden Summanden ist

$$\int_1 d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}) - \int_2 d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}) = \oint d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}) = \Phi_B, \quad (\text{L.9})$$

wobei Φ_B der magnetische Fluss ist. Somit folgt

$$\psi_B(\mathbf{x}) = \left[\psi_{1,0}(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Phi_B\right) + \psi_{2,0}(\mathbf{x}) \right] \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_2 ds \cdot \mathbf{A}(s)\right) \quad (\text{L.10})$$

und daraus die Intensität des Interferenzmusters

$$I = \left[|\psi_{1,0}(\mathbf{x})|^2 + |\psi_{2,0}(\mathbf{x})|^2 + 2\text{Re} \left\{ \psi_{1,0}^*(\mathbf{x}) \psi_{2,0}(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Phi_B\right) \right\} \right], \quad (\text{L.11})$$

welche vom magnetischen Fluss durch die Ebene abhängt.

Übung 2. Algebra und Eigenschaften des Drehimpulsoperators

- (a) Der Bahndrehimpulsoperator ist definiert als $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$. Daraus folgt direkt (unter Verwendung der Summenkonvention)

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{imn} \epsilon_{jkl} [x_m p_n, x_k p_l] \quad (\text{L.12})$$

$$= \epsilon_{imn} \epsilon_{jkl} (x_m x_k [p_n, p_l] + x_m [p_n, x_k] p_l + x_k [x_m, p_l] p_n + [x_m, x_k] p_l p_n) \quad (\text{L.13})$$

$$= \epsilon_{imn} \epsilon_{jkl} (x_m \underbrace{[p_n, x_k]}_{-i\hbar\delta_{nk}} p_l + x_k \underbrace{[x_m, p_l]}_{i\hbar\delta_{ml}} p_n) \quad (\text{L.14})$$

$$= i\hbar \left(\underbrace{\epsilon_{mni} \epsilon_{mjk}}_{\delta_{nj}\delta_{ik} - \delta_{nk}\delta_{ij}} x_k p_n - \underbrace{\epsilon_{nim} \epsilon_{nlj}}_{\delta_{il}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{ml}} x_m p_l \right) \quad (\text{L.15})$$

$$= i\hbar (x_i p_j - x_k p_k \delta_{ij} - x_j p_i + x_k p_k \delta_{ij}) = i\hbar (x_i p_j - x_j p_i) \quad (\text{L.16})$$

$$= i\hbar \underbrace{(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{jr}\delta_{is})}_{\epsilon_{kij}\epsilon_{krs}} x_r p_s = i\hbar \epsilon_{ijk} \epsilon_{krs} x_r p_s = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (\text{L.17})$$

Hinweis: Diese Vertauschungsrelation ist tatsächlich die definierende Eigenschaft jedes Drehimpulsoperators, wie z.B. des Spins, der kein klassisches Analogon besitzt.

- (b)

$$[L_i, \mathbf{L}^2] = [L_i, L_k L_k] = L_k [L_i, L_k] + [L_i, L_k] L_k = i\hbar \epsilon_{ikj} L_k L_j + i\hbar \epsilon_{ikj} L_j L_k \quad (\text{L.18})$$

$$= i\hbar \epsilon_{ijk} L_j L_k + i\hbar \epsilon_{ikj} L_j L_k \quad (\text{Umbenennen der Indizes im ersten Term}) \quad (\text{L.19})$$

$$= i\hbar \epsilon_{ijk} L_j L_k - i\hbar \epsilon_{ijk} L_j L_k = 0 \quad (\text{L.20})$$

$$[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x \pm iL_y] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar \epsilon_{zxy} L_y \mp \hbar \epsilon_{zyx} L_x \hbar \quad (\text{L.21})$$

$$= \pm \hbar (L_x \pm iL_y) = \pm \hbar L_\pm \quad (\text{L.22})$$

- (c) Aus der Vorlesung sind die Eigenwerte von \mathbf{L}^2 und L_z

$$\mathbf{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \quad (\text{L.23})$$

$$L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle \quad (\text{L.24})$$

und die Wirkung der Auf- und Absteigeoperatoren L_\pm bekannt:

$$L_\pm |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle = c_\pm(l, m) |l, m \pm 1\rangle, \quad (\text{L.25})$$

wobei $c_{\pm}(l, m) \equiv \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}$.

Weiterhin folgt aus $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$, dass $L_x = (L_+ + L_-)/2$ und $L_y = (L_+ - L_-)/(2i)$.
Damit ergibt sich

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{2} \langle l, m | (L_+ + L_-) | l, m \rangle \quad (\text{L.26})$$

$$= \frac{1}{2} [\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \langle l, m | l, m+1 \rangle + \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \langle l, m | l, m-1 \rangle] \quad (\text{L.27})$$

$$= 0 \quad (\text{L.28})$$

wobei die Orthonormalität

$$\langle l', m' | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (\text{L.29})$$

verwendet wurde.

Analog folgt für $\langle L_y \rangle$:

$$\langle L_y \rangle = \frac{1}{2i} [\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \langle l, m | l, m+1 \rangle - \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \langle l, m | l, m-1 \rangle] \quad (\text{L.30})$$

$$= 0 \quad (\text{L.31})$$

Nun gilt

$$L_x^2 = \frac{(L_+ + L_-)(L_+ + L_-)}{4} \quad (\text{L.32})$$

Im Erwartungswert $\langle L_x^2 \rangle$ verschwinden wiederum die quadratische Terme der Form L_{\pm}^2 auf Grund von Gl. (L.29). Andererseits gilt für die gemischten Terme jedoch:

$$\langle L_+ L_- \rangle = c_+(l, m-1) c_-(l, m) = \hbar^2 \sqrt{[l(l+1) - m(m-1)] [l(l+1) - (m-1)m]} \quad (\text{L.33})$$

$$= c_-(l, m)^2 \quad (\text{L.34})$$

und analog

$$\langle L_- L_+ \rangle = c_-(l, m+1) c_+(l, m) = \hbar^2 \sqrt{[l(l+1) - m(m+1)] [l(l+1) - (m+1)m]} \quad (\text{L.35})$$

$$= c_+(l, m)^2 \quad (\text{L.36})$$

Damit folgt also

$$\langle L_x^2 \rangle = \frac{\langle L_- L_+ \rangle + \langle L_+ L_- \rangle}{4} = \frac{c_+(l, m)^2 + c_-(l, m)^2}{4} \quad (\text{L.37})$$

$$= \hbar^2 \frac{2l(l+1) - 2m^2}{4} = \hbar^2 \frac{l(l+1) - m^2}{2} \quad (\text{L.38})$$

und analog

$$L_y^2 = -\frac{(L_+ - L_-)(L_+ - L_-)}{4} \quad (\text{L.39})$$

also:

$$\langle L_y^2 \rangle = \frac{\langle L_+ L_- \rangle + \langle L_- L_+ \rangle}{4} = \langle L_x^2 \rangle \quad (\text{L.40})$$

Bemerkung: selbst für $m = l$ (d.h. der Drehimpuls in z -Richtung ist maximal) gilt:

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \hbar^2 \frac{l}{2} \neq 0. \quad (\text{L.41})$$

D.h. der gesamte Drehimpuls $\langle \mathbf{L}^2 \rangle$ kann *nie* einen Beitrag aus nur einer Richtung besitzen.

(d) Wie vorher gilt

$$L_x L_y = \frac{(L_+ + L_-)(L_+ - L_-)}{4i}. \quad (\text{L.42})$$

Damit überleben nur die folgenden Terme im Erwartungswert

$$\langle L_x L_y \rangle = i \frac{\langle L_+ L_- \rangle - \langle L_- L_+ \rangle}{4} = i \frac{c_-(l, m)^2 - c_+(l, m)^2}{4} = i \hbar^2 \frac{2m}{4} = \frac{1}{2} i \hbar^2 m \quad (\text{L.43})$$

Übung 3. Darstellung des Drehimpulsoperators

(a) $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} = \hat{n}_x L_x + \hat{n}_y L_y + \hat{n}_z L_z$. Mit $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ und $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$ schreiben wir

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} = \frac{\hat{n}_x}{2}(L_+ + L_-) + \frac{\hat{n}_y}{2i}(L_+ - L_-) + \hat{n}_z L_z \quad (\text{L.44})$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{n}_x - i\hat{n}_y)L_+ + \frac{1}{2}(\hat{n}_x + i\hat{n}_y)L_- + \hat{n}_z L_z. \quad (\text{L.45})$$

Wir wissen:

$$L_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle, \quad L_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle \quad (\text{L.46})$$

$$L_+ |+\rangle = 0, \quad L_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle \quad (\text{L.47})$$

$$L_- |+\rangle = \hbar |-\rangle, \quad L_- |-\rangle = 0. \quad (\text{L.48})$$

Mit $\alpha = \frac{1}{2}(\hat{n}_x + i\hat{n}_y)$ haben wir $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} = \alpha^* L_+ + \alpha L_- + \hat{n}_z L_z$ und

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} |+\rangle = \hbar \left(\alpha |-\rangle + \frac{\hat{n}_z}{2} |+\rangle \right), \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} |-\rangle = \hbar \left(\alpha^* |+\rangle - \frac{\hat{n}_z}{2} |-\rangle \right). \quad (\text{L.49})$$

Daher:

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})^2 |+\rangle = \hbar^2 \left(\alpha^* \alpha |+\rangle - \alpha \frac{\hat{n}_z}{2} |-\rangle + \alpha \frac{\hat{n}_z}{2} |-\rangle + \frac{\hat{n}_z^2}{4} |+\rangle \right) \quad (\text{L.50})$$

$$= \hbar^2 \left(|\alpha|^2 |+\rangle + \frac{\hat{n}_z^2}{4} |+\rangle \right) \quad (\text{L.51})$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} |+\rangle \quad (\text{L.52})$$

weil $\hat{\mathbf{n}}^2 = 1$ und $|\alpha|^2 = \frac{1}{4}(\hat{n}_x^2 + \hat{n}_y^2) = \frac{1}{4}(\hat{\mathbf{n}}^2 - \hat{n}_z^2) = \frac{1}{4}(1 - \hat{n}_z^2)$.

Ebenso gilt,

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})^2 |-\rangle = \hbar^2 \left(\alpha^* \alpha |-\rangle + \alpha^* \frac{\hat{n}_z}{2} |+\rangle - \alpha^* \frac{\hat{n}_z}{2} |+\rangle + \frac{\hat{n}_z^2}{4} |-\rangle \right) = \frac{\hbar^2}{4} |-\rangle. \quad (\text{L.53})$$

(b) Definiere $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{n}}$.

$$U_{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-i}{\hbar} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \right)^k \quad (\text{L.54})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2k}}{(2k)!} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\hbar} \cdot \mathbf{L} \right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2k+1}}{(2k+1)!} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\hbar} \cdot \mathbf{L} \right)^{2k+1} \quad (\text{L.55})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\omega}{\hbar} \right)^{2k} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})^{2k} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\omega}{\hbar} \right)^{2k+1} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})^{2k+1}. \quad (\text{L.56})$$

Aus (a), $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})^{2k} |\pm\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2k} |\pm\rangle$. Daher,

$$U_{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\omega}{2} \right)^{2k} \mathbb{I} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\omega}{2} \right)^{2k+1} \frac{2}{\hbar} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}) \quad (\text{L.57})$$

$$= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \mathbb{I} - \frac{2i}{\hbar} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}) \quad (\text{L.58})$$

D.h.: Eine Drehung um 2π gibt nicht den Ausgangszustand, sondern ändert das Vorzeichen desselben: $U_{2\pi\hat{\mathbf{n}}} = -U_{0\hat{\mathbf{n}}}$.

(c) Es ist:

$$L_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow L_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{L.59})$$

$$L_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow L_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{L.60})$$

$$L_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow L_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.61})$$

Also,

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{L.62})$$

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{L.63})$$

(Beachte: L_x , L_y und L_z sind proportional zu den berühmten Pauli-Matrizen).

(d) Wie in (c),

$$L_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{L.64})$$

$$\Rightarrow L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{L.65})$$

$$L_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{L.66})$$

$$\Rightarrow L_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{L.67})$$

$$L_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{L.68})$$

$$\Rightarrow L_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{L.69})$$

Also,

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{L.70})$$

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.71})$$