Übung 1. Ring mit Streuer

Lernziel: In dieser Aufgabe soll der entartete Fall der stationären Störungsrechnung rekapituliert werden.

Es soll das Energiespektrum eines Elektrons mit Masse m und Ladung $-e < 0$ in einem metallischen Ring untersucht werden, der einen magnetischen Fluss Φ umschliesst. Zusätzlich soll ein periodisches Streupotential $V(x+L) = V(x)$ angenommen werden, wobei x der Ortskoordinate entlang des Rings und L dem Umfang des Rings entspricht. Der Hamiltonoperator des Systems lautet

$$H(A_x) = \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x(x)\right]^2 + V(x) \tag{1}$$

Die Eindeutigkeit der Wellenfunktion verlangt $\Psi(x+L,t) = \Psi(x,t)$. Bestimme das Energiespektrum des Systems in Abhängigkeit des Parameters $\alpha = 2\pi\Phi/\Phi_0$ mit $\Phi_0 = hc/e$.

(a) Zeige, dass die stationäre Schrödingergleichung durch eine Eichtransformation

$$\Psi(x) \to e^{-i\alpha x/L}\Psi(x) \tag{2}$$

auf das Problem

$$H(0)\Psi_{n,\alpha}(x) = \epsilon_{n,\alpha}\Psi_{n,\alpha}(x) \tag{3}$$

gebracht werden kann; dies entspricht dem Problem für eine Bloch-Wellenfunktion in einem Festkörper mit $\alpha \to k$; k ist der Kristallimpuls.

(b) Betrachte zunächst das System mit $V(x) = 0$ und bestimme die Energieeigenwerte $\epsilon_{n,\alpha}$.

(c) Berechne das Energiespektrum für ein endliches periodisches Potential $V(x+L) = V(x)$ mit Hilfe der Störungsrechnung. Entwickle dazu das Potential in einer Fourierreihe der Form $V(x) = \sum_l e^{iK_l x}V_l$ mit $K_l = \frac{2\pi}{\omega}l$. Welches Problem tritt für die Energiekorrekturen 2. Ordnung auf und wie lässt es sich lösen? Diskutiere die physikalische Interpretation.

Übung 2. Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld

Lernziel: In dieser Aufgabe üben wir die zeitabhängige Störungstheorie, wobei die Störung abrupt eingeschaltet wird. Das störungstheoretische Resultat wird mit der exakten Lösung verglichen.

Ein geladenes Teilchen der Ladung $e > 0$ befinde sich in einem harmonischen Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega x^2$ im Grundzustand $|0\rangle$. Zur Zeit $t = 0$ wird ein konstantes, homogenes elektrisches Feld $E > 0$ angelegt.

(a) Unter Verwendung der zeitabhängigen Störungstheorie soll die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{0\to1}$, mit welcher das Teilchen von Zustand $|0\rangle$ in Zustand $|1\rangle$ übergeht (zu einer Zeit $t > 0$) berechnet werden. $|1\rangle$ bezeichnet dabei den ersten angeregten Zustand des ungestörten Systems. Finde das Resultat bis einschliesslich $O(t^2)$.

(b) Beantworte die gleiche Frage für $P_{0\to 0}$. Was kann man jetzt über $P_{0\to n}$ für $n \geq 2$ sagen?

Hinweis: Betrachte Gleichung (9.84) des Skripts.

(c)* Löse das Problem exakt (d.h. finde eine exakte Formel für $P_{0\to n}$). So kann man durch Vergleich explizit sehen bis auf welche Zeitskala die Störungstheorie eine gute Approximation der exakten Lösung ist.

Hinweis:
I. Schreibe den Hamilton-Operator mit dem Translationsoperator $T = e^{-ix_0 p/\hbar}$*, und benutze, dass* $e^{ix_0 p/\hbar}|0\rangle = |\alpha_0\rangle$ *ein kohärenter Zustand ist (vgl. Serie 7).*

II. Der Überlapp zwischen zwei kohärenten Zuständen $|\alpha\rangle$ *und* $|\beta\rangle$ *ist gegeben durch* $\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-|\alpha-\beta|^2/2} e^{iIm(\alpha^*\beta)}$.