Übung 1. Eichinvarianz der Stromdichte

Lernziel: In der Physik spielen Symmetrien eine zentrale Rolle. Neben der Klassifikation von Lösungen können sie zur Vereinfachung von Problemen beitragen. In dieser Aufgabe lernen wir eine (nicht offensichtliche) Symmetrie des Teilchens im elektromagnetischen Feldes kennen: die Eichsymmetrie.

Die Stromdichte $\boldsymbol{j}(x)$ eines Teilchens im elektromagnetischen Feld wird definiert als

$$\boldsymbol{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{e}{mc}\boldsymbol{A}|\psi|^2, \tag{1}$$

wobei $\psi(x)$ der Zustand des Teilchens und $\boldsymbol{A}$ das Vektorpotential sei. Zeige, dass sowohl die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\boldsymbol{j}$ als auch die zeitabhängige Schrödingergleichung invariant sind unter der Eichtransformation (für eine beliebige (differenzierbare) Funktion $\chi(x,t)$),

$$\psi \to \psi e^{(ie/\hbar c)\chi}, \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\chi, \qquad \phi \to \phi - (\partial_t \chi)/c. \tag{2}$$

Übung 2. Freies Elektron im Magnetfeld: Landau Quantisierung

Lernziel: Wir lernen in dieser Übung, wie ein Magnetfeld das Spektrum freier Elektronen in Landauniveaus quantisiert. Wir bestimmen wie die Wellenfunktionen in einer bestimmten Eichung aussehen und berechnen die Hall-Leitfähigkeit des Systems.

Wir betrachten ein Elektron in einem homogenen Magnetfeld B in z-Richtung. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2, \tag{3}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ das Vektorpotential ist, m und e die Masse und Ladung des Teilchens und c die Lichtgeschwindigkeit. In Landau-Eichung wählt für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (0, Bx, 0)$.

(a) Löse die Schrödingergleichung mittels eine Separationsansatzes und zeige, dass sich das Problem auf das eines harmonischen Oszillators zurückführen lässt. Führe zur Vereinfachung die Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/mc$ und die magnetischen Länge $\ell = \sqrt{\hbar c/eB}$ ein. Bestimme zu allen Energieeigenwerten (Landauniveaus) die zugehörigen Wellenfunktionen.

(b) Wir betrachten nun ein endliches System mit Abmessungen L_x und L_y. Bestimme den Entartungsgrad N_n der Landauniveaus. Vergleiche das Ergebnis mit der Anzahl Flussquanten $N_\Phi = \Phi/\Phi_0$ (mit $\Phi_0 = hc/e$) die das System durchfliessen.

(c) Zusätzlich zum Magnetfeld werde nun noch ein homogenes elektrisches Feld entlang x angelegt. Beschreibe dieses durch das Potential $\phi(x) = -Ex$. Wie ändert sich das Spektrum?

(d) Berechne den Ladungsstrom

$$I_y = e\int dx\; j_y(x) \tag{4}$$

eines besetzten Eigenzustandes $E_{n,k}$ von $\mathcal{H}$. Vergleiche dein Ergebnis mit dem klassischen Resultat (klassischer Hall-Effekt). Bestimme die Stromdichte $J_n = (I_y/L_xL_y)N_n$ eines gefüllten Landau-Niveaus und zeige, dass gilt $\sigma_{xy}^n = J_n/E = e^2/h$. Dieses Resultat ist unabhängig von n und führt zur bekannten Quantisierung des Hall-Effektes.

Übung 3. Kohärente Zustände zum harmonischen Oszillator

Lernziel: In dieser Übung untersuchen wir die Quantenzustände, die sich am 'klassischsten' verhalten, sogenannte kohärente Zustände. Wir lernen einige Eigenschaften dieser Zustände kennen und berechnen ein Beispiel, in dem wir explizit sehen was wir mit 'am meisten klassisch' meinen.

Ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist ein normierter Eigenvektor des Vernichtungsoperators a mit Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$, so das $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ und $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$.

(a) Zeige, dass

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle, \tag{5}$$

ein kohärenter Zustand ist. Hier ist $|0\rangle$ der Grundzustand des Systems (d.h. keine Anregungen).

(b) Beweise, dass sich der Identitätsoperator $\mathbb{I}$ durch kohärente Zustände ausdrücken lässt, d.h.

$$\int \frac{dxdy}{\pi} |z\rangle\langle z| = \mathbb{I}, \tag{6}$$

wobei $z = x + iy = re^{i\phi}$. Bestimme schlussendlich $\langle\alpha|n|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle$ und $(\Delta n)^2$. Welche Distributionsfunktion stimmt damit überein?

Wir betrachten nun den harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2). \tag{7}$$

(c) Verifiziere, dass kohärente Zustände minimale Unschärfe aufweisen, $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, wobei $\hat{x}, \hat{p}$ der Orts- bzw. Impulsoperator ist. In diesem Sinne sind kohärente Zustände am ähnlichsten zu klassischen Zuständen.

(d) Sei jetzt $|x_0, p_0\rangle = e^{ip_0\hat{x}/\hbar} e^{-ix_0\hat{p}/\hbar}|0\rangle$. Berechne die Wellenfunktion $\psi(x) = \langle x|x_0, p_0\rangle$ und die Erwartungswerte $\langle x\rangle$ und $\langle p\rangle$ zu diesem Zustand. Setze dann $\alpha = x_0\sqrt{m\omega/2\hbar} + ip_0/\sqrt{2m\hbar\omega}$ und zeige, dass gilt

$$|x_0, p_0\rangle = e^{ip_o x_0/2\hbar}|\alpha\rangle. \tag{8}$$

(e) Berechne $|\alpha\rangle(t) = e^{-iHt/\hbar}|\alpha\rangle$ und zeige, dass

$$|\alpha\rangle(t) = |\alpha(t)\rangle e^{-i\omega t/2}, \quad \text{mit} \quad \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}. \tag{9}$$

Zeige dann, dass

$$|x_0, p_0\rangle(t) = |x_0(t), p_0(t)\rangle e^{i\phi(t)}, \tag{10}$$

wobei $(x_0(t), p_0(t))$ die klassische Bahn (mit $x_0(0) = x_0$ und $p_0(0) = p_0$) ist und $\phi(t)$ eine zeitabhängige Phase.