

# General Relativity

## HS 14

G.M. Graf

ETH Zürich

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mannigfaltigkeiten und Tensorfelder</b>	<b>1</b>
1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	1
2	Tensorfelder . . . . .	5
3	Die Lie-Ableitung . . . . .	8
4	Differentialformen . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Affine Zusammenhänge</b>	<b>16</b>
1	Parallelverschiebung und kovariante Ableitung . . . . .	16
2	Torsion und Krümmung . . . . .	18
3	Die Cartanschen Strukturgleichungen . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten</b>	<b>24</b>
1	Metrik . . . . .	24
2	Der Riemann Zusammenhang . . . . .	24
3	Ergänzungen . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Zeit, Raum und Gravitation</b>	<b>30</b>
1	Das klassische Relativitätsprinzip . . . . .	30
2	Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip . . . . .	30
3	Die Postulate der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) . . . . .	31
4	Übergang SRT $\rightarrow$ ART . . . . .	32
5	Übergang Geodätengleichung $\rightarrow$ Newtonsches Bewegungsgesetz . . . . .	34
6	Geodätische Abweichung . . . . .	36

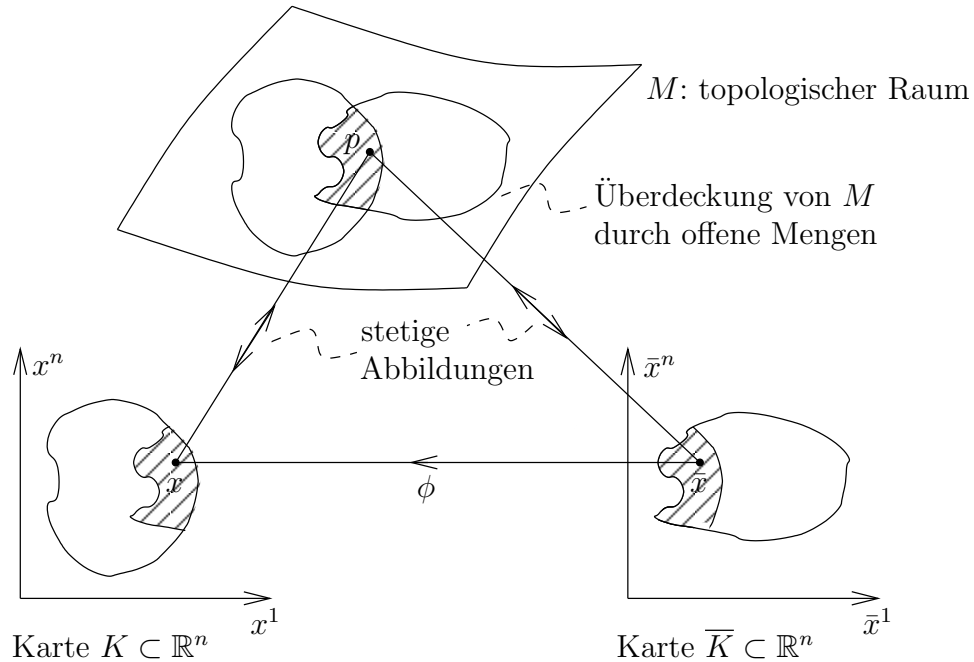
<b>5</b>	<b>Die Einsteinschen Feldgleichungen</b>	<b>38</b>
1	Der Energie-Impulstensor . . . . .	38
2	Feldgleichungen der Gravitation . . . . .	40
3	The Hilbert action . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Homogener, isotroper Kosmos</b>	<b>46</b>
1	Der Ansatz . . . . .	46
2	Expansion . . . . .	47
3	Die Friedmann-Gleichungen . . . . .	49
4	Welches Universum? . . . . .	56
5	Das Kausalitäts- und Flachheitsproblem . . . . .	57
6	Rotverschiebung und Symmetrien . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Die Schwarzschild-Kruskal Metrik</b>	<b>62</b>
1	Stationäre und statische Metrik . . . . .	62
2	Die Schwarzschild-Metrik . . . . .	64
3	Die Kruskal-Fortsetzung der Schwarzschild-Metrik: Schwarzes Loch . . . . .	70
4	The Kerr metric and rotating black holes . . . . .	73
5	Hawking radiation . . . . .	77
<b>8</b>	<b>Die linearisierte Gravitationstheorie</b>	<b>86</b>
1	Die linearisierten Feldgleichungen . . . . .	86
2	Eichtransformationen und Eichungen . . . . .	87
3	Gravitationswellen . . . . .	90
4	Ausstrahlung . . . . .	92

Dank gebührt W. Hunziker auf dessen Vorlesungsskript dieser Text zum Teil basiert, sowie Frau A. Schultze für die sorgfältige Textverarbeitung. Bemerkungen, auch betreffend Druckfehler, sind willkommen (gmgraf@itp.phys.ethz.ch).

# 1. Mannigfaltigkeiten und Tensorfelder

## 1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit**  $M$  ist "lokal homeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ " und damit durch folgende Elemente definiert:



Im schraffierten Überlappungsgebiet zweier Karten sind die Koordinatentransformationen  $x \leftrightarrow \bar{x}$  beliebig oft differenzierbar. Definition:  $\dim M = n$ .

### Begriffe

- Differenzierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  (Algebra  $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ )
- $\mathcal{F}_p$ : Algebra der in einer Umgebung von  $p$  definierten  $C^\infty$ -Fkt. ( $f = g$  heisst  $f(q) = g(q)$  in einer Umgebung von  $p$ )
- Differenzierbare Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$
- Differenzierbare Abbildung:  $M \rightarrow M'$

Die Begriffe sind mittels einer Karte erklärt: z.B. ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, falls  $x \mapsto f(p(x)) \equiv f(x)$  es ist. Dies ist unabhängig von der Karte  $K$ , die eine Umgebung von  $p$  darstellt.

### Tangentialraum $T_p$ im Punkt $p \in M$

Ein **Vektor**  $X \in T_p$  ist eine lineare Abbildung  $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Derivationseigenschaft

$$X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg) . \quad (1.1)$$

$T_p$  ist ein Vektorraum. In jeder Karte (die  $p$  darstellt) ist

$$Xf = X^i f_{,i}(x) \quad : \quad X^i = X(x^i),$$

wobei  $f_{,i} = \partial/\partial x^i$  und  $x^i \in \mathcal{F}_p$  die Koordinatenfunktion  $p \mapsto x^i$  bezeichnet.

**Beweis:** Für  $f \equiv 1$  ist  $f^2 = f$ , also  $Xf = 2Xf = 0$ . Somit ist  $Xf = 0$ , falls  $f$  konstant ist. Nun habe  $p$  in der Karte die Koordinaten  $x = 0$ . Aus der Identität

$$f(x) = f(0) + x^i \underbrace{\int_0^1 dt f_{,i}(tx)}_{g_i(x)}$$

folgt nach (1.1)  $Xf = X(x^i) \cdot g_i(0) = X^i f_{,i}(0)$ . □

### Richtungsableitung

Sei  $\gamma(t) \in M$  ein Weg durch  $\gamma(0) = p$ . Dann definiert  $\gamma$  ein  $X \in T_p$  durch

$$Xf = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0}, \quad (1.2)$$

notiert als  $X = \dot{\gamma}(0)$ . In Komponenten:

$$X^i = \left. \frac{d\gamma^i}{dt} \right|_{t=0}$$

( $\gamma^i =$  Koordinaten von  $\gamma$ ). Man kann deshalb jeden Tangentenvektor  $X$  auffassen als Äquivalenzklasse sich in  $p$  berührender Wege.

### Basis für $T_p$

$T_p$  hat Dimension  $n$ . In einer Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  ist

$$X = X^i e_i.$$

Basistransformation:

$$\begin{array}{ccc} \bar{e}_i = \phi_i^k e_k & ; & \bar{X}^i = \phi^i_k X^k \\ \uparrow & & \uparrow \\ & \text{invers-transponiert} & \end{array} \quad (1.3)$$

Speziell heisst  $e_i = \partial/\partial x^i$  die **kanonische** Basis (bezüglich einer Karte). Bei Kartenwechsel ist

$$\phi_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}; \quad \phi^i_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}. \quad (1.4)$$

### Der Kotangententialraum $T_p^*$

Dualraum von  $T_p$ : ein **Kovektor**  $\omega \in T_p^*$  ist eine Linearform

$$\omega : X \mapsto \omega(X) \equiv \langle \omega, X \rangle \in \mathbb{R}.$$

Speziell ist für jedes  $f \in \mathcal{F}_p$

$$df : X \mapsto Xf$$

ein Element von  $T_p^*$ . Diese Elemente  $df = f_i dx^i$  bilden einen Vektorraum der Dimension  $n$ , also ganz  $T_p^*$ .

**Basis**  $(e^1, \dots, e^n)$  für  $T_p^*$ :

$$\omega = \omega_i e^i .$$

Speziell ist die **duale Basis** (zu einer Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  für  $T_p$ ) gegeben durch

$$\langle e^i, X \rangle = X^i , \quad \text{oder} \quad \langle e^i, e_k \rangle = \delta^i_k .$$

Damit ist  $\omega_i = \langle \omega, e_i \rangle$ . Bei einer Basistransformation verhalten sich die  $\omega_i$  wie die  $e_i$  und die  $e^i$  wie die  $X^i$  (vgl. (1.3)). Speziell gilt für die kanonische Basis

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} ; \quad e^i = dx^i .$$

Bei Kartenwechsel ist dann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^k} ; \quad d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} dx^k .$$

### Tensoren über $T_p$

Tensoren sind Multilinearformen über  $T_p^*$  und  $T_p$ , so z.B. ein Tensor  $T$  vom Typ  $\binom{1}{2}$  (kurz:  $T \in \otimes_2^1 T_p$ ):  $T(\omega, X, Y)$  ist eine Trilinearform über  $T_p^* \times T_p \times T_p$ . Speziell sind  $\otimes_1^0 T_p = T_p^*$ ,  $\otimes_0^1 T_p = (T_p^*)^* \cong T_p$ , sowie  $\otimes_0^0 T_p = \mathbb{R}$ . Zwischen Tensoren beliebigen Typs ist das **Tensorprodukt** definiert, z.B.

$$T(\omega, X, Y) = R(\omega, X) \cdot S(Y) : \quad T = R \otimes S .$$

**Komponenten** (bezgl. dualem Basispaar)

$$T(\omega, X, Y) = \underbrace{T(e^i, e_j, e_k)}_{\equiv T^i_{jk}} \underbrace{\omega_i X^j Y^k}_{e_i(\omega) e^j(X) e^k(Y)} ,$$

also

$$T = T^i_{jk} e_i \otimes e^j \otimes e^k .$$

Insbesondere erweist sich jeder Tensor dieses Typs als Linearkombinationen von Tensorprodukten  $X \otimes \omega \otimes \omega'$  mit  $X \in T_p$ ,  $\omega, \omega' \in T_p^*$ , notiert als  $\otimes_2^1 T_p = T_p \otimes T_p^* \otimes T_p^*$ .

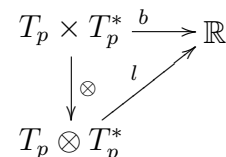
### Basistransformation

$$\bar{T}^i_{jk} = T^\alpha_{\beta\gamma} \phi^\beta_\alpha \phi_j^\beta \phi_k^\gamma . \tag{1.5}$$

### Spur

Jede Bilinearform  $b \in T_p^* \otimes T_p$  legt eine Linearform  $l \in (T_p \otimes T_p^*)^*$  fest, derart dass

$$l(X \otimes \omega) = b(X, \omega) .$$



**Beweis:** Die Abbildung  $l \mapsto b$  ist injektiv und dimensionshalber auch surjektiv.  $\square$

Insbesondere ist eine Linearform  $\text{tr} T$  auf Tensoren  $T$  vom Typ  $\binom{1}{1}$  definiert durch

$$\text{tr}(X \otimes \omega) = \langle \omega, X \rangle .$$

In Komponenten bezgl. einem dualen Basispaar ist

$$\text{tr} T = T^i{}_i .$$

Analog definiert etwa

$$T^i{}_{jk} \mapsto S_k = T^i{}_{ik}$$

eine lineare Abbildung der Tensoren vom Typ  $\binom{1}{2}$  in die Tensoren vom Typ  $\binom{0}{1}$ .

### Die Tangentialabbildung

Sei  $\varphi$  eine differenzierbare Abbildung  $M \rightarrow \bar{M}$ ;  $p \in M$  und  $\bar{p} = \varphi(p)$ . Dann induziert  $\varphi$  eine lineare Abbildung

$$\varphi_* : T_p(M) \rightarrow T_{\bar{p}}(\bar{M}) ,$$

die wir auf zwei Arten beschreiben:

(a) Für jedes  $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\bar{p}}(\bar{M})$  ist

$$(\varphi_* X) \bar{f} = X(\bar{f} \circ \varphi) .$$

(b) Sei  $\gamma$  ein Repräsentant von  $X$  (vgl. (1.2)). Dann ist

$$\bar{\gamma} = \varphi \circ \gamma$$

ein Repräsentant von  $\varphi_* X$ . Dies stimmt mit (a) überein, da

$$\left. \frac{d}{dt} \bar{f}(\bar{\gamma}(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\bar{f} \circ \varphi)(\gamma(t)) \right|_{t=0} .$$

Bezgl. Basen  $(e_1, \dots, e_n)$  für  $T_p$ ,  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$  für  $T_{\bar{p}}$  lautet  $\bar{X} = \varphi_* X$

$$\bar{X}^i = (\varphi_*)^i{}_k X^k$$

mit  $(\varphi_*)^i{}_k = \langle \bar{e}^i, \varphi_* e_k \rangle$  oder, speziell für kanonische Basen,

$$(\varphi_*)^i{}_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} .$$

Die **Adjungierte**  $\varphi^*$  von  $\varphi_*$  ist

$$\varphi^* : T_{\bar{p}}^* \rightarrow T_p^* ; \quad \bar{\omega} \mapsto \varphi^* \bar{\omega}$$

mit

$$\langle \varphi^* \bar{\omega}, X \rangle = \langle \bar{\omega}, \varphi_* X \rangle .$$

Zum gleichen Ergebnis führt die Definition

$$\varphi^* : d\bar{f} \mapsto d(\bar{f} \circ \varphi) , \quad (\bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{M})) . \tag{1.6}$$

In Komponenten lautet  $\omega = \varphi^*\bar{\omega}$

$$\omega_k = \bar{\omega}_i (\varphi_*)^i_k .$$

Nun beschränken wir uns auf (lokale) Diffeomorphismen, d.h.  $\varphi^{-1}$  existiert in einer Umgebung von  $\bar{p}$ :

$$\dim M = \dim \bar{M} ; \quad \det \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \right) \neq 0 .$$

Dann sind  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$  invertierbar und lassen sich auf Tensoren beliebiger Stufe erweitern. Bsp. Typ  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} (\varphi_* T)(\bar{\omega}, \bar{X}) &= T(\varphi^* \bar{\omega}, \varphi_*^{-1} \bar{X}) , \\ (\varphi^* \bar{T})(\omega, X) &= \bar{T}(\varphi_*^{-1} \omega, \varphi_* X) . \end{aligned}$$

Dabei sind  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$  zueinander invers und es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_*(T \otimes S) &= (\varphi_* T) \otimes (\varphi_* S) , \\ \text{tr}(\varphi_* T) &= \varphi_*(\text{tr} T) \end{aligned} \tag{1.7}$$

(tr = beliebige Spur) und ebenso für  $\varphi^*$ . In Komponenten lautet  $\bar{T} = \varphi_* T$

$$\bar{T}^i_k = T^\alpha_\beta \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \tag{1.8}$$

(kanonische Basis). Formal ist dies genau gleich der Transformation (1.5) bei einem Kartenwechsel.

## 2. Tensorfelder

Ein **Vektorfeld** auf  $M$  ist eine lineare Abbildung  $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  mit der Derivationseigenschaft

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) . \tag{1.9}$$

Es folgt, dass  $(Xf)(p)$  nur von der Äquivalenzklasse  $f \in \mathcal{F}_p$  abhängt. **Beweis:** Ist  $f = 0$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$ , so folgt mit  $\text{supp } g \subset U$ ,  $g(p) = 1$ , dass  $(Xf)(p) = 0$ .  $\square$

Somit ist für jedes  $p \in M$

$$X_p : f \mapsto (Xf)(p)$$

ein Vektor in  $T_p$ . In jeder Karte ist also

$$(Xf)(x) = X^i(x) f_{,i}(x) , \quad \text{d.h.} \quad X = X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

mit  $C^\infty$ -Komponenten  $X^i(x)$ : Vektorfelder sind lineare Differentialoperatoren erster Ordnung. Die Vektorfelder auf  $M$  bilden einen Vektorraum, in dem noch folgende Operationen definiert sind

$$\begin{aligned} X &\mapsto fX && \text{(Multiplikation mit } f \in \mathcal{F} \text{)} , \\ X, Y &\mapsto [X, Y] = XY - YX && \text{(Kommutator)} . \end{aligned}$$

$[X, Y]$ , im Unterschied zu  $XY$ , erfüllt nämlich (1.9):

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X((Yf)g + f(Yg)) - Y((Xf)g + f(Xg)) \\ &= ([X, Y]f)g + f([X, Y]g) . \end{aligned}$$

Zudem gilt die Jacobi-Identität

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 . \quad (1.10)$$

**1-Formen** sind “ $f$ -lineare” Abbildungen

$$\omega : X \mapsto \omega(X) \in \mathcal{F}$$

des Raumes der Vektorfelder nach  $\mathcal{F}$ , d.h.

$$\omega(fX) = f\omega(X) ,$$

nebst der Linearität. Es folgt, dass  $\omega(X)(p)$  nur von  $X_p$  abhängt. **Beweis:** Karte:  $p \in U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p \mapsto x = 0$ . Sei  $\text{supp } f \subset U$ ,  $f(p) = 1$ . Ist  $X_p = 0$ , so folgt  $\omega(X)(p) = \omega(f^2X)(p) = (fX^i)(0)\omega(f\partial/\partial x^i) = 0$ , da  $X^i(0) = 0$ .  $\square$

Somit ist für jedes  $p \in M$  durch

$$\omega(X)(p) = \langle \omega_p, X_p \rangle$$

ein Kovektor  $\omega_p \in T_p^*$  definiert. In jeder Karte ist dann

$$\omega(X) = \omega_i(x)X^i(x) , \quad \text{d.h.} \quad \omega = \omega_i(x)dx^i$$

( $dx^i : X \mapsto X^i$ , lokal) mit  $C^\infty$ -Komponenten  $\omega_i(x)$ .

## Tensorfelder

Beispiel: Ein Tensorfeld  $R$  vom Typ  $\binom{1}{2}$  ist eine Funktion  $R(\omega, X, Y)$  von:  $\omega$  (1-Form),  $X, Y$  (Vektorfelder), mit Werten in  $\mathcal{F}$ , die  $f$ -linear ist in jeder Variablen. Ein Tensorfeld ist auch auffassbar als Funktion

$$R : p \in M \mapsto R_p : \text{Tensor über } T_p ,$$

die (im Sinne der Komponenten) glatt ist: In jeder Karte ist

$$R(\omega, X, Y) = R^i_{jk}(x)\omega_i(x)X^j(x)Y^k(x)$$

mit  $C^\infty$ -Komponenten  $R^i_{jk}(x)$ . Die Transformation bei Kartenwechsel ist durch (1.5, 1.4) gegeben.

## Tangentialabbildung

( $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  differenzierbar)

**1-Formen:**  $\bar{\omega} \mapsto \varphi^*\bar{\omega}$ . Die 1-Form  $\varphi^*\bar{\omega}$  über  $M$  ist erklärt durch (1.6) und  $f$ -Linearität. Gleichbedeutend ist

$$(\varphi^*\bar{\omega})_p = \varphi^*\bar{\omega}_{\varphi(p)} .$$



Sei nun  $\varphi$  ein Diffeomorphismus.

**Vektorfelder:**  $X \mapsto \varphi_* X$ , Vektorfeld über  $\overline{M}$ :

$$(\varphi_* X)\overline{f} = [X(\overline{f} \circ \varphi)] \circ \varphi^{-1},$$

also  $(\varphi_* X)_{\overline{p}} = \varphi_* X_{\varphi^{-1}(\overline{p})}$ . Es gilt

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$$

**Tensorfelder:**  $\overline{R} \rightarrow \varphi^* \overline{R}$ , ( $\varphi_* = \varphi^{*-1}$ ), z.B.  $\overline{R}$  vom Typ  $\binom{1}{1}$ :

$$(\varphi^* \overline{R})(\omega, X) = \overline{R}(\varphi^{*-1} \omega, \varphi_* X) \circ \varphi,$$

bzw.

$$(\varphi^* \overline{R})_p = \varphi^* R_{\varphi(p)},$$

d.h.  $\varphi^*$  wirkt punktweise auf die Tensoren des Feldes.

### Flüsse und erzeugende Vektorfelder

Ein **Fluss** ist eine 1-parametrische Gruppe von Diffeomorphismen  $\varphi_t : M \rightarrow M$ ,  $t \in \mathbb{R}$  mit

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}.$$

Insbesondere ist  $\varphi_0 = \text{id}$  und  $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ . Ferner soll die **Integralkurve** jedes Punktes  $p \in M$

$$t \mapsto \varphi_t(p) \equiv \gamma(t)$$

differenzierbar sein. Jeder Fluss bestimmt ein **Vektorfeld**  $X$  durch

$$Xf = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t) \right|_{t=0}, \quad (1.11)$$

$$\text{d.h.} \quad X_p = \left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t=0} = \dot{\gamma}(0),$$

wobei  $\dot{\gamma}(0)$  der Tangentialvektor an  $\gamma$  im Punkt  $p = \gamma(0)$  ist. Im Punkt  $\gamma(t)$  ist dann

$$\dot{\gamma}(t) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(p) = \frac{d}{ds} (\varphi_s \circ \varphi_t)(p) \right|_{s=0} = X_{\varphi_t(p)}.$$

d.h.  $\gamma(t)$  löst die Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}; \quad \gamma(0) = p. \quad (1.12)$$

Das Vektorfeld bestimmt also den Fluss eindeutig. (Im Allg. erzeugt aber nicht jedes Vektorfeld  $X$  einen Fluss, da (1.12) nicht immer globale Lösungen (für alle  $t \in \mathbb{R}$ ) besitzt. Man kann sich für das Folgende aber auch mit "lokalen Flüssen" begnügen.)

### 3. Die Lie-Ableitung

Die Ableitung eines Vektorfeldes  $V$  erfordert den Vergleich von  $V_p$  und  $V_{p'}$  in benachbarten Punkten  $p, p'$ . Da  $V_p \in T_p$ ,  $V_{p'} \in T_{p'}$  in verschiedenen Räumen liegen, muss, bevor die Differenz gebildet werden kann,  $V_{p'}$  nach  $T_p$  transportiert werden. Dies kann mittels der Tangentialabbildung  $\varphi_{t*}$  geschehen (Lie-Transport).

Die **Lie-Ableitung**  $L_X R$  eines Tensorfeldes  $R$  bezgl. des Vektorfeldes  $X$  ist definiert durch

$$L_X R = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* R \right|_{t=0} \quad (1.13)$$

oder, etwas ausführlicher,

$$(L_X R)_p = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* R_{\varphi_t(p)} \right|_{t=0} .$$

Hier ist  $\varphi_t$  der durch  $X$  erzeugte (lokale) Fluss, also ist  $\varphi_t^* R_{\varphi_t(p)}$  ein von  $t$  abhängiger Tensor über  $T_p$ . Um  $L_X$  in Koordinaten auszudrücken, schreiben wir für kleine  $t$  in einer Karte

$$\varphi_t : x \mapsto \bar{x}(t, x)$$

und linearisieren in  $t$ :

$$\bar{x}^i = x^i + tX^i(x) + \dots, \quad x^i = \bar{x}^i - tX^i(\bar{x}) + \dots,$$

also

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial t} = - \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial t} = X^i{}_{,k}$$

bei  $t = 0$ . Als Beispiel sei  $R$  vom Typ  $\binom{1}{1}$ . Nach (1.8) ist dann

$$(\varphi_t^* R)^i{}_j(x) = R^\alpha{}_\beta(\bar{x}) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} .$$

Ableitung nach  $t$  bei  $t = 0$  ergibt:

$$(L_X R)^i{}_j = R^i{}_{j,k} X^k - R^\alpha{}_j X^i{}_{,\alpha} + R^i{}_\beta X^\beta{}_{,j} . \quad (1.14)$$

#### Eigenschaften von $L_X$

- (a)  $L_X$  ist eine lineare Abbildung von Tensorfeldern in Tensorfeldern gleichen Typs
- (b)  $L_X(\text{tr } T) = \text{tr}(L_X T)$ , (tr beliebige Spur)
- (c)  $L_X(T \otimes S) = (L_X T) \otimes S + T \otimes (L_X S)$
- (d)  $L_X f = Xf$ , ( $f \in \mathcal{F}$ )
- (e)  $L_X Y = [X, Y]$ , ( $Y$ : Vektorfeld)

**Beweis:** (a) folgt aus (1.13), (b,c) aus (1.7), (d) aus (1.11) und (e) aus

$$\begin{aligned} (L_X Y)f &= \left( \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* Y \right|_{t=0} \right) f = \left. \frac{d}{dt} (\varphi_{-t*} Y) f \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} Y(f \circ \varphi_{-t}) \circ \varphi_t \right|_{t=0} \\ &= Y \left( \left. \frac{d}{dt} f \circ \varphi_{-t} \right|_{t=0} \right) + \left. \frac{d}{dt} (Y(f) \circ \varphi_t) \right|_{t=0} = -YXf + XYf . \end{aligned}$$

□

**Zweite Definition von  $L_X$ :** Durch (a–e), also ohne Bezug auf Flüsse, ist  $L_X R$  für beliebige Tensorfelder  $R$  eindeutig bestimmt. Insbesondere stimmt diese Definition mit (1.13) überein.

**Beweis:** Wegen (c) muss man nur zeigen, dass  $L_X \omega$  für 1-Formen  $\omega$  definiert ist. Dies folgt aus

$$(L_X \omega)(Y) = \text{tr}(L_X \omega \otimes Y) = \text{tr} L_X(\omega \otimes Y) - \text{tr} \omega \otimes L_X Y = X\omega(Y) - \omega([X, Y]) .$$

□

### Weitere Eigenschaften von $L_X$

$L_X$  ist linear in  $X$  (aber nicht  $f$ -linear!) und

$$L_{[X, Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X .$$

**Beweis:** Die rechte Seite erfüllt (a–c) und stimmt mit der linken überein auf  $f \in \mathcal{F}$  und auf Vektorfeldern  $Z$ , letzteres wegen (1.10).

### Zur Bedeutung von $[X, Y] = 0$

Sei  $\varphi_t$  den durch  $X$  erzeugte Fluss. Ist  $[X, Y] = 0$ , so gilt

$$\varphi_{t*} Y = Y , \quad \text{d.h.} \quad Y_{\varphi_t(p)} = \varphi_{t*} Y_p , \quad (1.15)$$

denn

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* Y = \frac{d}{ds} \varphi_{t+s}^* Y \Big|_{s=0} = \varphi_t^* \left( \frac{d}{ds} \varphi_s^* Y \Big|_{s=0} \right) = \varphi_t^* ([X, Y]) = 0 .$$

Sei nun  $\psi_s$  der durch  $Y$  erzeugte Fluss. Nach (1.15) ist

$$\frac{d}{ds} \varphi_t(\psi_s(p)) = \varphi_{t*} Y_{\psi_s(p)} = Y_{\varphi_t(\psi_s(p))} ,$$

d.h.  $\varphi_t(\psi_s(p))$  erfüllt die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung von  $\psi_s(\varphi_t(p))$ .  
Resultat:

$$[X, Y] = 0 \quad \iff \quad \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \quad (1.16)$$

(falls  $X, Y$  globale Flüsse erzeugen).

## 4. Differentialformen

Eine  $p$ -**Form**  $\Omega$  ist ein total antisymmetrisches Tensorfeld vom Typ  $\binom{0}{p}$ :

$$\Omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) = (\text{sgn } \pi) \Omega(X_1, \dots, X_p)$$

für jede Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, p\} : \pi \in S_p$ . Dabei ist  $\text{sgn } \pi$  ihre Parität. Insbesondere ist  $\Omega \equiv 0$  für  $p > \dim M$ . Jedes Tensorfeld vom Typ  $\binom{0}{p}$  kann antisymmetrisiert werden durch die Operation  $\mathcal{A}$ :

$$(\mathcal{A}T)(X_1, \dots, X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (\text{sgn } \pi) T(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) . \quad (1.17)$$

Es gilt  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ . Das **äussere Produkt** einer  $p_1$ -Form  $\Omega^1$  mit einer  $p_2$ -Form  $\Omega^2$  ist die  $(p_1 + p_2)$ -Form

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1!p_2!} \mathcal{A}(\Omega^1 \otimes \Omega^2) \quad (1.18)$$

**Eigenschaften:**

$$\begin{aligned} \Omega^1 \wedge \Omega^2 &= (-1)^{p_1 p_2} \Omega^2 \wedge \Omega^1 \\ \Omega^1 \wedge (\Omega^2 \wedge \Omega^3) &= (\Omega^1 \wedge \Omega^2) \wedge \Omega^3 = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1!p_2!p_3!} \mathcal{A}(\Omega^1 \otimes \Omega^2 \otimes \Omega^3) \end{aligned}$$

**Komponenten:** In einer (lokalen) Basis von 1-Formen  $(e^1, \dots, e^n)$

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} = \mathcal{A}\Omega \\ &= \Omega_{i_1 \dots i_p} \mathcal{A}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}) \\ &= \Omega_{i_1 \dots i_p} \frac{1}{p!} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \\ &= \Omega_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \quad (\text{bei Einschränkung der Summe auf } i_1 < \dots < i_p). \end{aligned} \quad (1.19)$$

**Beispiele:**

Für 1-Formen  $A, B$  ist

$$(A \wedge B)_{ik} = A_i B_k - A_k B_i .$$

Für eine 2-Form  $A$  und eine 1-Form  $B$  ist

$$(A \wedge B)_{ikl} = A_{ik} B_l + A_{kl} B_i + A_{li} B_k , \quad (1.20)$$

denn

$$A \wedge B = A_{ik} B_l \frac{1}{2} e^i \wedge e^k \wedge e^l = \underbrace{(A_{ik} B_l + \text{zykl.})}_{(A \wedge B)_{ikl}} \frac{1}{6} e^i \wedge e^k \wedge e^l ,$$

da die Klammer total antisymmetrisch ist.

**Die äussere Ableitung einer Differentialform**

Die Ableitung  $df$  einer 0-Form  $f \in \mathcal{F}$  ist die 1-Form  $df(X) = Xf$ : Das Argument  $X$  wirkt als Derivation. Die Ableitung  $d\Omega$  einer 1-Form  $\Omega$  ist

$$d\Omega(X_1, X_2) = X_1\Omega(X_2) - X_2\Omega(X_1) - \Omega([X_1, X_2]) . \quad (1.21)$$

Der letzte Term stellt sicher, dass  $d\Omega$  eine 2-Form ist, also  $f$ -linear in  $X_1, X_2$ :

$$\begin{aligned} d\Omega(fX_1, X_2) &= fX_1\Omega(X_2) - X_2\Omega(fX_1) - \Omega([fX_1, X_2]) \\ &= fX_1\Omega(X_2) - ((X_2f)\Omega(X_1) + fX_2\Omega(X_1)) - \Omega(f[X_1, X_2] + (X_2f)X_1) \\ &= fd\Omega(X_1, X_2) . \end{aligned} \quad (1.22)$$

Für  $\Omega \wedge f = f\Omega$  gilt die Produktregel  $d(\Omega \wedge f) = d\Omega \wedge f - \Omega \wedge df$ , denn

$$\begin{aligned} d(\Omega \wedge f)(X_1, X_2) &= X_1(f\Omega)(X_2) - X_2(f\Omega)(X_1) - (f\Omega)(X_1, X_2) \\ &= fd\Omega(X_1, X_2) - \Omega(X_1)f(X_2) + \Omega(X_2)f(X_1) . \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ferner gilt  $d^2 f = 0$ , denn

$$\begin{aligned} d^2 f(X_1, X_2) &= X_1 df(X_2) - X_2 df(X_1) - df([X_1, X_2]) \\ &= X_1 X_2 f - X_2 X_1 f - [X_1, X_2] f = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Die Verallgemeinerung der Definition auf  $p$ -Formen  $\Omega$  ist

$$\begin{aligned} d\Omega(X_1 \dots X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \Omega(X_1 \dots \widehat{X}_i \dots X_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots X_{p+1}), \end{aligned}$$

wobei  $\widehat{\phantom{x}}$  eine Auslassung bezeichnet. Analog zu (1.22-1.24) zeigt man die

### Eigenschaften von $d$

- (a)  $d$  ist eine lineare Abbildung der  $p$ -Formen nach  $(p+1)$ -Formen
- (b)  $d(\Omega^1 \wedge \Omega^2) = d\Omega^1 \wedge \Omega^2 + (-1)^{p_1} \Omega^1 \wedge d\Omega^2$
- (c)  $d^2 = 0$ , d.h.  $d(d\Omega) = 0$
- (d)  $df(X) = Xf$ , ( $f \in \mathcal{F}$ )

**Zweite Definition von  $d$ :** Durch  $(a-d)$ , also ohne Bezug auf Kommutatoren.

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass  $d$  auf allen  $p$ -Formen  $\Omega$  definiert ist. Nach (1.19) gilt bezgl. einer kanonischen Basis

$$\Omega = \frac{1}{p!} \Omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (1.25)$$

also

$$d\Omega = \frac{1}{p!} d\Omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

□

**Komponenten:** ( $_{,i} = \partial/\partial x^i$ )

$$\begin{aligned} p!d\Omega &= \Omega_{i_1 i_2 \dots i_p, i_0} dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= -\Omega_{i_0 i_2 \dots i_p, i_1} dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= (-1)^k \Omega_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_p, i_k} dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (k = 0, \dots, p), \\ d\Omega &= \underbrace{\sum_{k=0}^p (-1)^k \Omega_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_p, i_k}}_{(d\Omega)_{i_0 \dots i_p}} \frac{1}{(p+1)!} dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

**Beispiele:**

$$p = 1 : \quad (d\Omega)_{ik} = \Omega_{k,i} - \Omega_{i,k}, \quad (1.27)$$

$$p = 2 : \quad (d\Omega)_{ikl} = \Omega_{i,k,l} + \Omega_{k,l,i} + \Omega_{l,i,k}. \quad (1.28)$$

**Weitere Eigenschaften:** Für  $\varphi : M \rightarrow N$  differenzierbar gilt

$$\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*. \quad (1.29)$$

**Beweis:** Wegen (1.25, 1.7) und Eigenschaft (b) genügt es, (1.29) zu verifizieren auf:

0-Formen  $\bar{f}$ : (1.29) ist identisch mit (1.6);

1-Formen der Form  $d\bar{f}$ : wegen (c) ist

$$(\varphi^* \circ d)(d\bar{f}) = 0, \quad (d \circ \varphi^*)(d\bar{f}) = d(\varphi^* \circ d\bar{f}) = (d^2 \circ \varphi^*)(\bar{f}) = 0.$$

□

Setzt man  $\varphi = \varphi_t$  (durch  $X$  erzeugter Fluss) und bildet  $d/dt|_{t=0}$ , so erhält man die infinitesimale Version von (1.29):

$$L_X \circ d = d \circ L_X. \quad (1.30)$$

**Definition:** Eine  $p$ -Form  $\omega$  mit

- $\omega = d\eta$  ist **exakt**;
- $d\omega = 0$  ist **geschlossen**.

Es gilt “ $\omega$  exakt  $\Rightarrow \omega$  geschlossen”, die Umkehrung davon i.A. aber nicht. Eine lokale Umkehrung ist das Lemma von Poincaré:

**Das Lemma von Poincaré:** Sei  $G \subset M$  ein offenes Gebiet mit einer “sternförmigen” Karte: Jeder Kartenpunkt ist mit dem Nullpunkt durch die gerade Verbindung **in** der Karte verbunden. Sei  $\omega$  eine  $p$ -Form mit  $d\omega = 0$  in  $G$ . Dann existiert auf  $G$  eine  $(p-1)$ -Form  $\eta$ , so dass dort

$$\omega = d\eta.$$

Beweis: s. S. 15.

**Bemerkung:** Natürlich ist  $\eta$  nicht eindeutig, denn “Eichtransformationen”  $\eta \rightarrow \eta + d\rho$ ,  $\rho$  eine  $(p-2)$ -Form, lassen  $d\eta$  unverändert.

### Das Integral einer $n$ -Form

Auf  $M$  sei eine **Orientierung** gegeben: ein Atlas “positiv orientierter” Karten, d.h.

$$\det \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right) > 0 \quad (1.31)$$

bei jedem Kartenwechsel. (Nicht jede differenzierbare Mannigfaltigkeit ist orientierbar; Beispiel: Das Möbius-Band). Eine  $n$ -Form  $\omega$ , ( $n = \dim M$ ),

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_n} \frac{1}{n!} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \underbrace{\omega_{1 \dots n}}_{\omega(x)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

ist gegeben durch **eine** Komponente  $\omega(x)$ , die sich bei Kartenwechsel transformiert gemäss

$$\bar{\omega}(\bar{x}) = \bar{\omega}_{1 \dots n} = \omega_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^1} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial \bar{x}^n} = \omega(x) \det \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right). \quad (1.32)$$

Das **Integral** einer  $n$ -Form ist wie folgt erklärt. Falls  $\text{supp } \omega$  einer (positiven) Karte enthalten ist, setzen wir

$$\int_M \omega = \int dx^1 \dots dx^n \omega(x^1 \dots x^n).$$

Für  $\text{supp } \omega$  im Durchschnitt zweier Karten ist dann  $\int \omega$  kartenunabhängig, wegen (1.31, 1.32) und

$$\int dx^1 \dots dx^n \omega(x) = \int d\bar{x}^1 \dots d\bar{x}^n \omega(x) \left| \det \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right) \right|.$$

Für beliebige  $\omega$  mit kompaktem Träger definiert man

$$\int_M \omega = \sum_k \int h_k \omega. \quad (1.33)$$

Hier ist  $\{h_k\}$  eine Zerlegung der 1 auf  $M$ :

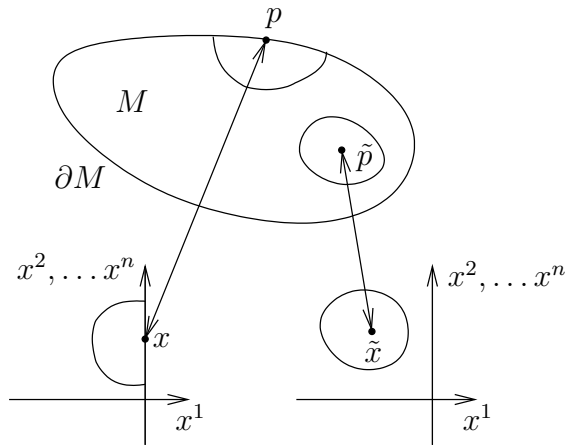
$$h_k \in \mathcal{F}; \quad h_k \geq 0; \quad \sum_k h_k = 1$$

so, dass jedes  $\text{supp } h_k$  in je einer Karte liegt. (Solche Zerlegungen existieren). Dass (1.33) unabhängig von der Wahl der Zerlegung ist, sieht man durch Betrachtung der Verfeinerung  $\{h_k g_l\}$  zweier Zerlegungen  $\{h_k\}, \{g_l\}$ .

**Bemerkung:** Bei Umkehrung der Orientierung ändert  $\int_M \omega$  das Vorzeichen.

### Der Satz von Stokes

Eine ( $n$ -dimensionale) **Mannigfaltigkeit mit Rand** ist lokal homeomorph zu  $\mathbb{R}^{n-} = \{(x^1 \dots x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0\}$ :



Der Rand  $\partial M$  besteht aus jenen  $p \in M$ , deren Bild  $x$  in einer (und somit jeder) Karte  $x^1 = 0$  erfüllt.

**Orientierung des Randes:** Eine Orientierung auf  $M$  induziert eine auf  $\partial M$ : Ist  $(x^1 \dots x^n)$  eine positive Karte auf  $U \subset M$ , so ist  $(x^2 \dots x^n)$  eine auf  $\partial M \cap U$ . (Zeige die Konsistenz dieser Definition).

**Satz von Stokes:** Sei  $M$ , ( $\dim M = n$ ), eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt für jede  $(n-1)$ -Form  $\omega$ :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (1.34)$$

**Beweis:** Sei  $\{h_k\}$  eine Zerlegung der 1 auf  $M$ . Wir zerlegen  $\omega = \sum_k h_k \omega$ . Dann muss (1.34) in zwei Spezialfällen bewiesen werden:

(a)  $\omega$  mit  $\text{supp } \omega$  in einer Karte ohne Rand. Dann ist (vgl. (1.26))

$$\int_M d\omega = \int dx^1 \dots dx^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \omega_{1 \dots \hat{k} \dots n, k} = 0.$$

(b)  $\omega$  mit  $\text{supp } \omega$  in einer Karte mit Rand. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int dx^1 \dots dx^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \omega_{1 \dots \hat{k} \dots n, k} = \int dx^1 \dots dx^n \omega_{2 \dots n, 1} \\ &= \int dx^2 \dots dx^n \omega(0, x^2, \dots, x^n) = \int_{\partial M} \omega, \end{aligned}$$

da  $(x^2 \dots x^n)$  eine positiv orientierte Karte von  $\partial M$  ist.  $\square$

### Das innere Produkt einer $p$ -Form

Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ . Für jede  $p$ -Form  $\Omega$  sei

$$(i_X \Omega)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \Omega(X, X_1, \dots, X_{p-1}), \quad (1.35)$$

(= 0 für  $p = 0$ ).

### Eigenschaften

- (a)  $i_X$  ist eine lineare Abbildung der  $p$ -Formen auf  $(p-1)$ -Formen
- (b)  $i_X(\Omega^1 \wedge \Omega^2) = (i_X \Omega^1) \wedge \Omega^2 + (-1)^{p_1} \Omega^1 \wedge i_X \Omega^2$
- (c)  $i_X^2 = 0$
- (d)  $i_X df = Xf$ , ( $f \in \mathcal{F}$ )
- (e)  $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$

**Beweis:** (a-d) durch Nachrechnen. Es genügt (e) zu verifizieren auf:

0-Formen  $f$ : Beide Seiten sind gleich  $Xf$ .

1-Formen der Form  $df$ : Wegen (1.30) sind beide Seiten gleich  $d(Xf)$ .  $\square$

### Anwendungen:

#### 1) Der Satz von Gauss:

Die Mannigfaltigkeit  $M$  ist orientiert genau dann, falls es eine  $n$ -Form  $\eta$  gibt, mit  $\eta_p \neq 0$  für alle  $p \in M$  ("Volumenform"). Sei  $X$  ein Vektorfeld. Dann ist  $d(i_X \eta)$  eine  $n$ -Form und eine Funktion  $\text{div}_\eta X \in \mathcal{F}$  ist definiert durch

$$(\text{div}_\eta X)\eta = d(i_X \eta) \quad (1.36)$$

(auch =  $L_X \eta$ , wegen (e)). Aus dem Satz von Stokes folgt dann unmittelbar der **Satz von Gauss:**

$$\int_M (\text{div}_\eta X)\eta = \int_{\partial M} i_X \eta.$$

In einer Karte:

$$\begin{aligned} (i_X \eta)_{i_2 \dots i_n} &= X^a \eta_{a i_2 \dots i_n} \\ d(i_X \eta)_{1 \dots n} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \underbrace{(X^a \eta_{a 1 \dots \hat{k} \dots n})}_{(-1)^{k-1} X^k \eta_{1 \dots n}}, k = (X^k \eta_{1 \dots n}), k \end{aligned}$$



also, wenn wir wieder  $\eta(x) \equiv \eta_{1\dots n}(x)$  setzen,

$$\operatorname{div}_\eta X = \frac{1}{\eta}(\eta X^k)_{,k} . \quad (1.37)$$

Für die Auswertung des Flussintegrals  $\int_{\partial D} i_X \eta$  (Nur Randkarten, s. Fig. auf S. 13, tragen bei) erhalten wir:

$$\int_{\partial M} i_X \eta = \int dx^2 \dots dx^n (i_X \eta)_{2\dots n} (0, x^2, \dots, x^n) = \int dx^2 \dots dx^n (\eta X^1)(0, x^2, \dots, x^n)$$

wegen der positiven Orientierung der Karte  $(x^2, \dots, x^n)$  von  $\partial M$ .

2) **Beweis** des Lemmas von Poincaré: Durch Verwendung einer Karte können wir annehmen  $U \subset \mathbb{R}^n$  und identifizieren  $T_x \cong \mathbb{R}^n$ . Wir werden eine Abbildung  $T$  der  $p$ - auf  $(p-1)$ -Formen auf  $U$  konstruieren mit

$$(T \circ d + d \circ T)\omega = \omega$$

( $\omega$ : beliebige  $p$ -Form). Falls  $d\omega = 0$ , so folgt  $d\eta = \omega$  für  $\eta = T\omega$ , wie behauptet. Konstruktion von  $T$ :

$$(T\omega)_x = \int_0^1 t^{p-1} (i_X \omega)_{tx} dt , \quad (x \in U) ,$$

wobei  $X$  das Vektorfeld mit Komponenten  $X^i(x) = x^i$  ist. Es folgt mit (e)

$$[(Td + dT)\omega]_x = \int_0^1 t^{p-1} (L_X \omega)_{tx} dt . \quad (1.38)$$

Dabei ist  $L_X \omega = (x\nabla)\omega + p\omega$ , denn wegen (1.14) ist

$$(L_X \omega)_{i_1 \dots i_p} = x^k \omega_{i_1 \dots i_p, k} + \sum_{p=1}^p \omega_{i_1 \dots k \dots i_p} \underbrace{X^k}_{\delta^k_{i_j}} .$$

↑  
j-te Stelle

Ferner ist  $[(x\nabla)\omega]_{tx} = tx(\nabla\omega)_{tx} = t \frac{d}{dt} \omega_{tx}$ , also

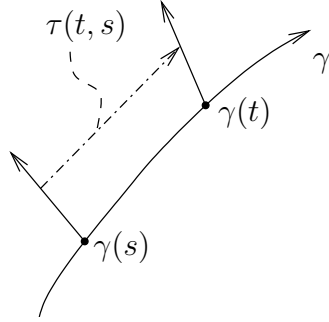
$$t^{p-1} (L_X \omega)_{tx} = t^p \frac{d}{dt} \omega_{tx} + p t^{p-1} \omega = \frac{d}{dt} (t^p \omega_{tx})$$

und (1.38) ist gleich  $\omega_x$ . □

## 2. Affine Zusammenhänge

### 1. Parallelverschiebung und kovariante Ableitung

**Definition:** Längs jeder Kurve  $\gamma$  in  $M$  sei ein “Paralleltransport” von Vektoren definiert.



$$\tau(t, s) : T_{\gamma(s)} \rightarrow T_{\gamma(t)}$$

ist eine lineare Abbildung mit

$$\tau(t, t) = 1, \quad \tau(t, s)\tau(s, r) = \tau(t, r). \quad (2.1)$$

In einer beliebigen Karte soll gelten

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \tau^i_k(t, s) \right|_{t=s} = -\Gamma^i_{lk}(\gamma(s)) \dot{\gamma}^l(s). \quad (2.2)$$

**Bemerkungen:** 1) Der Lie-Transport  $\varphi_{t*}$  längs einer Integrialkurve von  $Y$  ist **nicht** von der Form (2.2):

$$\left. \frac{d}{dt} (\varphi_{t*})^i_k \right|_{t=0} = Y^i_{,k}.$$

2) Ein parallel verschobener Vektor  $X(t) = \tau(t, s)X(s) \in T_{\gamma(t)}$  erfüllt in einer Karte die Differentialgleichung

$$\dot{X}^i(s) = -\Gamma^i_{lk}(\gamma(s)) \dot{\gamma}^l(s) X^k(s). \quad (2.3)$$

Die  $\dot{X}^i$  sind nicht die Komponenten eines Vektors, also die **Christoffel-Symbole**  $\Gamma^i_{lk}(x)$  nicht jene eines Tensors (s. unten).

3) Gleichung (2.3) besagt, dass die  $\dot{X}^i$  linear in  $\dot{\gamma}^l$ ,  $X^k$  sind. Wegen dieser Eigenschaft (die unabhängig von der Karte ist) hängt  $\tau(t, s)$  nicht von der Parametrisierung von  $\gamma$  ab (aber auch nicht bloss von den Endpunkten  $\gamma(s)$ ,  $\gamma(t)$ ).

4) Wegen (2.1) ist auch

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \tau^i_k(t, s) \right|_{s=t} = \Gamma^i_{lk}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^l(t). \quad (2.4)$$

5) Bei Kartenwechsel ist

$$\bar{\tau}^i_k(t, s) = \tau^p_q(t, s) \left. \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \right|_{\gamma(t)} \left. \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \right|_{\gamma(s)}.$$

Durch Anwendung von  $\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=t}$  und (2.4) folgt

$$\bar{\Gamma}^i_{lk} \dot{\gamma}^l = \Gamma^p_{rq} \underbrace{\dot{\gamma}^r}_{\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} \dot{\gamma}^l} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \delta^p_q \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l} \dot{\gamma}^l,$$

also:

$$\bar{\Gamma}^i_{lk}(\bar{x}) = \Gamma^p_{rq}(x) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l}. \quad (2.5)$$

Umgekehrt bestimmt ein Feld  $\Gamma^i_{lk}(x)$  mit diesem Transformationsverhalten eine Parallelverschiebung über die Differentialgleichung (2.2) für jede vorgegebene Kurve  $\gamma(t)$ .

**Paralleltransport von Tensoren** soll erfüllen

$$\begin{aligned}\tau(t, s)(T \otimes S) &= (\tau(t, s)T) \otimes (\tau(t, s)S) , \\ \tau(t, s)(\text{tr } T) &= \text{tr}(\tau(t, s)T) , \quad (\text{tr} = \text{beliebige Spur}) \\ \tau(t, s)c &= c , \quad (c \in \mathbb{R}) ,\end{aligned}$$

also z.B. für einen Kovektor  $\omega$

$$\langle \tau(t, s)\omega, \tau(t, s)X \rangle_{\gamma(t)} = \langle \omega, X \rangle_{\gamma(s)}$$

und für einen Tensor  $T$  vom Typ  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(\tau(t, s)T)(\tau(t, s)\omega, \tau(t, s)X) = T(\omega, X) . \quad (2.6)$$

In Komponenten:

$$(\tau(t, s)T)^i_k = T^\alpha_\beta \tau^\alpha_i(t, s) \tau_k^\beta(t, s)$$

mit  $(\tau_i^k)$  invers-transponiert zu  $(\tau^i_k)$ .

Zu  $\tau$  gehört die **kovariante Ableitung**  $\nabla_X$  ( $X$ : Vektorfeld,  $T$ : Tensorfeld)

$$(\nabla_X T)_p = \left. \frac{d}{dt} \tau(0, t) T_{\gamma(t)} \right|_{t=0} , \quad (2.7)$$

wobei  $\gamma(t)$  ein beliebiger Weg durch  $p = \gamma(0)$  mit  $\dot{\gamma}(0) = X_p$  ist.

**Eigenschaften**

- (a)  $\nabla_X$  ist eine lineare Abbildung von Tensorfeldern in Tensorfelder vom gleichen Typ
- (b)  $\nabla_X f = Xf$
- (c)  $\nabla_X(\text{tr } T) = \text{tr}(\nabla_X T)$ , (tr=beliebige Spur ohne Kontraktion über  $X$ )
- (d)  $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$

Sie folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von  $\tau(t, s)$ . Für eine 1-Form  $\omega$  ist

$$\begin{aligned}(\nabla_X \omega)(Y) &= \text{tr}(\nabla_X \omega \otimes Y) = \text{tr} \nabla_X(\omega \otimes Y) - \text{tr}(\omega \otimes \nabla_X Y) \\ &= \nabla_X \text{tr}(\omega \otimes Y) - \omega(\nabla_X Y) = X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y) .\end{aligned} \quad (2.8)$$

Die allgemeine Differentiationsregel schreiben wir aus für ein Tensorfeld vom Typ  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(\nabla_X T)(\omega, Y) = XT(\omega, Y) - T(\nabla_X \omega, Y) - T(\omega, \nabla_X Y) . \quad (2.9)$$

Aus (2.8, 2.9) ist ersichtlich, dass die Operation  $\nabla_X$  dank (a–d) vollständig bestimmt ist durch ihre Wirkung auf Vektorfelder  $Y$ . Diese ist ein **affiner Zusammenhang**:

- (i)  $\nabla_X Y$  ist ein Vektorfeld, linear in  $X, Y$
- (ii)  $\nabla_X Y$  ist  $f$ -linear in  $X$ :

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y , \quad (f \in \mathcal{F}) . \quad (2.10)$$

$$(iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

**Beweis:** (iii) ist ein Spezialfall von (d); (ii) verifiziert man anhand der Darstellung in einer Karte:

$$(\nabla_X Y)^i = \left. \frac{d}{dt} \tau^i_k(0, t) Y^k(x^1 + tX^1 + O(t^2), \dots) \right|_{t=0} = (Y^i_{,l} + \Gamma^i_{lk} Y^k) X^l \quad (2.11)$$

unter Verwendung von (2.4). □

Umgekehrt stiftet ein affiner Zusammenhang einen Paralleltransport (bijektiv): In jeder Karte gilt in der kanonischen Basis

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X(Y^i e_i) = (XY^i) e_i + Y^k (\nabla_X e_k) \\ &= Y^i_{,l} X^l e_i + Y^k X^l \nabla_{e_l} e_k \end{aligned}$$

was nach der **Definition**

$$\Gamma^i_{lk}(x) = \langle e^i, \nabla_{e_l} e_k \rangle \quad (2.12)$$

mit (2.11) übereinstimmt. Man kann zeigen, dass (2.12) das Transformationsverhalten (2.5) besitzt, also eine Parallelverschiebung definiert. Diese bijektive Zuordnung äussert sich auch wie folgt: Ein Vektorfeld  $Y(s) \equiv Y(\gamma(s))$  auf einer Kurve mit Tangentialvektor  $X(\gamma(s))$  wird längs dieser parallel transportiert, genau dann falls  $\nabla_X Y = 0$ .

## Die kovariante Ableitung $\nabla$

**Beispiel:** Nach (2.9) ist  $(\nabla_X T)(\omega, Y)$   $f$ -linear in allen 3 Variablen  $\omega, Y, X$ , definiert also ein Tensorfeld vom Typ  $\binom{1}{2}$  durch

$$(\nabla T)(\omega, Y, X) = (\nabla_X T)(\omega, Y) .$$

Die Komponenten-Notation

$$T^i_{k;l} \equiv (\nabla T)^i_{kl}$$

ist üblich, aber nicht ungefährlich: Für festes  $i, k$  ist  $T^i_{k;l}$  nicht bestimmt durch die eine Komponente  $T^i_k(x)$ ! Beispiele:

$$\begin{aligned} Y^i_{;k} &= Y^i_{,k} + \Gamma^i_{kl} Y^l , \\ \omega_{i;k} &= \omega_{i,k} - \omega_l \Gamma^l_{ki} , \\ T^i_{k;r} &= T^i_{k,r} + \Gamma^i_{rl} T^l_k - \Gamma^l_{rk} T^i_l . \end{aligned}$$

## 2. Torsion und Krümmung

Auf  $M$  sei ein affiner Zusammenhang gegeben:  $X, Y, Z$  seien Vektorfelder.

**Definitionen:**

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] , \\ R(X, Y) &= \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} . \end{aligned}$$

Zunächst ist die **Torsion**  $T(X, Y)$  ein Vektorfeld und die **Krümmung**  $R(X, Y)$  eine lineare Abbildung von Tensorfeldern in solche vom gleichen Typ. Sie haben aber einen **Tensorcharakter:**

- $T(X, Y)$  ist antisymmetrisch und  $f$ -linear in  $X, Y$ , definiert also einen Tensor vom Typ  $\binom{1}{2}$  durch

$$(\omega, X, Y) \mapsto \langle \omega, T(X, Y) \rangle .$$

- $R(X, Y)$  ist antisymmetrisch in  $X, Y$ . Das Vektorfeld  $R(X, Y)Z$  ist  $f$ -linear in  $X, Y, Z$ . Somit bestimmt  $R$  einen Tensor vom Typ  $\binom{1}{3}$  (**Riemann-Tensor**):

$$(\omega, Z, X, Y) \mapsto \langle \omega, R(X, Y)Z \rangle \equiv R^i{}_{jkl}\omega_i Z^j X^k Y^l .$$

**Beweis:** Es ist

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X .$$

Damit ist

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - \underline{(Yf)X} - f[X, Y] + \underline{(Yf)X} = fT(X, Y) , \\ R(fX, Y) &= f\nabla_X \nabla_Y \underline{-\nabla_Y f \nabla_X} - f\nabla_{[X, Y]} + \underline{(Yf)\nabla_X} = fR(X, Y) \\ &\quad - f\nabla_Y \nabla_X - \underline{(Yf)\nabla_X} \end{aligned}$$

mit Kürzung der unterstrichenen Terme. Die  $f$ -Linearität in  $Z$  von  $R(X, Y)Z$  folgt aus (d) im nächsten Satz.  $\square$

**Satz:**

- (a)  $R(X, Y)f = 0$
- (b)  $R(X, Y)(S \otimes T) = (R(X, Y)S) \otimes T + S \otimes (R(X, Y)T)$
- (c)  $\text{tr } R(X, Y)T = R(X, Y) \text{tr } T$ , (tr ohne Kontraktion über  $X$  oder  $Y$ )
- (d)

$$\langle \omega, R(X, Y)Z \rangle = -\langle R(X, Y)\omega, Z \rangle \quad (2.13)$$

**Beweis:** (a)  $R(X, Y)f = X(Yf) - Y(Xf) - [X, Y]f = 0$ . (b) folgt aus der Produktregel für  $\nabla_X$  (Eigenschaft (d)). (c) siehe (c) für  $\nabla_X$ . (d) Aus (a-c) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= R(X, Y)\langle \omega, Z \rangle = R(X, Y) \text{tr}(Z \otimes \omega) = \text{tr } R(X, Y)(Z \otimes \omega) \\ &= \text{tr}(R(X, Y)Z \otimes \omega) + \text{tr}(Z \otimes R(X, Y)\omega) = \langle \omega, R(X, Y)Z \rangle + \langle R(X, Y)\omega, Z \rangle . \end{aligned}$$

$\square$

**Komponenten** (bzgl. kanonischer Basis  $e_i = \partial/\partial x^i$ ,  $e^i = dx^i$ ). Aus  $[e_i, e_j] = 0$  folgt

$$T^k{}_{ij} = \langle e^k, \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i \rangle = \Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji} . \quad (2.14)$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} T = 0 &\iff \Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji} , \\ R^i{}_{jkl} &= \langle e^i, (\nabla_{e_k} \nabla_{e_l} - \nabla_{e_l} \nabla_{e_k})e_j \rangle = \langle e^i, \nabla_{e_k}(\Gamma^s{}_{lj}e_s) - \nabla_{e_l}(\Gamma^s{}_{kj}e_s) \rangle \\ &= \Gamma^i{}_{lj,k} - \Gamma^i{}_{kj,l} + \Gamma^s{}_{lj}\Gamma^i{}_{ks} - \Gamma^s{}_{kj}\Gamma^i{}_{ls} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Bianchi Identitäten** für den Spezialfall **Torsion** = 0:

$$\begin{aligned} 1) & \quad R(X, Y)Z + \text{zykl.} = 0 , \\ 2) & \quad (\nabla_X R)(Y, Z) + \text{zykl.} = 0 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

**Beweis:** 1) Wir schreiben  $X_1 = X$ ,  $X_2 = Y$ ,  $X_3 = Z$  und unterdrücken eine Summe über  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned}
 R(X_i, X_{i+1})X_{i+2} &= \underbrace{\nabla_{X_i} \nabla_{X_{i+1}} X_{i+2}} - \underbrace{\nabla_{X_{i+1}} \nabla_{X_i} X_{i+2}} - \nabla_{[X_i, X_{i+1}]} X_{i+2} \\
 \text{zykl. Vertauschung:} & \quad \underbrace{\nabla_{X_{i+2}} \nabla_{X_j} X_{i+1}} \quad \underbrace{\nabla_{X_{i+2}} \nabla_{X_{i+1}} X_i} \\
 T = 0 : & \quad \nabla_{X_{i+2}} [X_i, X_{i+1}]
 \end{aligned}$$

also wegen (1.2)  $R(X_i, X_{i+1})X_{i+2} = [X_{i+2}, [X_i, X_{i+1}]] = 0$ .

2)

$$(\nabla_{X_i} R)(X_{i+1}, X_{i+2}) = \begin{array}{l} \nabla_{X_i} R(X_{i+1}, X_{i+2}) - R(X_{i+1}, X_{i+2}) \nabla_{X_i} \\ -R(\nabla_{X_i} X_{i+1}, X_{i+2}) - R(X_{i+1}, \nabla_{X_i} X_{i+2}), \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} I \\ II \end{array} \right.$$

wobei dank zyklischer Vertauschung

$$\begin{aligned}
 I &= \nabla_{X_i} \nabla_{X_{i+1}} \nabla_{X_{i+2}} - \nabla_{X_i} \nabla_{X_{i+2}} \nabla_{X_{i+1}} - \nabla_{X_i} \nabla_{[X_{i+1}, X_{i+2}]} \\
 &\quad - \nabla_{X_{i+1}} \nabla_{X_{i+2}} \nabla_{X_i} + \nabla_{X_{i+2}} \nabla_{X_{i+1}} \nabla_{X_i} + \nabla_{[X_{i+1}, X_{i+2}]} \nabla_{X_i} \\
 &= R([X_{i+1}, X_{i+2}], X_i) + \underbrace{\nabla_{[[X_{i+1}, X_{i+2}], X_i]}}_{=0}, \\
 II &= -R(\nabla_{X_{i+1}} X_{i+2}, X_i) + R(\nabla_{X_i} X_{i+2}, X_{i+1}) \\
 &= -R(\nabla_{X_{i+1}} X_{i+2}, X_i) + R(\nabla_{X_{i+2}} X_{i+2}, X_i) = -R([X_{i+1}, X_{i+2}], X_i).
 \end{aligned}$$

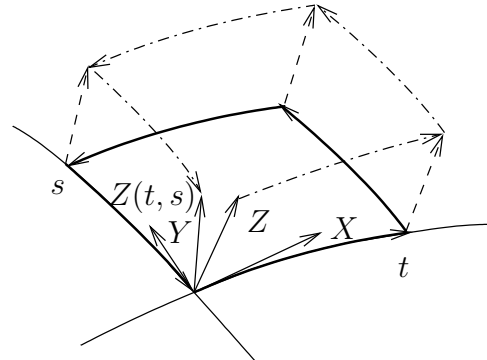
□

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned}
 1) & \quad R^i{}_{jkl} + \text{zykl. } (jkl) = 0, \\
 2) & \quad R^i{}_{jkl;m} + \text{zykl. } (klm) = 0.
 \end{aligned}$$

### Zur Bedeutung der Krümmung

Seien  $X, Y$  Vektorfelder, mit zugehörigen Flüssen  $\varphi_t, \psi_s$ , die  $[X, Y] = 0$  erfüllen. Damit ist  $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$  und  $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ , s. (1.16). Sei  $\tau_X(t) : T_p \rightarrow T_{\varphi_t(p)}$  der Paralleltransport längs der Integralkurve  $\varphi_t(p)$ , ( $0 \leq t' \leq t$ ), von  $X$ ; und analog für  $\tau_Y(s)$ . Nach (2.7) ist  $(d/dt)\tau_X(t)Z|_{t=0} = -\nabla_X Z$  für ein Vektorfeld  $Z$ . Wir transportieren  $Z$  längs einer kleinen Schleife, die aus Integralkurven besteht, und erhalten danach



$$Z(t, s) := \tau_Y(-s)\tau_X(-t)\tau_Y(s)\tau_X(t)Z.$$

Da  $Z(t, s) = Z$  für  $t = 0$  oder  $s = 0$ , ist der niedrigste Term der Taylor-Entwicklung von  $Z(t, s) - Z$  proportional zu  $ts$ . Mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}Z(t, s)\Big|_{t=0} &= \tau_Y(-s)\nabla_X\tau_Y(s)Z - \nabla_XZ, \\ \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}Z(t, s)\Big|_{t=s=0} &= (\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y)Z = -R(X, Y)Z.\end{aligned}$$

ist

$$Z(t, s) = Z - tsR(X, Y)Z + O(|(t, s)|^3) :$$

Die Krümmung misst die Abweichung eines Vektors vor und nach dem Transport längs der Schleife.

### 3. Die Cartanschen Strukturgleichungen

Es sei  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $(e^1, \dots, e^n)$  ein beliebiges duales Basispaar von (lokalen) Vektorfeldern, bzw. 1-Formen. Für einen gegebenen Zusammenhang  $\nabla$  definiert man die **Zusammenhangsformen**  $\omega^i_k$  durch

$$\omega^i_k(X) = \langle e^i, \nabla_X e_k \rangle, \quad (2.17)$$

bzw.  $\nabla_X e_k = \omega^i_k(X)e_i$ . Die  $\omega^i_k$  sind 1-Formen wegen (2.10). Umgekehrt definiert jeder Satz von 1-Formen  $\omega^i_k$  einen Zusammenhang durch

$$\nabla_X Y = \nabla_X(Y^k e_k) = \underbrace{[XY^i + Y^k \omega^i_k(X)]}_{(\nabla_X Y)^i} e_i. \quad (2.18)$$

Aus  $\nabla_X \langle e^i, e_k \rangle = \nabla_X \delta^i_k = 0$  folgt

$$\langle \nabla_X e^i, e_k \rangle = -\omega^i_k(X).$$

Dadurch kann man die kovariante Ableitung eines beliebigen Tensorfeldes in diesem Basispaar ausdrücken, z.B. einer 1-Form  $\Omega$

$$(\nabla_X \Omega)_i = X\Omega_i - \omega^i_k(X)\Omega_k.$$

**Bemerkungen:** 1) Zum Basispaar  $\bar{e}_i = \phi_i^k e_k$ ,  $\bar{e}^i = \phi^i_k e^k$  gehören die Zusammenhangsformen

$$\bar{\omega}^i_k = \phi_i^l \phi_k^r \omega^l_r + \phi_i^l d\phi_k^l.$$

2) In einer kanonischen Basis ist (vgl. (2.12))

$$\omega^i_k(e_l) = \Gamma^i_{lk}, \quad (2.19)$$

also

$$\omega^i_k(X) = \Gamma^i_{lk} X^l, \quad \text{d.h.} \quad \omega^i_k = \Gamma^i_{lk} dx^l.$$

**Definition**

$$\begin{aligned}T^i(X, Y) &= \langle e^i, T(X, Y) \rangle, & (\text{Torsionsformen}), \\ \Omega^i_k(X, Y) &= \langle e^i, R(X, Y)e_k \rangle, & (\text{Krümmungsformen}).\end{aligned}$$

Diese 2-Formen sind direkt durch die Zusammenhangsformen bestimmt:

### Cartansche Strukturgleichungen

$$\begin{aligned} T^i &= de^i + \omega^i_k \wedge e^k, \\ \Omega^i_k &= d\omega^i_k + \omega^i_l \wedge \omega^l_k. \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Beweis:** Aus (1.21) folgt

$$de^i(X, Y) = Xe^i(Y) - Ye^i(X) - e^i([X, Y]),$$

aus (2.18), d.h. aus

$$e^i(\nabla_X Y) = Xe^i(Y) + \omega^i_k \otimes e^k(X, Y),$$

folgt hingegen

$$T^i(X, Y) = (\omega^i_k \wedge e^k)(X, Y) + \underbrace{Xe^i(Y) - Ye^i(X) - e^i([X, Y])}_{de^i(X, Y)}$$

da  $\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1$  für 1-Formen (vgl. (1.18)). Die 2. Strukturgleichung ergibt sich analog aus (2.17), d.h.

$$\nabla_Y e_k = \omega^l_k(Y) e_l$$

und (2.18) folgt

$$e^i(\nabla_X \nabla_Y e_k) = X\omega^i_k(Y) + \omega^i_l(X)\omega^l_k(Y)$$

und somit

$$\begin{aligned} \Omega^i_k(X, Y) &= e^i((\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})e_k) \\ &= (\omega^i_l \wedge \omega^l_k)(X, Y) + \underbrace{X\omega^i_k(Y) - Y\omega^i_k(X) - \omega^i_k([X, Y])}_{d\omega^i_k(X, Y)}. \end{aligned}$$

□

### Komponenten

$$T^i_{jk} = T^i(e_j, e_k); \quad R^i_{jkl} = \Omega^i_j(e_k, e_l), \quad (2.21)$$

bzw.

$$T^i = \frac{1}{2} T^i_{jk} e^j \wedge e^k; \quad \Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} e^k \wedge e^l.$$

**Bemerkung:** In einer kanonischen Basis (d.h.,  $e^i = dx^i$ ,  $de^i = 0$ ) findet man mit (2.21, 2.20, 2.19) wieder (2.14, 2.15).

Zum Schluss schreiben wir nochmals die **Bianchi Identitäten**, wieder für **Torsion** = **0**, diesmal aber im Cartanschen Formalismus:

- 1)  $\Omega^i_k \wedge e^k = 0,$
- 2)  $d\Omega^i_k = \Omega^i_l \wedge \omega^l_k - \omega^i_l \wedge \Omega^l_k.$

**Beweis:** 1) Die äussere Ableitung der ersten Gl. (2.20) liefert wegen  $T^i = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= d(\omega^i_k \wedge e^k) = \underbrace{d\omega^i_k}_{(2.20): \Omega^i_k - \omega^i_l \wedge \omega^l_k} \wedge e^k - \omega^i_k \wedge \underbrace{de^k}_{-\omega^l_k \wedge e^l} \end{aligned}$$



also

$$\Omega^i_k \wedge e^k = \omega^i_l \wedge \omega^l_k \wedge e^k - \omega^i_k \wedge \omega^l_k \wedge e^l = 0 .$$

2) Die äussere Ableitung der zweiten Gl. (2.20) liefert

$$d\Omega^i_k = \underbrace{d\omega^i_l}_{\Omega^i_l - \omega^i_j \wedge \omega^j_l} \wedge \omega^l_k - \omega^i_l \wedge \underbrace{d\omega^l_k}_{\Omega^l_k - \omega^l_j \wedge \omega^j_k} = \Omega^i_l \wedge \omega^l_k - \omega^i_l \wedge \Omega^l_k .$$

□

Man überprüft z.B. durch Ausschreiben in einer kanonischen Basis, dass obige Form der Bianchi Identitäten mit der früher gegebenen übereinstimmt.

### 3. Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

---

#### 1. Metrik

$M$  sei ausgerüstet mit einer **pseudo-Riemannschen Metrik**: einem symmetrischen, nicht ausgearteten Tensorfeld

$$g(X, Y) \equiv (X, Y)$$

vom Typ  $\binom{0}{2}$ . Nicht ausgeartet bedeutet, dass für jedes  $p \in M$  gilt  $(X, Y \in T_p)$

$$g_p(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in T_p \Rightarrow X = 0.$$

Im Komponenten:

$$(X, Y) = g_{ik} X^i Y^k$$

mit  $g_{ik} = g_{ki}$  und  $\det(g_{ik}) \neq 0$ . Positivität (und damit eine Riemannsche Metrik) wird nicht vorausgesetzt.

Mit Hilfe der Metrik können wir Vektorfelder mit 1-Formen identifizieren:

$$X \mapsto gX, \quad \omega \mapsto g^{-1}\omega \tag{3.1}$$

vermittels

$$\langle gX, Y \rangle = (X, Y), \quad \langle g^{-1}\omega, Y \rangle = \langle \omega, Y \rangle.$$

Die Beziehungen (3.1) heissen Runter- bzw. Raufziehen der Indizes, denn für  $\tilde{X} = gX$ ,  $\tilde{\omega} = g^{-1}\omega$  ist

$$\tilde{X}_i = g_{ik} X^k, \quad \tilde{\omega}^i = g^{ik} \omega_k,$$

wobei  $(g^{ik})$  die Inverse der Matrix  $(g_{ik})$  bezeichnet. Ebenso lassen sich dann die verschiedenen Typen von Tensorfeldern gleicher Stufe identifizieren, in Komponenten (z.B.):

$$T^i_k = T_{lk} g^{il} = T^{il} g_{lk}.$$

Ist  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis für  $T_p$ , so werden dank (3.1) auch die Kovektoren der dualen Basis  $(e^1, \dots, e^n)$  zu Vektoren, und zwar ist  $e_i = g_{ij} e^j$ .

#### 2. Der Riemann Zusammenhang

Durch die Metrik ist ein besonderer affiner Zusammenhang ausgezeichnet, der **Riemann** (oder **Levi-Civita**) **Zusammenhang**:

**Satz:** Es gibt genau einen affinen Zusammenhang mit Torsion Null und

$$\nabla g = 0. \tag{3.2}$$

Dieser ist gegeben durch

$$2(\nabla_X Y, Z) = X(Y, Z) + Y(Z, X) - Z(X, Y) - ([Y, Z]X) + ([Z, X]Y) + ([X, Y]Z). \tag{3.3}$$

**Beweis: Eindeutigkeit:** Wegen (3.2) ist

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla g(X_i, X_{i+1}, X_{i+2}) = (\nabla_{X_{i+2}} g)(X_i, X_{i+1}) \\ &= X_{i+2} g(X_i, X_{i+1}) - g(\nabla_{X_{i+2}} X_i, X_{i+1}) - \underbrace{g(X_i, \nabla_{X_{i+2}} X_{i+1})}_{g(\nabla_{X_{i+2}} X_{i+1}, X_i)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Bildet man  $(3.4)_{i+1} + (3.4)_{i+2} - (3.4)_i$ , so folgt

$$\begin{aligned}
0 = & X_i g(X_{i+1}, X_{i+2}) + X_{i+1} g(X_{i+2}, X_i) - X_{i+2} g(X_i, X_{i+1}) \\
& - g(\underbrace{\nabla_{X_{i+1}} X_{i+2} - \nabla_{X_{i+2}} X_{i+1}}_{[X_{i+1}, X_{i+2}]}, X_i) + g(\underbrace{\nabla_{X_{i+2}} X_i - \nabla_{X_i} X_{i+2}}_{[X_{i+2}, X_i]}, X_{i+1}) \\
& - g(\underbrace{\nabla_{X_i} X_{i+1} + \nabla_{X_{i+1}} X_i}_{2\nabla_{X_i} X_{i+1} - [X_i, X_{i+1}]}, X_{i+2}), \quad (3.5)
\end{aligned}$$

(Unterklammerung benützt Torsion = 0), was für  $X_1 = X, Y_2 = Y, X_3 = Z$  mit (3.3) übereinstimmt. Da  $g$  nicht ausgeartet ist, ist dadurch  $\nabla_X Y$  bestimmt.

**Existenz:** Durch (3.3) ist ein Vektorfeld  $\nabla_X Y$  definiert. Man verifiziert, dass es sich bei  $\nabla$  um einen Zusammenhang handelt, so z.B. die  $f$ -Linearität in  $X$ :

$$\begin{aligned}
2(\nabla_{fX} Y, Z) &= fX(Y, Z) + \underbrace{Y(fX, Z)}_{fY(X, Z) + (Yf)(X, Z)} - \underbrace{Z(fX, Y)}_{fZ(X, Y) + (Zf)(X, Y)} \\
&\quad - ([Y, Z], fX) + (\underbrace{[Z, fX]}_{f[Z, X] + (Zf)X}, Y) + (\underbrace{[fX, Y]}_{f[X, Y] - (Yf)X}, Z) \\
&= 2f(\nabla_X Y, Z),
\end{aligned}$$

d.h.  $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ . Das Verschwinden der Torsion ist ersichtlich aus

$$2(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = 2([X, Y], Z).$$

Ferner folgt aus der zu (3.3) äquivalenten Gleichung (3.5), durch Bildung von  $(3.5)_{i+1} + (3.5)_{i+2}$ , die Gleichung  $(3.4)_i$ , welche ihrerseits äquivalent ist zu (3.2).  $\square$

In einer Karte lautet der Riemannsche Zusammenhang

$$\Gamma^i_{lk} = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{lj,k} + g_{kj,l} - g_{lk,j}), \quad (3.6)$$

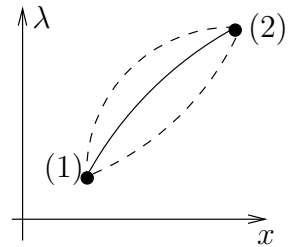
denn für  $X = \partial/\partial x^l, Y = \partial/\partial x^k, Z = \partial/\partial x^j = g_{ij} dx^i$  lautet (3.3) (vgl. (2.12))

$$2g_{ij} \Gamma^i_{lk} = g_{kj,l} + g_{jl,k} - g_{lk,j}.$$

### Geodäten:

Wir definieren Geodäten  $x(\lambda)$  durch das Variationsprinzip

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} d\lambda (\dot{x}, \dot{x}) = 0$$



bei festen Endpunkten.

(Hier steht  $\dot{x} = dx/d\lambda$  für den Tangentialvektor). In jeder Karte erfüllen die Geodäten die Euler-Lagrange Gleichung zur Lagrange-Funktion

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{lk}(x) \dot{x}^l \dot{x}^k, \quad (3.7)$$

nämlich:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial L}{\partial x^j} = \frac{d}{d\lambda} (g_{lj} \dot{x}^l) - \frac{1}{2} g_{lk,j} \dot{x}^l \dot{x}^k \\ &= \underbrace{g_{lj,k} \dot{x}^l \dot{x}^k}_{(1/2)(g_{lj,k} + g_{kj,l}) \dot{x}^l \dot{x}^k} + g_{ij} \ddot{x}^i - \frac{1}{2} g_{lk,j} \dot{x}^l \dot{x}^k \end{aligned}$$

d.h.

$$g_{ij} \ddot{x}^i + \frac{1}{2} (g_{lj,k} + g_{kj,l} - g_{lk,j}) \dot{x}^l \dot{x}^k = 0 ,$$

oder

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{lk} \dot{x}^l \dot{x}^k = 0 \quad (3.8)$$

(**Geodätengleichung**). Sie besagt, dass der Vektor  $\dot{x}$  längs der Geodäten **parallel** verschoben wird (vgl. (2.3)).

Ferner ist (3.8) invariant unter einer Reparametrisierung  $\lambda \mapsto \lambda'$  nur falls  $d^2\lambda'/d\lambda^2 = 0$ . Also ist der Kurvenparameter durch (3.8) bis auf  $\lambda \mapsto a\lambda + b$  ( $a, b$  fest) bestimmt: Man nennt  $\lambda$  einen **affinen Kurvenparameter**.

### Eigenschaften des Riemann Zusammenhangs

(a) Bei Parallelverschiebung längs einer beliebigen Kurve  $\gamma$  bleibt das Skalarprodukt zweier Vektoren erhalten

$$(X(t), Y(t))_{\gamma(t)} = (X, Y)_{\gamma(0)} \quad (3.9)$$

für  $X(t) = \tau(t, 0)X$ ,  $Y(t) = \tau(t, 0)Y$  und  $X, Y \in T_{\gamma(0)}$ . Wegen  $\nabla g = 0$  ist nämlich  $g_{\gamma(t)} = \tau(t, 0)g_{\gamma(0)}$ , so dass (3.9) gleichbedeutend ist mit

$$(\tau(t, 0)g_{\gamma(0)})(\tau(t, 0)X, \tau(t, 0)Y) = g_{\gamma(0)}(X, Y) ,$$

was nach (2.6) zutrifft.

(b) Die kovariante Ableitung vertauscht mit dem “Rauf- und Runterziehen der Indizes”, z.B.

$$T^i_{k;l} = (g_{km} T^{im})_{;l} = g_{km} T^{im}_{;l}$$

weil  $g_{km;l} = 0$ . Dasselbe koordinatenfrei:

$$\nabla_X \circ g = g \circ \nabla_X , \quad (3.10)$$

wobei  $g$  die Abbildung (3.1) bezeichnet. **Beweis:** Nach (2.8, 3.4) ist

$$\langle \nabla_X gY, Z \rangle = X \langle gY, Z \rangle - \langle gY, \nabla_X Z \rangle = \langle g \nabla_X Y, Z \rangle$$

für beliebige Vektorfelder  $Y, Z$ .

### (c) Riemann-Tensor

Es gelten die Symmetrien

$$(W, R(X, Y)Z) = -(Z, R(X, Y)W) , \quad (3.11)$$

$$(W, R(X, Y)Z) = (X, R(W, Z)Y) . \quad (3.12)$$

**Beweis:** Aus (3.10) folgt  $R(X, Y)g = gR(X, Y)$  und, zusammen mit (2.13), auch (3.11). Wegen der 1. Bianchi Identität (2.16) ist die linke Seite in (3.12) gleich

$$-(W, R(Y, Z)X) - (W, R(Z, X)Y)$$

wie auch, wegen (3.11),

$$(Z, R(Y, W)X) + (Z, R(W, X)Y) .$$

Die Summe der beiden Ausdrücke ist dann symmetrisch in  $(X, Y) \leftrightarrow (W, Z)$ . □

Wir fassen alle **Symmetrien** des Riemann-Tensors zusammen:

$$\left. \begin{array}{l} R^i_{jkl} = -R^i_{jlk} \\ \sum_{(jkl)} R^i_{jkl} = 0 \\ \sum_{(klm)} R^i_{jkl;m} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{stets} \\ \text{1. Bianchi Id.} \\ \text{2. Bianchi Id.} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_{ijkl} = -R_{jikl} \\ R_{ijkl} = R_{klij} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{Torsion Null} \\ \text{Riemann-Zusammenhang} \end{array}$$

Hier bedeutet  $\sum_{(jkl)}$  die Summe über alle zyklischen Permutationen von  $j, k, l$ .

#### (d) Ricci- und Einstein-Tensor

**Definition:**

$$\begin{array}{ll} R_{ik} = R^j_{ijk} & \text{(Ricci-Tensor)} \\ R = R^i_i & \text{(skalare Krümmung)} \\ G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} & \text{(Einstein-Tensor)} \end{array}$$

Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} R_{ik} = R_{ki} , \\ R^k_{i;k} = \frac{1}{2}R_{;i} \\ G^k_{i;k} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} G_{ik} = G_{ki} \\ \text{2. Bianchi Id.} \end{array} \quad (3.13)$$

**Beweis:**  $R_{ik} = g^{jl}R_{lij} = g^{il}R_{jkl} = R_{ki}$ .

2. Bianchi Identität:

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jlm;k} + R^i_{jmk;l} = 0 .$$

(ik)-Spur:

$$\begin{array}{l} R_{jl;m} + \underbrace{R^i_{jlm;i}}_{-g^{ik}R_{jklm;i}} - R_{jm;l} = 0 , \\ R^j_{l;m} - g^{ik}R^j_{klm;i} - R^j_{m;l} = 0 , \end{array}$$

(jm)-Spur:

$$\underbrace{R^j_{l;j} + g^{ik}R_{kl;i}}_{2R^j_{l;j}} - R_{;l} = 0 .$$

□

### 3. Ergänzungen

#### Normalkoordinaten

Die Signatur der Metrik  $g_p$  ist dieselbe für alle  $p \in M$  (falls  $M$  zusammenhängend ist). Sei

$$\eta_{ij} = \begin{cases} 0, & (i \neq j) \\ \pm 1, & (i = j) \end{cases}$$

deren Normalform.

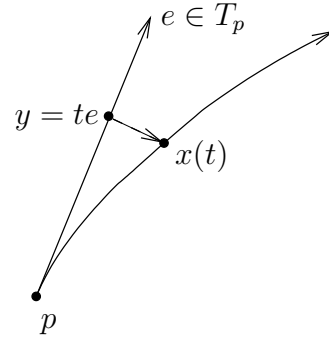
**Satz:** In einer Umgebung eines beliebigen Punktes  $p \in M$  gibt es eine Karte, so dass  $x^i = 0$  in  $p$  und

$$g_{ij}(0) = \eta_{ij}, \quad g_{ij,l}(0) = 0, \quad \text{d.h.} \quad \Gamma^i_{lj}(0) = 0. \quad (3.14)$$

**Beweis:** In  $p \in M$  wählen wir zuerst lokale Koordinaten  $x^i$  so, dass  $x^i = 0$  in  $p$  und  $g_{ij}(0) = \eta_{ij}$ , wobei letzteres mittels einer linearen Transformation erreicht werden kann. Dann konstruieren wir die **Exponentialabbildung** von  $T_p(M)$  nach  $M$ :

Gegeben sei  $e \in T_p$ . Die Kurve  $t \mapsto x(t)$  ist die Lösung der Geodätengleichung (3.8) zu  $\dot{x}(0) = e$ . Die Abbildung  $\exp : y = te \mapsto x(t)$  ist eindeutig definiert, d.h. unabhängig von der Faktorisierung  $y = te$ . So wird eine Nullumgebung in  $T_p(M)$  differenzierbar nach  $M$  abgebildet. Nach der Geodätengleichung gilt nun

$$\begin{aligned} x^i(t) &= tx^i(0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{x}^i(0) + O(t^3) \\ &= y^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{lk}(0)y^ly^k + O(y^3), \end{aligned}$$



also insbesondere  $\partial x^i / \partial y^j = \delta^i_j$  bei  $y = 0$ . Somit ist  $\exp$  ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. wir können die  $y^i$  als neue lokale Koordinaten wählen. Da dann alle Geodäten durch  $y = 0$  Geraden sind, gilt in den neuen Koordinaten

$$\Gamma^i_{lk}(te)e^le^k = 0$$

für alle  $e \in T_p$ . Wegen der Symmetrie  $\Gamma^i_{lk} = \Gamma^i_{kl}$  gilt

$$\Gamma^i_{lk}(0) = 0.$$

Dies ist äquivalent zu  $g_{ij,l}(0) = 0$ , da dann  $0 = g_{ij;l} = g_{ij,l}$ ; die Umkehrung ist evident aus (3.6).

#### Das Volumenelement

Die Metrik auf Vektorfeldern, bzw. 1-Formen überträgt sich auf Tensorfelder vom Typ  $\binom{0}{p}$  vermittelt

$$(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p, w_1 \otimes \dots \otimes w_p)_p := \frac{1}{p!} \prod_{i=1}^p (\omega_i, w_i)$$

und Bilinearität. Sie bleibt dabei nicht ausgeartet. Insbesondere ist sie auf  $n$ -Formen definiert (mit Signatur  $\sigma = \pm 1$ ). Auf einer orientierbaren Mannigfaltigkeit gibt es bis auf das Vorzeichen genau eine  $n$ -Form  $\eta$  mit

$$(\eta, \eta)_n = \sigma . \quad (3.15)$$

$\eta$  heisst die Volumenform zur Metrik  $g$ . Bezüglich einer Basis von 1-Formen  $(e^1, \dots, e^n)$  ist

$$\eta = \pm |g|^{1/2} e^1 \wedge \dots \wedge e^n ,$$

wobei

$$g = \det(g_{ij}) , \quad g_{ij} = g(e_i, e_j) .$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} (\eta, \eta)_n &= |g| (e^1 \wedge \dots \wedge e^n, e^1 \wedge \dots \wedge e^n)_n = |g| \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n (e^i, e^{\pi(i)}) \\ &= |g| \underbrace{\det(g^{ij})}_{g^{-1}} = \operatorname{sgn} g = \sigma . \end{aligned}$$

In Komponenten

$$\eta_{i_1 \dots i_n} = \pm |g|^{1/2} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} ,$$

wobei

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} .$$

## Die Strukturgleichungen für den Riemannschen Zusammenhang

**Satz:** In einer beliebigen (nicht notwendigerweise kanonischen) Basis sind die Zusammenhangsformen  $\omega^i_k$ , vgl. (2.17), eindeutig bestimmt durch

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = dg_{ik} , \quad (\nabla g = 0) \quad (3.16)$$

$$de^i + \omega^i_k \wedge e^k = 0 , \quad (\text{Torsion Null}) \quad (3.17)$$

wobei definiert ist

$$\omega_{ik} = g_{il} \omega^l_k .$$

**Beweis:** Für alle  $X, e_i, e_k$  ist

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X g)(e_i, e_k) = X \underbrace{g(e_i, e_k)}_{g_{ik}} - g(\underbrace{\nabla_X e_i}_{\omega^l_i(X) e_l}, e_k) - g(e_i, \underbrace{\nabla_X e_k}_{\omega^l_k(X) e_k}) \\ &= dg_{ik}(X) - \omega^l_i(X) g_{lk} - \omega^l_k(X) g_{ik} . \end{aligned}$$

Damit ist (3.16) äquivalent zu  $\nabla g = 0$ . Nach (2.19) bedeutet (3.17)  $T = 0$ . Umgekehrt legen diese beiden Eigenschaften nach dem Satz auf S. 24 den Zusammenhang (und damit die Zusammenhangsformen) eindeutig fest.  $\square$

# 4. Zeit, Raum und Gravitation

---

## 1. Das klassische Relativitätsprinzip

Starre Bezugssysteme resultieren aus den klassischen Vorstellungen über Zeit und Raum (s. Allg. Mechanik). Die Newtonsche Mechanik zeichnet eine spezielle Klasse von Bahnen aus, und zwar die **freier Teilchen**. Das 1. Gesetz postuliert die Existenz besonderer starrer Bezugssysteme, sogenannter **Inertialsysteme** (IS), in welchen **alle** solche Bahnen die einfache Gestalt

$$\ddot{\vec{x}} = 0$$

besitzen. Das **klassische Relativitätsprinzip** (oder Äquivalenzprinzip) postuliert so- dann, dass die Bewegungsgleichungen eines jeden isolierten Systems in allen IS gleich lauten. Das 2. Gesetz gibt darin die Abweichung aus der freien Bahn an:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) ,$$

wobei die träge Masse  $m_i$  eine Eigenschaft des  $i$ -ten Teilchens ist, und  $\vec{F}_i$  durch un- abhängige Kraftgesetze beschrieben wird, wie z.B.

$$\vec{F} = e\vec{E} , \quad (e : \text{elektrische Ladung})$$

für ein Teilchen im elektrischen Feld  $\vec{E}$ , oder

$$\vec{F} = \tilde{m}\vec{g} , \quad (\tilde{m} : \text{schwere Masse})$$

für ein Teilchen im Gravitationsfeld  $\vec{g}$ . Merkwürdig und unerklärt bleibt dabei die Tatsa- che, dass

$$m = \tilde{m} ,$$

also

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{g} \tag{4.1}$$

für alle frei fallenden Teilchen.

## 2. Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip

(EA) Einstein interpretiert (4.1) dahingehend, dass der “Bewegungsstandard” nicht durch die Bahnen freier sondern **frei fallender Teilchen** gegeben sein soll. In diesem Sinne ist die Gravitation keine eigentliche Kraft, sondern eine Scheinkraft, deren Proportionalität zu  $m$  evident ist. Eine Verstärkung dieses Gesichtspunktes ist das EA (1911).

“Alle frei fallenden, nicht rotierenden lokalen Bezugssysteme (kurz: **lokale IS**) sind äquivalent bezüglich allen darin stattfindenden lokalen Experimenten.”

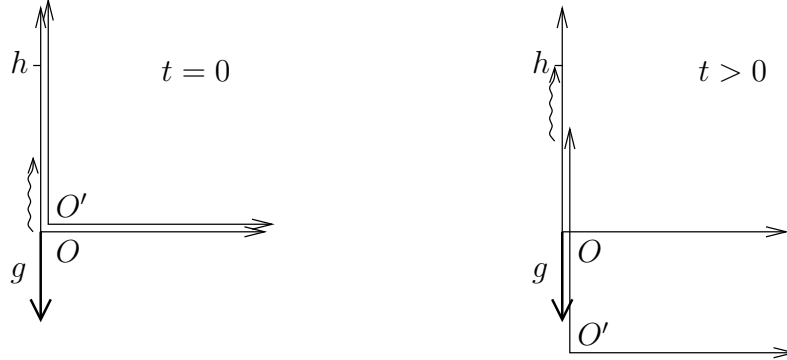
**Bemerkungen:** 1) Nicht rotierend ist ein (lokales) Bezugssystem, falls darin frei fallende Teilchen (lokal) keine geschwindigkeitsabhängige (Coriolis-) Beschleunigung erfahren.

2) Obige Form des EA ist heuristisch, da der Begriff eines lokalen Experiments etwas vage ist. Wir halten fest, dass die gegenseitige Abweichung benachbarter frei fallender Teilchen nicht als lokales Experiment gelten soll.



### Anwendung: Die Rotverschiebung

Wir gehen von der klassischen Vorstellung über Raum und Zeit aus und betrachten zwei Bezugssysteme:  $O$ , in welchem ein homogenes Gravitationsfeld  $\vec{g}$  herrscht, worin  $O'$  frei fällt. Zur Zeit  $t = 0$  stimmen die beiden überein und ruhen zueinander.



Bei  $t = 0$  wird in  $\vec{x} = \vec{x}' = 0$  Licht der Frequenz  $\nu$  nach oben emittiert. Dies erreicht die Höhe  $h$  bezgl.  $O$  nach der Zeit  $t = h/c$ . Gemäss dem EA ist die in  $O'$  gemessene Frequenz weiterhin  $\nu$ . Da dann aber  $O'$  die Geschwindigkeit  $v = -gt = -gh/c$  bezgl.  $O$  besitzt, findet letzterer die Doppler-verschobene Frequenz

$$\bar{\nu} = \nu \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \nu \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \quad (4.2)$$

vor. Beim Aufsteigen im Gravitationsfeld verringert sich die Frequenz (oder: sie wird nach Rot verschoben).

### 3. Die Postulate der allgemeinen Relativitätstheorie (ART)

Diese Postulate (Einstein 1915) präzisieren das EA:

1. Zeit und Raum bilden eine 4-dimensionale pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$ : Die Punkte  $p$  stellen Ereignisse dar und die Metrik  $g$  der Signatur  $(1, -1, -1, -1)$  widergibt Messungen anhand (idealer) Uhren und Massstäbe.
2. Die physikalischen Gesetze sind Beziehungen zwischen Tensoren.
3. Mit Ausnahme der Metrik  $g$  enthalten die physikalischen Gesetze bloss Grössen, die bereits in der SRT vorkommen.
4. In den Normalkoordinaten (s. S. 28) um ein Ereignis  $p \in M$  (**lokales Inertialsystem**) gelten die physikalischen Gesetze der SRT.

#### Bemerkungen:

Zu 1: Eine ideale Uhr mit Weltlinie  $x = x(\lambda)$  misst (infinitesimal) die Zeit  $\Delta\tau$

$$c^2(\Delta\tau)^2 = g(\dot{x}, \dot{x})(\Delta\lambda)^2.$$

Ein idealer (infinitesimaler) Massstab ist gegeben durch die Weltlinie  $x(\lambda)$  eines Endpunkts und einen Vektor  $\Delta x(\lambda)$  mit  $g(\dot{x}, \Delta x) = 0$ . Seine Länge  $\Delta l$  ist

$$(\Delta l)^2 = -g(\Delta x, \Delta x) .$$

Lautet bzgl. eines Koordinatensystems die Weltlinie  $x = (ct, 0, 0, 0)$ , so ist insbesondere

$$(\Delta \tau)^2 = g_{00}(x)(\Delta t)^2 . \quad (4.3)$$

Es gilt also zu unterscheiden zwischen Messungen anhand von Uhren und Massstäben einerseits und Koordinaten einer Karte andererseits. Sie stimmen jedoch lokal in der Umgebung eines Ereignisses überein, falls sie in der Karte als ruhend dargestellt sind und die Metrik am Ereignis die **Minkowski-Metrik**  $\eta_{\mu\nu}$  ist.

Grundsätzlich kann aus den physikalischen Gesetzen heraus entschieden werden, ob eine gegebene Uhr oder Massstab ideal ist.

Zu 2: Die physikalischen Gesetze lauten (bei passender Transformation der physikalischen Grössen) in jedem Koordinatensystem gleich: **allgemeine Kovarianz**.

Zu 4: Die Gravitation kann lokal wegtransformiert werden.

Durch obige Postulate sind die physikalischen Gesetze in Anwesenheit eines äusseren (gegebenen) Gravitationsfeldes im Wesentlichen bestimmt. Die eigentliche Krönung der ART sind jedoch die Feldgleichungen der Gravitation selber, die wir erst im nächsten Kapitel einführen.

## 4. Übergang SRT $\rightarrow$ ART

### a) Trägheitsgesetz

$\begin{aligned} \text{SRT} \\ \ddot{x}^\mu &= 0 , \\ (\dot{x}, \dot{x}) &= c^2 , \\ \text{“freie Teilchen”} \end{aligned}$	$\longrightarrow$	$\begin{aligned} \text{ART} \\ \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma &= 0 , \\ (\dot{x}, \dot{x}) &= c^2 , \\ \text{“frei fallende Teilchen”} \end{aligned}$	$(4.4)$ $(4.5)$
---	-------------------	---	-----------------

( $\dot{\phantom{x}} = d/d\tau$ ,  $\tau$ : Eigenzeit): Die Gleichungen rechts sind in einem lokalen Inertialsystem identisch mit denen links, aber allgemein kovariant. Die Geodätengleichung (4.4) beschreibt die Wirkung des “Gravitationsfeldes” auf ein sonst freies Teilchen: Man kann die rechte Seite in

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\sigma} \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma \quad (4.6)$$

als Gravitationskraft auffassen, also eigentlich die  $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$  (nicht die  $g_{\mu\nu}$ ) als Komponenten des Gravitationsfeldes. Dieses lässt sich nach (3.14) in einem Raum-Zeitpunkt **wegtransformieren**. Die “Äquivalenz von schwerer und träger Masse” ist durch (4.6) automatisch: Die Masse kommt gar nicht vor.

**Bemerkung:** Man kann Postulat 3 dadurch abschwächen, dass man einen Zusammenhang  $\nabla$  zulässt, der a priori unabhängig von der Metrik ist. Die Existenz von Normalkoordinaten ( $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(0) = 0$ ) erfordert, dass  $\nabla$  torsionsfrei ist. Da dort die Gesetze der SRT gelten sollen, ist auch  $g_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu}$ . Dies reicht zur Begründung der Gleichungen (4.4,

4.5). Ihre Kompatibilität impliziert  $\nabla g = 0$ , vgl. (3.9), d.h.  $\nabla$  ist doch der Riemann-Zusammenhang.

b) Für **Lichtstrahlen** gilt analog:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{SRT} & & \text{ART} \\
 \ddot{x}^\mu = 0, & \longrightarrow & \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0, \\
 (\dot{x}, \dot{x}) = 0, & & (\dot{x}, \dot{x}) = 0, \\
 & & \text{(Nullgeodäten)}
 \end{array} \tag{4.7}$$

Hier beschreibt (4.7) die **Lichtablenkung** im Gravitationsfeld. Überhaupt lässt sich die ganze Maxwellsche Theorie allgemein kovariant formulieren: Man braucht bloss gewöhnliche Ableitungen (1. Ordnung) durch kovariante Ableitungen zu ersetzen. Wir können den elektromagnetischen Feldtensor  $F$  als antisymmetrischen Tensor vom Typ  $\binom{0}{2}$  auffassen. Die homogenen Maxwell-Gleichungen lauten dann

$$F_{\mu\nu,\sigma} + \text{zykl.} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad F^{\mu\nu}{}_{;\sigma} + \text{zykl.} = 0, \tag{4.8}$$

denn die zweite Form reduziert sich in einem lokalen Inertialsystem auf die erste. Die inhomogenen Gleichungen lauten

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{c} j^\nu. \tag{4.9}$$

Aus (4.9) folgt wieder die Ladungserhaltung

$$j^\nu{}_{;\nu} = 0,$$

denn wegen  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  ist

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} &= \underbrace{F^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu}}_{-F^{\nu\mu}{}_{;\nu\mu}} + \underbrace{R^\mu_{\tau\mu\nu}}_{R_{\tau\nu}} F^{\tau\nu} + \underbrace{R^\nu_{\tau\mu\nu}}_{-R_{\tau\mu}} F^{\mu\tau} = -F^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu}. \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(R_{\tau\nu} - R_{\nu\tau})F^{\tau\nu} = 0}
 \end{aligned}$$

Der Energie-Impulstensor ist (vgl. Elektrodynamik)

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\sigma F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\rho} g^{\mu\nu} \tag{4.10}$$

und für ein "frei fallendes" Feld gilt wieder

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Die Darstellung des elektromagnetischen Felds durch die Potentiale lautet

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}.$$

c) Die **Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens** (Ladung  $e$ , Masse  $m$ ) im elektromagnetischen Feld mit dem Gravitationsfeld lauten nun

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu, \tag{4.11}$$

denn sie sind allgemein-kovariant (die linke Seite ist  $\nabla_{\dot{x}}\dot{x}$ , also ein Vektor) und reduzieren sich auf die SRT-Gleichungen in einem lokalen Inertialsystem. Man verifiziert auch, dass (4.11) die Euler-Lagrange Gleichungen zum offensichtlich kovarianten Hamilton-Prinzip

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} d\tau \left( c^2 + \frac{e}{mc} (\dot{x}, A) \right) = 0$$

sind, bei festen Endpunkten (1), (2) auf  $M$ .

## 5. Übergang Geodätengleichung $\rightarrow$ Newtonsches Bewegungsgesetz

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen erscheinen als Näherung unter bestimmten Annahmen. Wir verwenden Koordinaten, die in der unmittelbaren (infinitesimalen) Nachbarschaft des Beobachters die Bedeutung von Längen und Zeiten haben:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad \text{für } x = (ct, 0, 0, 0),$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir verfolgen dann Bahnen innerhalb eines Gebiets, wo das ‘‘Gravitationsfeld’’ schwach ist im Sinne von

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (4.12)$$

Insbesondere ist  $h_{\mu\nu,0} = 0$  am Ursprung  $\vec{x} = 0$ . Zunächst sei das Teilchen annähernd in Ruhe:

$$\dot{x}^\mu = (c, \vec{0}), \quad (\dot{\cdot} = \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt} \text{ bis auf } O(v^2) + O(h)).$$

Dann lautet (4.4)

$$\ddot{x}^i = -c^2 \Gamma^i_{00},$$

wobei in linearer Näherung nach  $h$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \eta^{ik} (h_{0k,0} + h_{0k,0} - h_{00,k}) = \frac{1}{2} h_{00,i} - h_{i0,0} = \frac{1}{2} h_{00,i}, \quad (4.13)$$

( $i = 1, 2, 3$ ); zuletzt wurde bei  $\vec{x} = 0$  ausgewertet. Also

$$\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{2} c^2 h_{00}.$$

Anders ausgedrückt: In schwachen Gravitationsfeldern gilt

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}; \quad \varphi : \text{Newtonsches Potential.} \quad (4.14)$$

Behält man Terme  $\propto \vec{v}$  bei (d.h. vernachlässigt man bloss Terme  $O(v^2)$ ), so ist  $\dot{x}^\mu = (c, \vec{v})$  und aus (4.4) wird

$$\ddot{x}^i = -c^2 \Gamma^i_{00} - 2c \Gamma^i_{0j} \dot{x}^j \quad (4.15)$$

mit

$$\Gamma^i{}_{0j} = \frac{1}{2}\eta^{ik}(h_{0k,j} + h_{jk,0} - h_{0j,k}) = \frac{1}{2}(h_{0j,i} - h_{0i,j}) .$$

Entsprechend ist in (4.13) der Beitrag  $O(\vec{x})$  zu behalten, da  $\vec{x} \sim \vec{v}t$ . Zum Vergleich die klassische Bewegungsgleichung eines frei fallenden Teilchens in einem beschleunigten Bezugssystem (kein IS):

$$\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\varphi - 2\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{x}} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) - \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{x} , \quad (4.16)$$

wobei in  $\vec{\nabla}\varphi$  auch die Führungsbeschleunigung inbegriffen ist. Nun stimmen (4.15, 4.16) überein, und zwar lokal für

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2}(\varphi - \frac{1}{2}(\vec{\omega} \wedge \vec{x})^2) .$$

$$g_{0i} = -\frac{1}{c}(\vec{\omega} \wedge \vec{x})_i .$$

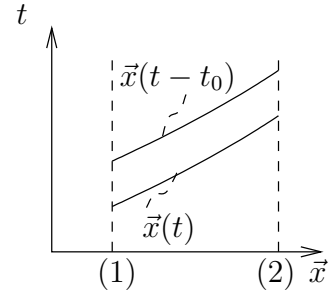
Dies folgt aus  $c(h_{0j,i} - h_{0i,j}) = 2\varepsilon_{jik}\omega_k$ ,  $c\Gamma^i{}_{0j}\dot{x}^j = (\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{x}})_i$ ,  $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) = -(1/2)\vec{\nabla}(\vec{\omega} \wedge \vec{x})^2$  und  $c^2 h_{i0,0} = (\vec{\omega} \wedge \vec{x})_i$ .

### Rotverschiebung

Wir betrachten eine Metrik, die in passenden Koordinaten  $(ct, \vec{x})$  zeitunabhängig ist:

$$g_{\mu\nu,0} = 0 .$$

Ist darin  $(t, \vec{x}(t))$ ,  $(t_1 \leq t \leq t_2)$ , eine (Null-) Geodäte, so auch  $(t, \vec{x}(t - t_0))$ ,  $(t_1 + t_0 \leq t \leq t_2 + t_0)$ . Insbesondere ist die Differenz  $\Delta t$  zwischen aufeinanderfolgenden Minima einer Lichtwelle konstant längs dem Strahl.



Die Eigenzeit  $\tau$  eines bei  $\vec{x}$  ruhenden Beobachters verhält sich zur Koordinatenzeit  $t$  gemäss (4.3)

$$(\Delta\tau)^2 = g_{00}(\vec{x})(\Delta t)^2 .$$

Also gilt für die Frequenz  $\nu$  an den Stellen (1), (2) eines Lichtstrahls

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{(\Delta\tau)_1}{(\Delta\tau)_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(\vec{x}_1)}{g_{00}(\vec{x}_2)}} . \quad (4.17)$$

**Bemerkungen:** 1) In der Situation von (4.14) (also mit  $2\varphi \ll c^2$ ) ist

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{1 - 2\frac{\Delta\varphi}{c^2}} \approx 1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}$$

mit  $\Delta\varphi = \varphi|_1^2$ . Dies stimmt mit (4.2) überein ( $\Delta\varphi = gh$ ).

2) Das EA ist mit der SRT unverträglich, zumindest falls deren Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  die Zeitmessung wiedergeben soll, s. (4.3): Mit einem Lichtstrahl ist auch ein zeitlich verzögerter einer (selbst, wenn sie keine Nullgeodäten sein sollten). Mit  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  wäre stets  $\nu_2/\nu_1 = 1$  (keine Rotverschiebung). Deshalb kann die Gravitation nicht in der SRT untergebracht werden.

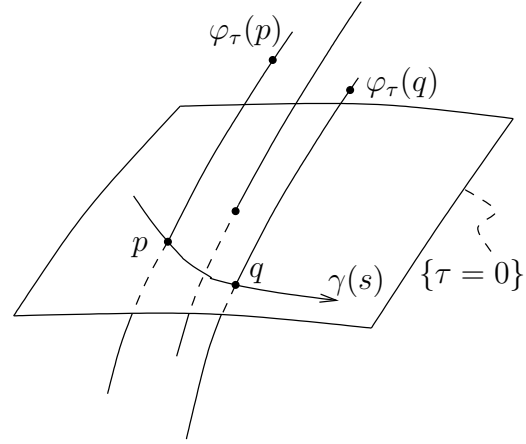
## 6. Geodätische Abweichung

Schar von Geodäten  $x(\tau)$  mit 4-er Geschwindigkeitsfeld  $u$  (vgl. (4.4)):

$$\frac{dx}{d\tau} = u(x(\tau)), \quad \nabla_u u = 0, \quad g(u, u) = c^2.$$

Sei  $\varphi_\tau$  der Fluss zu  $u$ . Wir untersuchen die relative Verschiebung der Bahnen  $\varphi_\tau(p)$ ,  $\varphi_\tau(q)$  zweier (letzten Endes infinitesimal) benachbarter Punkte  $p, q \in \gamma$  in der "Fläche"  $\{\tau = 0\}$ :

$$\begin{aligned} p, q \in \{\tau = 0\} &\mapsto \varphi_\tau(p), \varphi_\tau(q), \\ \gamma \subset \{\tau = 0\} &\mapsto \varphi_\tau \circ \gamma. \end{aligned}$$



Vektorfelder  $n = d\gamma/ds$  ("infinitesimale Verschiebungen") in der Fläche  $\{\tau = 0\}$  werden abgebildet gemäss

$$n_p \mapsto \varphi_{\tau*} n_p =: n_{\varphi_\tau(p)}$$

(Lie-Transport) und dadurch zu Vektorfeldern  $n = \varphi_{\tau*} n$  auf  $M$  erweitert. Insbesondere ist

$$[u, n] = \left. \frac{d}{d\tau} \varphi_{\tau*} n \right|_{\tau=0} = 0.$$

Es folgt  $\nabla_u n = \nabla_n u$  (Torsion = 0) und

$$\nabla_u^2 n = \nabla_u \nabla_n u = [R(u, n) + \nabla_n \nabla_u] u,$$

d.h. es gilt die Gleichung der **geodätischen Abweichung**

$$\nabla_u^2 n = R(u, n)u. \quad (4.18)$$

Die Krümmung beschreibt die relative Beschleunigung benachbarter frei fallender Teilchen.

**Bemerkungen:** 1) Die Wahl der Fläche  $\{\tau = 0\}$  ist unwesentlich, da eine infinitesimale Änderung auf die Ersetzung  $n \rightsquigarrow u + \lambda n$  mit  $u\lambda = 0$  hinausläuft; dann ist  $\nabla_u(\lambda u) = 0$  und  $R(u, \lambda u) = 0$ .

2) Liegt die Fläche  $\{\tau = 0\}$  senkrecht zu  $u$ , so gilt dort

$$g(u, n) = 0$$

und sodann überall, denn wegen  $\nabla g = 0$  ist

$$u[g(u, n)] = g(\underbrace{\nabla_u u}_{=0}, n) + g(u, \underbrace{\nabla_u n}_{= \nabla_n u}) = \frac{1}{2} n[\underbrace{g(u, u)}_{= c^2}] = 0.$$

3) Sei  $e_\mu$  eine Basis von Vektorfeldern mit  $[e_\mu, u] = 0$  und  $e_0 = u$ . Die Relativbeschleunigung in  $i$ -Richtung ( $i = 1, 2, 3$ ) von Teilchen, die in derselben Richtung zueinander

verschoben sind, ist  $\langle e^i, \nabla_u^2 e_i \rangle$ . Über die Richtungen summiert ergibt sich

$$\sum_{i=1}^3 \langle e^i, \nabla_u^2 e_i \rangle = \langle e^\mu, \nabla_u^2 e_\mu \rangle = \langle e^\mu, R(u, e_\mu)u \rangle = -\text{Ric}(u, u). \quad (4.19)$$

4) Die geodätische Abweichung in der Newtonschen Mechanik folgt durch Ableitung nach  $s$  von  $\ddot{x}^i = -\varphi_{,i}(x)$ , wobei  $n^i = \partial x^i / \partial s|_{s=0}$ . Dies liefert

$$\ddot{n}^i = -\varphi_{,ik} n^k. \quad (4.20)$$

# 5. Die Einsteinschen Feldgleichungen

---

## 1. Der Energie-Impulstensor

Der Energie-Impulstensor  $T^{\mu\nu}$  eines Feldes beschreibt

$$\begin{aligned} T^{00} &: \text{Energiedichte} & T^{0i} &: c^{-1} \cdot \text{Energiestromdichte} \\ T^{i0} &: c \cdot \text{Impulsdichte} & T^{ik} &: \text{Impulsstromdichte} . \end{aligned}$$

In Normalkoordinaten sind  $T^{00}d^3x$  und  $c^{-1}T^{i0}d^3x$  die Energie bzw. die  $i$ -te Komponente des Impulses im Volumenelement  $d^3x$ ; ferner  $c \sum_{k=1}^3 T^{0k}do_k$  und  $\sum_{k=1}^3 T^{ik}do_k$  die Leistung bzw. die  $i$ -te Komponente der Kraft, die auf ein orientiertes Flächenelement  $d\vec{o} = (do_1, do_2, do_3)$  ausgeübt wird.

Es gilt  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ . In der SRT lautet die Energie-Impulserhaltung  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  und in der ART gilt

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 . \quad (5.1)$$

Beispiel: das elektromagnetische Feld, s. (4.10). Als weitere Beispiele führen wir zwei Felder (Modelle der Materie) ein: den **Staub** und die **ideale Flüssigkeit**. Wir behandeln sie als Kontinua, obschon ihnen die Vorstellung zugrunde liegt, sie bestünden aus Teilchen.

**Staub:** Schar frei fallender Teilchen mit gemeinsamer lokaler Geschwindigkeit.

$\rho(x)$ : Massendichte im **lokalen Ruhesystem** (= Energiedichte/ $c^2$  = Ruhemasse  $\times$  Teilchendichte); definitionsgemäss ein Skalar.

$u^\mu(x)$ : 4-er Geschwindigkeit.

Im lokalen Ruhesystem ist

$$T^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|c} \rho c^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) ,$$

also allgemein

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu .$$

Die Bewegungsgleichungen des Staubes sind

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} = 0 ; \quad \nabla_u u = 0 . \quad (5.2)$$

Die erste dieser Gleichungen ist der Erhaltungssatz für die Materie (Teilchenzahl); die zweite beschreibt den freien Fall (Geodäten). Aus (5.2) folgt

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = u^\mu (\rho u^\nu)_{;\nu} + \underbrace{\rho u^\nu u^\mu}_{(\nabla_u u)^\mu}{}_{;\nu} = 0 .$$

Umgekehrt folgt aus  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  und  $u_\mu u^\mu = c^2$ , dass

$$0 = u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \underbrace{u_\mu u^\mu}_{c^2} (\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho u^\nu \underbrace{u_\mu u^\mu}_{(u_\mu u^\mu)_{;\nu}/2}{}_{;\nu} = 0$$



d.h.  $(\rho u^\nu)_{;\nu} = 0$ , sowie

$$0 = \left( g_{\sigma\mu} - \frac{u_\sigma u_\mu}{c^2} \right) T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = u_\sigma (\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho (\nabla_u u)_\sigma - u_\sigma (\rho u^\nu)_{;\nu} .$$

**Ideale Flüssigkeit:** Schwarm frei fallender Teilchen mit lokaler Geschwindigkeitsverteilung. Im lokalen Ruhesystem der Verteilung ist diese isotrop.

$$\left. \begin{array}{l} \rho(x)c^2 : \quad \text{Energiedichte} \\ p(x) : \quad \text{Druck} \\ u^\mu(x) : \quad \text{4-er Geschwindigkeit des lokalen Ruhesystems} \end{array} \right\} \text{ im lokalen Ruhesystem}$$

$$T^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{array} \right) \quad (\text{lokales Ruhesystem}) \quad (5.3)$$

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (\text{allgemein}) .$$

Wir gehen aus von

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 ,$$

d.h. von

$$u^\mu \left( \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\nu \right)_{;\nu} + \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \underbrace{u^\nu u^\mu{}_{;\nu}}_{(\nabla_u u)^\mu} - p_{;\nu} g^{\mu\nu} = 0 .$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} 0 = u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= c^2 \left( \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\nu \right)_{;\nu} - p_{;\nu} u^\nu \\ &= c^2 (\rho u^\nu)_{;\nu} + p u^\nu{}_{;\nu} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left( g_{\sigma\mu} - \frac{u_\sigma u_\mu}{c^2} \right) T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \\ &= \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) (\nabla_u u)_\sigma - p_{;\sigma} + \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2} p_{;\nu} . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wir untersuchen den nichtrelativistischen Limes: Im lokalen Ruhesystem ist  $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} = 0$  und für  $|\vec{u}| \ll c$  ist  $u^\mu = (c, \vec{v})$ . Also reduzieren sich die Bewegungsgleichungen (5.4, 5.5) auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{p}{c^2} \text{div} \vec{v} &= 0 , \\ \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) + \vec{\nabla} p + \left( \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) p \right) \frac{\vec{v}}{c^2} &= 0 . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dies ist zu vergleichen mit den Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0 , \\ \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) + \vec{\nabla} p &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

der Newtonschen Mechanik, in welche (5.6) erst im zusätzlichen Grenzfall  $p/c^2 \ll \rho$  übergehen. Die Diskrepanz zwischen (5.6) und (5.7) kommt daher, dass selbst für  $|\vec{v}| \ll c$  die Geschwindigkeitsverteilung relativistisch sein kann.

## 2. Feldgleichungen der Gravitation

Einstein postulierte 1915 die Feldgleichungen für den metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (5.8)$$

mit einer Gravitationskonstanten  $\kappa$ .

**Bemerkungen:** 1) “Die Materie krümmt die Raum-Zeit”.

2) Wegen der 2. Bianchi Identität (3.13) ist nun (5.1) auch eine Folge von (5.8) (Integrabilitätsbedingung). Für reinen Staub folgt so selbst die Geodätengleichung  $\nabla_u u = 0!$

3) Äquivalente Schreibweise: Durch Bildung der Spur ist  $R - 2R = \kappa T$ , also

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g^{\mu\nu} \right) \quad (5.9)$$

und insbesondere

$$R^{\mu\nu} = 0 \quad (5.10)$$

im Vakuum.

4) Die geodätische relative Beschleunigung um eine Geodäte der 4er-Geschwindigkeit  $u$  ist nach (4.19)

$$-R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\kappa \left( T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \frac{1}{2} T c^2 \right) = -\frac{\kappa c^2}{2} (\rho c^2 + 3p),$$

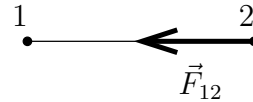
wobei zuletzt eine ideale Flüssigkeit (5.3), und damit  $T = \rho c^2 - 3p$ , verwendet wurde. Gravitation ist anziehend für  $\rho c^2 + 3p \geq 0$ .

5) Die Konstante  $\kappa$  ist (s. unten) im Wesentlichen die **Newtonsche Gravitationskonstante**  $G_0$ :

$$\kappa = \frac{8\pi G_0}{c^4}. \quad (5.11)$$

**Der Newtonsche Grenzfall:**

$$\vec{F}_{12} = -G_0 m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} = G_0 m_1 m_2 \vec{\nabla} \frac{1}{r}.$$



Bei kontinuierlicher Massenverteilung der Dichte  $\rho$  ( $m_1 \rightsquigarrow \rho(\vec{x}) d^3x$ ,  $m_2 = m$ ) wird

$$\vec{F} = -m \vec{\nabla} \varphi, \quad \varphi(\vec{x}) = -G_0 \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

wobei das Gravitationspotential  $\varphi$  die Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi = 4\pi G_0 \rho \quad (5.12)$$

erfüllt. Zur Herleitung dieses Grenzfalles aus (5.8) betrachten wir wieder die Situation (4.12) in welcher  $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} = O(h)$  und speziell  $\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2} h_{00,i}$ ,  $h_{00} = 2\varphi/c^2$ . Zudem sei die

Metrik zeitunabhängig. In erster Ordnung in  $h$  ist

$$R^i{}_{0k0} = \Gamma^i{}_{00,k} - \underbrace{\Gamma^i{}_{k0,0}}_{=0} = \frac{1}{c^2} \varphi_{,ik} , \quad (5.13)$$

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \varphi .$$

(Alternativ folgt (5.13) aus dem Vergleich von (4.18) mit (4.20).) Ferner seien die Geschwindigkeiten der Materie  $\ll c$ . Dann ist (vgl. (5.3))  $|T^{ij}| \ll T^{00}$ , also

$$T \equiv T^l{}_l = T^0{}_0 = T^{00} = \rho c^2 .$$

Damit lautet die (00)-Komponente der Feldgleichungen (5.9)

$$\frac{1}{c^2} \Delta \varphi = \kappa \rho c^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) ,$$

was mit (5.12) übereinstimmt und (5.11) bedingt.

### Der kosmologische Term

Einstein erweiterte 1917 die Feldgleichungen:

$$G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (5.14)$$

mit einer kosmologischen Konstanten  $\Lambda$ . Auch diese Gleichung ist konsistent mit (5.1), da  $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Die linke Seite (mal einer Konstanten) ist sogar (ohne Beweis) der allgemeinste Ausdruck  $D[g]^{\mu\nu}$ , der keine höheren Ableitungen von  $g$  enthält als die zweiten und  $D[g]^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  erfüllt.

Der kosmologische Term kann im Sinne von (5.8) als Energie-Impulstensor des Vakuums aufgefasst werden:  $T^{\mu\nu} = (\Lambda/\kappa)g^{\mu\nu}$ . Er entspricht einer idealen Flüssigkeit (5.3) mit der unüblichen Zustandsgleichung  $\rho c^2 = -p = \Lambda/\kappa$  und macht Gravitation abstossend für  $\Lambda > 0$  nach Bemerkung 4 oben. Falls er klein genug ist, bleibt er z.B. für das Sonnensystem ohne beobachtbare Konsequenzen, wird aber in einem expandierenden Universum (s. nächstes Kapitel) schlussendlich dominierend, da seine Energie- und Impulsdichte im Unterschied zum Beitrag der Materie nicht abnehmen.

### 3. The Hilbert action

The field equations (5.8) can be obtained from a form covariant variation principle. The action for the metric  $g$  is

$$S_D[g] = \int_D R \eta ,$$

where  $D \subset M$  is a compact region in space-time,  $R$  is the scalar curvature, and  $\eta$  is the volume element (3.15). In local coordinates,

$$S_D[g] = \int_D R \sqrt{-g} d^4x , \quad (5.15)$$

where, on the r.h.s.,  $g(x) = \det(g_{\mu\nu}(x))$ . The Euler-Lagrange equations for (5.15) are the field equations in vacuum. More precisely:

$$\delta S_D[g] = 0$$

for any variation  $\delta g$  of the metric, vanishing on  $\partial D$  together with its first derivatives, is equivalent to  $G_{\mu\nu} = 0$ .

Without yet making assumptions on  $\partial D$  we claim

$$\delta S_D[g] = \int_D G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int_{\partial D} W^\alpha \sqrt{-g} do_\alpha \quad (5.16)$$

where  $do_\alpha$  is the (coordinate) normal of  $\partial D$  and

$$W^\alpha = g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu}$$

is a vector field. Since the latter vanishes on  $\partial D$  the variational principle follows.

**Proof** of (5.16):

$$\begin{aligned} \delta \int_D R \sqrt{-g} d^4x &= \delta \int_D (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_D R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) d^4x + \int_D (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (5.17)$$

To compute the first term we recall that for an  $n \times n$  matrix  $A(\lambda)$  we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \det A &= \det A \cdot \text{tr}(A^{-1} \frac{dA}{d\lambda}), \\ \frac{d}{d\lambda} (A^{-1}) \cdot A &= -A^{-1} \frac{dA}{d\lambda}. \end{aligned}$$

This implies

$$\begin{aligned} (\delta g^{\mu\nu}) g_{\nu\sigma} &= -g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\sigma}), \\ \delta g &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu}, \\ \delta \sqrt{-g} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \\ \delta(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) &= \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

The first integrand (5.17) thus equals

$$\sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}) = \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

and yields the first term in (5.16). As for the second, we claim the **Palatini identity**

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu})_{;\alpha} - (\delta \Gamma^\alpha_{\mu\alpha})_{;\nu}. \quad (5.19)$$

In fact, we may at fist compute the variation of

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\rho\alpha} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\rho\nu}$$

at any point  $p$  in normal coordinates centered there ( $p \mapsto x = 0$ ,  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(0) = 0$ ), whence

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu})_{,\alpha} - (\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha})_{,\nu},$$

which establishes (5.19) at  $p$  and in such coordinates. However  $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  is a tensor (though  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  is not, see exercises), as is the l.h.s. Thus (5.19) holds in any coordinates. In turn it implies by  $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$

$$g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu})_{,\alpha} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha})_{,\nu} = W^\alpha_{;\alpha}. \quad (5.20)$$

Finally we have for any vector field  $W$

$$W^\alpha_{;\alpha}\sqrt{-g} = (W^\alpha\sqrt{-g})_{,\alpha}, \quad (5.21)$$

whence the second term in (5.16) follows by Gauss' theorem on  $\mathbb{R}^4$ . Eq. (5.21) follows from  $W^\alpha_{;\alpha} = W^\alpha_{,\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}W^\mu$  with

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\mu,\beta}) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} = \sqrt{-g}_{,\mu},$$

cf. (5.18). Alternatively, Gauss' theorem may be applied without reference to coordinates, cf. (1.36):  $\int_D(\operatorname{div}_g W)\eta = \int_{\partial D}i_W\eta$ , where  $\operatorname{div}_g W = W^\alpha_{;\alpha}$ , cf. (1.37, 5.21).  $\square$

**Remark.** It follows from (5.18) that the action for  $G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0$  is

$$S_D[g] = \int_D (R + 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x.$$

The action (5.15) depends, through  $R$ , on  $g$  up to its second derivatives. Usual actions however depend on the fields only up to their first derivatives; moreover, variations of the fields, but not of their derivatives, are required to vanish at the boundary. A variant of (5.15), which is of that kind, is the Palatini action

$$S_D[g, \Gamma] = \int_D g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\sqrt{-g}d^4x,$$

where  $R_{\alpha\beta}$  is the Ricci tensor of a torsion free connection  $\Gamma$  independent of  $g$ . Then

$$\begin{aligned} \delta_g S_D = 0 &\Leftrightarrow G_{\mu\nu} = 0, \\ \delta_\Gamma S_D = 0 &\Leftrightarrow \nabla g = 0; \end{aligned}$$

thus the connection is Riemann by virtue of the equations of motion.

**Proof.** The variations w.r.t.  $g$  and  $\Gamma$  yield the two terms in (5.17); hence the first one  $G_{\mu\nu} = 0$  as before. As for the second, the identity (5.19) still holds true because the existence of normal coordinates ( $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(0) = 0$ ) just depends on  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ . However, since  $g_{\mu\nu;\sigma} \neq 0$  a priori, the r.h.s. of (5.20) has to be completed by

$$-g^{\mu\nu}_{;\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + g^{\mu\alpha}_{;\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} = -(g^{\mu\nu}_{;\alpha} - g^{\mu\beta}_{;\beta}\delta_\alpha^\nu)\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu},$$

which yields the Euler-Lagrange equation

$$2g^{\mu\nu}_{;\alpha} - (g^{\mu\beta}_{;\beta}\delta_\alpha^\nu + g^{\nu\beta}_{;\beta}\delta_\alpha^\mu) = 0$$

by varying  $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ . The  $(\alpha\nu)$ -trace is  $g^{\mu\alpha}{}_{;\alpha}(2 - (4 + 1)) = 0$ , which inserted back gives  $g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0$ , as claimed.  $\square$

The variational principle extends to matter described by any field  $\psi = (\psi_A)$  transforming as a tensor (or spinor) under diffeomorphisms  $\varphi$  (or, equivalently, change of coordinates). Consider an action of the form

$$S_D[\psi] = \int_D \mathcal{L}(\psi, \nabla_g \psi) \eta$$

where  $\nabla_g$  is the Riemann connection of the metric  $g$  and the **Lagrangian**  $\mathcal{L}$  is invariant:

$$\mathcal{L}(\varphi^* \psi, \nabla_{\varphi^* g} \varphi^* \psi) = \mathcal{L}(\psi, \nabla_g \psi) \circ \varphi. \quad (5.22)$$

The Euler-Lagrange equations,  $\delta_\psi S = 0$  ( $\psi$  fixed on  $\partial D$ ), are

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \psi_A)} = 0. \quad (5.23)$$

A symmetric **energy-momentum tensor**  $T^{\mu\nu}$  is defined through

$$\delta_g \int_D \mathcal{L}(\psi, \nabla_g \psi) \sqrt{-g} d^4 x =: -\frac{1}{2} \int_D T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x) \sqrt{-g(x)} d^4 x.$$

Here, the l.h.s. may be read as  $(d/d\lambda)S_D[\psi, g + \lambda\delta g]|_{\lambda=0}$ , which is linear w.r.t. an arbitrary variation  $\delta g_{\mu\nu}(x) = \delta g_{\nu\mu}(x)$ . It is therefore of the form indicated on the r.h.s.. The computation of  $T^{\mu\nu}$  may require partial integrations.

Let  $X$  be a vector field vanishing on  $\partial D$  and  $\varphi_t$  the corresponding flow. Then

$$\int_{\varphi_{-t}(D)} \mathcal{L}(\varphi_t^* \psi, \nabla_{\varphi_t^* g} \varphi_t^* \psi) \sqrt{-\varphi_t^* g} d^4 x$$

is independent of  $t$  by (5.22). We compute its (vanishing) derivative at  $t = 0$  for  $\psi$  being a solution of (5.23):

$$\begin{aligned} \delta g &= \frac{d}{dt} \varphi_t^* g|_{t=0} = L_X g, \\ \delta g_{\mu\nu} &= X^\lambda g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu} X^\lambda{}_{,\mu} + g_{\mu\lambda} X^\lambda{}_{,\nu} \\ &= X_{\mu;\nu} + X_{\nu;\mu}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

since the expressions on both sides of the last equality are tensorial, agree in normal coordinates, and hence in any. Thus, by  $\delta_\psi S = 0$  and  $\varphi_{-t}(D) = D$ , that derivative is

$$-\int_D \frac{1}{2} \underbrace{T^{\mu\nu} (X_{\mu;\nu} + X_{\nu;\mu})}_{T^{\mu\nu} X_{\mu;\nu} = (T^{\mu\nu} X_\mu)_{;\nu} - T^{\mu\nu}{}_{;\nu} X_\mu} \sqrt{-g} d^4 x = 0.$$

The first term under the brace yields a vanishing boundary term, see (5.21) for  $W^\nu = T^{\mu\nu} X_\mu$ . We conclude

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0,$$

as a consequence of the equations of motion for  $\psi$  alone, i.e. without appealing to the field equations. The full action for those is, by the way,

$$S_D = \int_D (\kappa(R + 2\Lambda) + \mathcal{L})\sqrt{-g}d^4x;$$

note however that if the expression for  $\mathcal{L}$  contains  $\nabla$ , the Palatini variational method may not work.

**Example.** The electromagnetic field. The basic field is the 4-potential  $A_\mu$  and the Lagrangian in absence of sources is

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}$$

with  $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ . Thus

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu;\mu}} = -\frac{1}{4}F_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} \cdot 4 = -F^{\mu\nu},$$

whence (5.23) are the Maxwell equations  $F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$  for the freely falling field, cf. (4.9). In order to compute the energy momentum tensor, note that

$$\delta_g \int_D \mathcal{L}\sqrt{-g}d^4x = \int_D (\delta_g\mathcal{L} + \frac{1}{2}\mathcal{L}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta})\sqrt{-g}d^4x$$

with

$$\begin{aligned} \delta_g\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}(g^{\mu\sigma}\delta g^{\nu\rho} + g^{\nu\rho}\delta g^{\mu\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}\delta g^{\nu\rho} \\ &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^\mu{}_\rho g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}\delta g_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}F_\mu{}^\alpha F^{\mu\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= -F_\mu{}^\alpha F^{\mu\beta} - \mathcal{L}g^{\alpha\beta} \\ &= F^\alpha{}_\mu F^{\mu\beta} - \frac{1}{4}(F^\nu{}_\mu F^{\mu\nu})g^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

cf. (4.10).

## 6. Homogener, isotroper Kosmos

Es soll eine den Kosmos darstellende Lösung hoher Symmetrie der Einstein-Gleichungen für frei fallenden Staub konstruiert werden (Friedmann 1922).

### 1. Der Ansatz

Wir nehmen an, dass die Zeitschnitte (in passenden Koordinaten) 3-dimensionale Räume konstanter Krümmung seien. Diese Räume führen wir zuerst ein als Untermannigfaltigkeiten  $M_0$  in einem affinen  $\mathbb{R}^4$  (der nichts zu tun hat mit der Raum-Zeit!), beschrieben mit Koordinaten  $x^1, \dots, x^4$ :

$$k [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] + (x^4)^2 = R_0^2$$

mit  $k = 0, \pm 1$  und  $R_0 > 0$ . Die Metrik  $g_0$  auf  $M_0$  ist die durch

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + k(dx^4)^2$$

induzierte (mit  $(dx^i)^2 = dx^i \otimes dx^i$ ).

$k$	$M_0$	Krümmung	Geometrie	Symmetriegruppe $\mathcal{S}$
+1	Kugel	$> 0$	sphärisch	$O(4)$ : orthogonale
0	Ebene	$= 0$	flach	$E(3)$ : Euklidische
-1	Hyperboloid	$< 0$	hyperbolisch	$L(4)$ : Lorentz

Diese Mannigfaltigkeiten haben eine hohe Symmetrie: Eine Gruppe  $\mathcal{S}$  von Transformationen  $S$  mit

$$S(M_0) = M_0, \quad S^* g_0 = g_0, \quad (6.1)$$

(Isometrien von  $M_0$ ). Dabei wirkt  $S$  gemäss  $(Sx)^i = S^i_j x^j$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ) für  $S \in O(4), L(4)$  und gemäss  $(Sx)^i = R^i_j x^j + a^i$ , ( $i = 1, \dots, 3$ ) für  $S = (R, a) \in E(3)$ . Je zwei Punkte in  $M_0$  und je zwei (normierte) Vektoren in  $T_p(M_0)$  sind äquivalent bezüglich der Symmetrie:  $M_0$  ist homogen und isotrop. Jeder Raum der Signatur  $(+, +, +)$  und mit konstanter Krümmung ist (ohne Beweis) "bis auf die Topologie" einer der obigen (Beispiel für  $k = 0$ : Torus  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3$  statt  $\mathbb{R}^3$ ).

### Karten:

**A:** Koordinaten  $(x^1, x^2, x^3)$  mit Abbildung:

$$x^4 = \sqrt{R_0^2 - kr^2} \equiv w(r), \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}.$$

Mit  $\partial x^4 / \partial x^i = -kx^i / w$  ist

$$g_0 = \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 + \frac{k}{R_0^2 - kr^2} \sum_{i,j=1}^3 x^i x^j dx^i dx^j. \quad (6.2)$$



**B:** Koordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  mit Abbildung:

$$x^1 = r \cos \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \cos \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \sin \theta, \quad x^4 = w(r).$$

Mit

$$(dr)^2 + k(dx^4)^2 = (1 + kw'^2)dr^2 = \frac{1}{1 - k(r/R_0)^2}dr^2$$

ist

$$g_0 = \frac{1}{1 - k(r/R_0)^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.3)$$

Eine Variante davon erhält man durch die Ersetzung von  $r$  durch  $\chi$  gemäss

$$\frac{r}{R_0} = \begin{cases} \sin \chi, & (\chi \in [0, \pi], k = 1), \\ \chi, & (\chi \in [0, \infty), k = 0), \\ \text{sh } \chi, & (\chi \in [0, \infty), k = -1), \end{cases} \quad (6.4)$$

kurz  $r/R_0 = \text{sinn } \chi$ . Dann ist  $w(r)/R_0 = \cos \chi$ , bzw.  $\chi, \text{ch } \chi$  und

$$g_0 = R_0^2(d\chi^2 + \text{sinn}^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (6.5)$$

Für  $k = 1$  haben die beiden Karten (aber nicht  $M_0$ ) eine Singularität bei  $r = R_0$ .

Wir fügen nun diese räumliche Geometrie und ein Zeitintervall  $t \in I \subset \mathbb{R}$  zusammen zu einer **Raum-Zeit**  $M = I \times M_0$  mit **Metrik** ( $c = 1$ )

$$g = dt^2 - a^2(t)g_0. \quad (6.6)$$

**Bemerkung:** Verschiedene Werte von  $R_0$  in (6.2) beschreiben die selbe Klasse von Raum-Zeiten (6.6), da eine Reskalierung von  $R_0$  einer von  $a(t)$  gleichkommt. Wir setzen deshalb  $R_0 = 1$ , ( $k/R_0^2 \rightsquigarrow k$ ). Für  $k = 0$  bleibt selbst dann eine Reskalierung der Euklidischen Metrik möglich, da sie auf eine Reskalierung der Koordinaten hinausläuft.

Das einzige mit der Isotropie verträgliche Geschwindigkeitsfeld hat bzgl. der Karte A die Komponenten

$$w^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

Die Materieteilchen (Galaxien, oder sich darin befindliche Beobachter) haben konstante räumliche Koordinaten  $(x^1, x^2, x^3)$  (mitbewegte Koordinaten). Ebenso folgt  $\rho = \rho(t)$  aus der Homogenität. Der **Energie-Impulstensor** einer idealen Flüssigkeit ist  $T = (\rho + p)u \otimes u - pg$ , vgl. (5.3).

## 2. Expansion

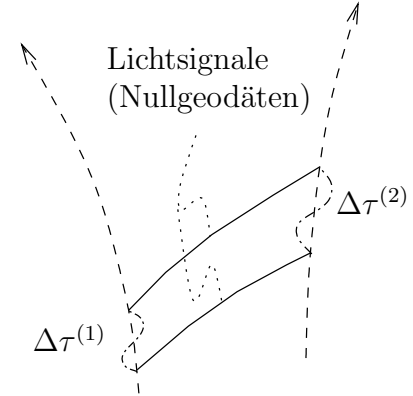
$t = x^0$  ist die Eigenzeit eines in den Karten A, B ruhenden Teilchens und der räumliche Abstand  $d(t)$  zwei solcher Teilchen ist proportional zu  $a(t)$ . Also ist die Expansionsrate

$$\frac{\dot{d}(t)}{d(t)} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} =: H(t) \quad (6.7)$$

für alle Paare gleich. Dies ist das **Hubble Gesetz**: Die Geschwindigkeit der Teilchen zueinander ist proportional zu ihrem Abstand,  $\dot{d}(t) = H(t)d(t)$ .

Ein weiterer wichtiger Zeuge für die Expansion des Kosmos ist die Rotverschiebung der Spektrallinien. Wir betrachten einen Sender (z.B. Atom) (1) und einen Empfänger (2) auf (zeitartigen) Weltlinien. Zwei Lichtsignale, emittiert von (1) im Eigenzeitabstand  $\Delta\tau^{(1)}$ , werden von (2) im Eigenzeitabstand  $\Delta\tau^{(2)}$  empfangen. Für monochromatisches Licht ist also das Verhältnis der empfangenen zur emittierten Frequenz

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\Delta\tau^{(1)}}{\Delta\tau^{(2)}} .$$



Atomspektren werden also einfach skaliert und können deshalb einer bestimmten Sorte Atome zugewiesen werden. Somit sind sowohl  $\nu_2$  wie  $\nu_1$  aus der Beobachtung bestimmbar.

Im homogenen, isotropen Kosmos betrachten wir Sender und Empfänger in Ruhe relativ zum Staub, d.h. zu ihren Galaxien. Der Sender S habe in der Karte B die (festen) räumlichen Koordinaten  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ , der Empfänger  $r_2 = 0$ . Ein Lichtstrahl von (1) nach (2) verläuft räumlich radial längs  $\theta, \varphi = \text{konst}$ , da dies die einzige durch diese Endpunkte ausgezeichnete Richtung ist, und ist raum-zeitlich eine Null-Geodäte. Also gilt nach (6.6, 6.3) entlang des Lichtstrahls

$$dt = a(t)R_0 \frac{dr}{w(r)}$$

und

$$\int_0^{r_2} \frac{dr}{w(r)} = R_0^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} \quad (6.8)$$

für die Sendezeit  $t_1$ , bzw. Empfangszeit  $t_2$  eines Wellenminimums. Für die Zeitdifferenzen  $\Delta t_i$  zweier aufeinanderfolgenden Minima (Perioden) gilt somit

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} \frac{dt}{a(t)} ,$$

d.h.

$$\frac{\Delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\Delta t_2}{a(t_2)} .$$

Wegen  $\Delta\tau^{(i)} = \Delta t_i$  (ruhende Sender/Empfänger) ist also

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} . \quad (6.9)$$

In der Expansionsphase ist  $a(t_2) > a(t_1)$ , also  $\nu_2 < \nu_1$ : Rotverschiebung. Beobachtet wurde Strahlung sehr entfernter Objekte bis zu Werten  $1 + z := \nu_1/\nu_2 \approx 8$ . Man bezeichnet  $z$  als **Rotverschiebung**.

### 3. Die Friedmann-Gleichungen

Wir zeigen, dass die Feldgleichungen (5.14) durch passende Wahl der Funktionen  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  erfüllbar sind. Dies soll anhand der beiden Karten und mit verschiedenen Methoden gleich zweimal geschehen.

**A:** Wegen der Symmetrie genügt es, die Feldgleichungen in den Punkten  $(t, 0, 0, 0)$  zu erfüllen. Da dabei nur Ableitungen von  $g_{\mu\nu}$  bis zur 2. Ordnung vorkommen, behalten wir von  $g_{\mu\nu}(t, x_1, x_2, x_3)$  nur Glieder bis zur 2. Ordnung in  $\vec{x}$ :

$$g_{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -a^2(\delta_{ik} + kx^i x^k) & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

also:

$$\left. \begin{aligned} g_{\mu\nu,\sigma} &= 0 \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ oder } \nu = 0, \\ g_{ik,0} &= -2a\dot{a} \delta_{ik} \\ g_{ik,l} &= -a^2 k (x^i \delta_{kl} + x^k \delta_{il}) \end{aligned} \right\} \text{ in linearer Näherung in } \vec{x}, \text{ für } l, i, k = 1, 2, 3.$$

Entsprechend brauchen wir die Christoffel-Symbole

$$\Gamma^\mu_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\sigma\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\sigma} - g_{\sigma\nu,\rho})$$

bis zur 1. Ordnung in  $\vec{x}$  zu berechnen. Dabei genügt für  $g^{\mu\rho}$  bereits die 0. Ordnung, da die Korrektur von 2. Ordnung ist. (Konvention:  $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ ;  $i, l, k = 1, \dots, 3$ ).

**Resultat:**  $\neq 0$  sind nur

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{ii} &= a\dot{a}, \\ \Gamma^i_{i0} &= \Gamma^i_{0i} = \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma^i_{ll} &= kx^i. \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} \Gamma^j_{il} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{a^2} \delta_{jk} \right) (-a^2 k) (x^i \delta_{kl} + x^k \delta_{il} + \underline{x^l \delta_{ki}} + x^k \delta_{il} - \underline{x^i \delta_{kl}} - \underline{x^l \delta_{ik}}) \\ &= k \delta_{jk} \delta_{il} x^k = k \delta_{il} x^j. \end{aligned}$$

**Ricci-Tensor:**

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\alpha\mu,\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}.$$

**Resultat:**  $\neq 0$  sind nur

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\ddot{a}/a, \\ R_{jj} &= a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k. \end{aligned}$$

( $R_{ij} = R_{11} \cdot \delta_{ij}$  folgt bereits aus der Isotropie.)

**Beispiel:**

$$R_{00} = R^\alpha_{0\alpha 0} = \underbrace{\Gamma^\alpha_{00,\alpha}}_0 \underbrace{-\Gamma^\alpha_{\alpha 0,0}}_{-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)} + \underbrace{\Gamma^\sigma_{00}}_0 \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} \underbrace{-\Gamma^\sigma_{\alpha 0} \Gamma^\alpha_{0\sigma}}_{-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2} = -3\ddot{a}/a ,$$

$$\begin{array}{l|l} R_{jj} = \Gamma^\alpha_{jj,\alpha} & = (a\dot{a})' + 3k & (\alpha = 0, 1, 2, 3) \\ -\Gamma^\alpha_{\alpha j,j} & = -k & (\alpha = j) \\ +\Gamma^\sigma_{jj} \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} & = a\dot{a} \cdot (3\dot{a}/a) & (\sigma = 0, \alpha = j) \\ -\Gamma^\sigma_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{j\sigma} & = -2a\dot{a} \cdot (\dot{a}/a) & (\sigma = 0, \alpha = j \text{ oder } \sigma = j, \alpha = 0) \end{array}$$

$$= a\ddot{a} + (1 + 3 - 2)\dot{a}^2 + 2k .$$

**Einstein-Tensor:**

Für die skalare Krümmung findet man

$$R = R_{00} - \frac{1}{a^2}(R_{11} + R_{22} + R_{33}) = -\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) .$$

Der Einstein-Tensor  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  ist diagonal mit

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) , \\ G_{jj} &= -(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) . \end{aligned} \tag{6.10}$$

**B:** Wir verwenden den Cartanschen Kalkül. **Basis von 1-Formen:**

$$\left. \begin{array}{l} e^0 = dt \\ e^1 = \frac{a}{w} dr \\ e^2 = ar d\theta \\ e^3 = ar \sin \theta d\varphi \end{array} \right\} g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu , \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\begin{aligned} de^0 &= 0 \\ de^1 &= \frac{\dot{a}}{w} dt \wedge dr = e^0 \wedge \frac{\dot{a}}{w} dr , \\ de^2 &= \dot{a} r dt \wedge d\theta + a dr \wedge d\theta , \\ &= e^0 \wedge (\dot{a} r d\theta) + e^1 \wedge (w d\theta) , \\ de^3 &= \dot{a} r \sin \theta dt \wedge d\varphi + a \sin \theta dr \wedge d\varphi + ar \cos \theta d\theta \wedge d\varphi , \\ &= e^0 \wedge (\dot{a} r \sin \theta d\varphi) + e^1 \wedge (w \sin \theta d\varphi) + e^2 \wedge (\cos \theta d\varphi) . \end{aligned} \tag{6.11}$$

**Zusammenhangsformen**

Strukturgleichungen für die  $\omega^\mu{}_\nu$

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = dg_{\mu\nu} = 0 , \quad de^\mu = e^\nu \wedge \omega^\mu{}_\nu$$

(mit  $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma}\omega^\sigma{}_\nu$ ). Durch Vergleich mit (6.11) lässt sich eine Lösung erraten, und diese ist nach dem Satz auf S. 29 eindeutig:

$$\begin{aligned}\omega^\mu{}_\mu &= 0, & (\text{ohne Summenkonvention}), \\ -\omega^2{}_3 &= \omega^3{}_2 = \cos\theta d\varphi, \\ -\omega^1{}_3 &= \omega^3{}_1 = w \sin\theta d\varphi, \\ \omega^0{}_3 &= \omega^3{}_0 = \dot{a}r \sin\theta d\varphi, \\ -\omega^1{}_2 &= \omega^2{}_1 = w d\theta, \\ \omega^0{}_2 &= \omega^2{}_0 = \dot{a}r d\theta, \\ \omega^0{}_1 &= \omega^1{}_0 = \frac{\dot{a}}{w} dr.\end{aligned}$$

### Krümmungsformen

$$\Omega^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\sigma \wedge \omega^\sigma{}_\nu.$$

Aus  $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$  folgt  $\Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu} = 0$ . Ergebnis:

$$\begin{aligned}\Omega^0{}_i &= \Omega^i{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a} e^0 \wedge e^i, \\ -\Omega^j{}_i &= \Omega^i{}_j = \frac{k + \dot{a}^2}{a^2} e^i \wedge e^j.\end{aligned}$$

### Beispiel:

$$\begin{aligned}\Omega^1{}_0 &= d\omega^1{}_0 = \frac{\ddot{a}}{w} dt \wedge dr = \frac{\ddot{a}}{a} e^0 \wedge e^1, \\ \Omega^2{}_1 &= d\omega^2{}_1 + \omega^2{}_0 \wedge \omega^0{}_1 = w' dr \wedge d\theta + \frac{\dot{a}^2 r}{w} d\theta \wedge dr \\ &= \frac{1}{a^2} \underbrace{\left( \frac{ww'}{r} - \dot{a}^2 \right)}_{-k} e^1 \wedge e^2.\end{aligned}$$

Die restlichen  $\Omega^i{}_j$  folgen durch Isotropie (oder Nachrechnen).

### Ricci-Tensor:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \Omega^\alpha{}_\mu(e_\alpha, e_\nu)$$

ist diagonal wegen  $\Omega^\alpha{}_\mu \sim e^\alpha \wedge e^\mu$ . Man findet

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a}, \\ R_{jj} &= \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2(k + \dot{a}^2)}{a^2} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2}.\end{aligned}$$

### Skalare Krümmung:

$$R = R_{00} - (R_{11} + R_{22} + R_{33}) = -\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k).$$

### Einstein-Tensor:

$$G_{00} = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k), \quad G_{jj} = -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}. \quad (6.12)$$

**Energie-Impulstensor:** Er ist durch (5.3) gegeben, sei es in der Karte A bei  $(t, 0, 0, 0)$  oder bzgl. der Basis von 1-Formen der Karte B.

**Friedmann-Gleichungen:** ( $c = \kappa = 1$ ). Nach Runterziehen der Indizes lauten die Feldgleichungen wegen (6.10), bzw. (6.12), sowie (5.3)

$$(\mu\nu) = (00) : \quad a(\dot{a}^2 + k) - \frac{1}{3}\Lambda a^3 = \frac{1}{3}\rho a^3, \quad (6.13)$$

$$(\mu\nu) = (jj) : \quad 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k - \Lambda a^2 = -p a^2. \quad (6.14)$$

**Bemerkungen.** 1) Mit  $a(t), \rho(t)$  sind auch  $a(t-t_0), \rho(t-t_0)$  und  $a(-t), \rho(-t)$  Lösungen.

2) Es folgt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} \rho a^3 \right) = \dot{a}(\dot{a}^2 + k) + 2a\dot{a}\ddot{a} - \Lambda a^2 \dot{a} = \dot{a}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k - \Lambda a^2) = -p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} a^3 \right), \quad (6.15)$$

was eine Analogie aufweist zum ersten Hauptsatz der Thermodynamik in der Form  $dU = -pdV$ , die für adiabatische Prozesse gilt. Die Gleichung ist für  $\dot{a}(t) \neq 0$  äquivalent zu (6.14). Ferner ist sie gleichbedeutend zur Integrabilitätsbedingung  $0 = T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{,\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\rho} T^{\mu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} T^{\rho\nu}$  für  $\mu = 0$ , da

$$T^{0\nu}_{;\nu} = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + 3a\dot{a}\frac{p}{a^2} = \frac{1}{a^3} \left( \frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt} a^3 \right).$$

3) Die Zustandsgleichung  $p = w\rho$  steht für Staub ( $w = 0$ ), isotrope elektromagnetische Strahlung ( $w = 1/3$ ) und sie reproduziert den kosmologischen Term ( $w = -1$ ). Dann folgt aus (6.15) nach Multiplikation mit  $a^{3w}$

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}.$$

Sind verschiedene Flüssigkeiten im Spiel, so wird bei Ausdehnung des Universums dieses von solchen mit sukzessiv kleinerem  $w$  dominiert: Von Strahlung zu Staub zu Vakuumenergie.

Wir verfolgen im Weiteren den Fall des Staubs in Kombination mit  $\Lambda$ . Dann ist

$$\frac{1}{3}\rho a^3 = C = \text{konst} > 0. \quad (6.16)$$

Damit gelten

$$\dot{a}^2 - \frac{1}{3}\Lambda a^2 - \frac{C}{a} = -k, \quad (6.17)$$

$$2a\ddot{a} + \frac{C}{a} - \frac{2}{3}\Lambda a^2 = 0. \quad (6.18)$$

Ein statisches Universum  $a(t) = \text{konst}$  erfordert  $(2/3)\Lambda a^3 = C$ , also  $\Lambda > 0$  und  $k = +1$ . Die Lösung (Einstein 1917)

$$a = \Lambda^{-1/2}, \quad \rho = 2\Lambda \quad (6.19)$$

ist aber instabil, da nach (6.18)  $\ddot{a}$  eine Auslenkung aus dem Gleichgewicht vergrößert.

Die Lösungen hängen von den Parametern  $\Lambda$ ,  $C$  und einer Anfangsbedingung  $a(t_0)$  ab. Es ist üblich,  $t_0$  als die heutige Zeit zu wählen und diese Größen durch Eigenschaften des heutigen Universums zu ersetzen. Dazu führen wir zunächst den Skalenparameter  $R_0$  wieder ein ( $k \rightsquigarrow k/R_0^2$ ). Division von (6.17) durch  $\dot{a}(t_0)^2$  ( $\neq 0$ , was die Gleichgewichtslösung ausschliesst) liefert

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{\dot{a}(t_0)}\right)^2 - \frac{1}{3}\Lambda\left(\frac{a(t)}{\dot{a}(t_0)}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{\rho(t_0)a(t_0)^3}{\dot{a}(t_0)^2 a(t)} = -\frac{k}{R_0^2 \dot{a}(t_0)^2} . \quad (6.20)$$

Wir wählen nun  $R_0$  so, dass  $a(t_0) = 1$ , also  $\dot{a}(t_0) = H(t_0)$ , und erhalten

$$\frac{\dot{a}^2}{H^2} - (\Omega_\Lambda a^2 + \Omega_m a^{-1}) = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m \equiv \Omega_k \quad (6.21)$$

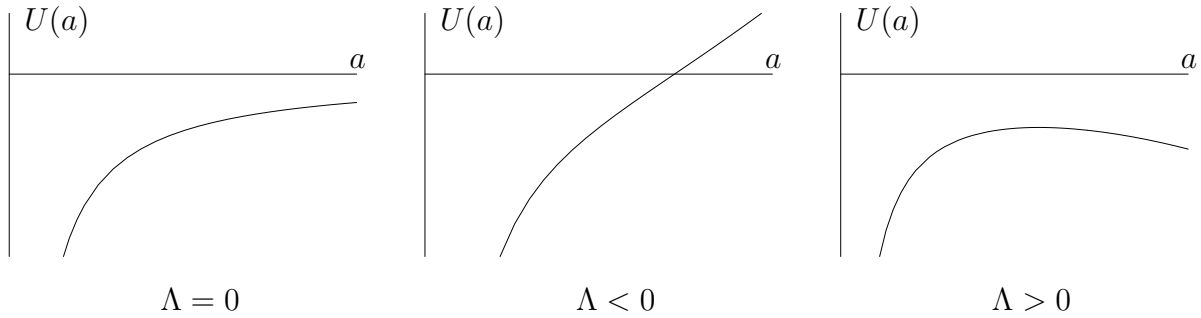
mit den neuen Parametern

$$H := H(t_0) , \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2} , \quad \Omega_m := \frac{\rho(t_0)}{3H^2} . \quad (6.22)$$

Die Konstante  $\Omega_k$  wurde durch Auswertung der linken Seite bei  $t = t_0$  bestimmt. Vergleich mit der aus (6.20) liefert

$$k = -\text{sgn } \Omega_k , \quad R_0 = |\Omega_k|^{-1/2} H^{-1} . \quad (6.23)$$

Gl. (6.21) entspricht formal der Erhaltung der Energie  $\Omega_k$  eines nicht-relativistischen Teilchens der Masse  $2/H^2$ , das sich im 1-dimensionalen Potential  $U(a) = -(\Omega_\Lambda a^2 + \Omega_m a^{-1})$  bewegt. Je nach Vorzeichen von  $\Omega_\Lambda$  (oder  $\Lambda$ ) ergeben sich verschiedene Bewegungstypen.



Die meisten Bewegungen beginnen oder enden bei  $a = 0$ : einem “Big Bang” oder einem “Big Crunch”. Dies ist eine echte Singularität, denn die skalare Krümmung  $R$  divergiert dort:  $R + 4\Lambda = -T = -\rho = -3C/a^3 \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow 0$ .

- $\Lambda = 0$ :  
 $\Omega_m < 1$ : Unbeschränkte Expansion  $a(t)$  mit positiver asymptotischer Geschwindigkeit;  
 $\Omega_m = 1$ : Unbeschränkte Expansion mit verschwindender asymptotischer Geschwindigkeit;  
 $\Omega_m > 1$ : Beschränkte Expansion, dann Kollaps.
- $\Lambda < 0$ : Beschränkte Expansion, dann Kollaps.
- $\Lambda > 0$ : Das Potential  $U(a)$  hat ein Maximum  $-3\Omega_\Lambda^{1/3}(\Omega_m/2)^{2/3}$  bei  $a = (\Omega_m/2\Omega_\Lambda)^{1/3}$ . Falls es rechts des heutigen Werts  $a = 1$  liegt, d.h.

$$\Omega_m > 2\Omega_\Lambda , \quad (6.24)$$

so ist die Expansion gebremst. Eine Bewegung, die gegen oben oder unten beschränkt ist, erfordert

$$1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m < -3\Omega_\Lambda^{1/3}(\Omega_m/2)^{2/3} .$$

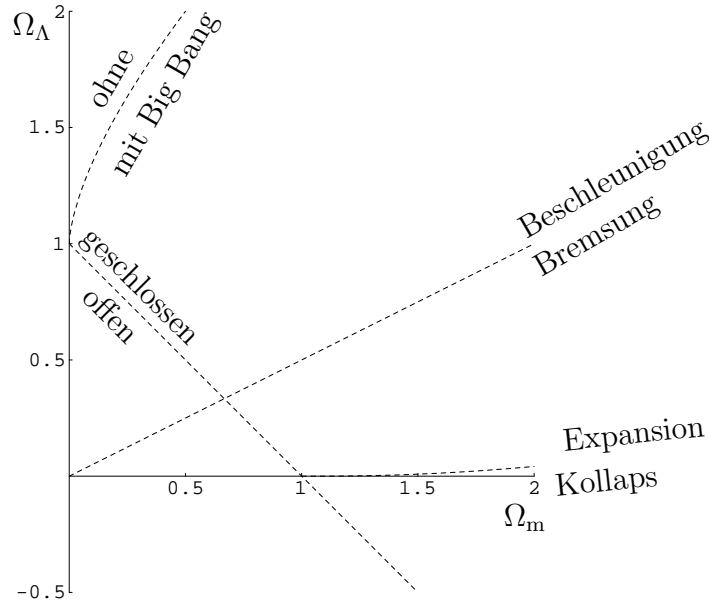
Dies kann nur für  $\Omega_\Lambda + \Omega_m > 1$  geschehen und, bei knapper Erfüllung dieser Ungleichung, nur falls entweder  $\Omega_\Lambda$  oder  $\Omega_m$  klein ist. Im ersten Fall, d.h. für kleine  $(\Omega_m - 1)/\Omega_m > 0$ , ist

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} < 4\left(\frac{\Omega_m - 1}{3\Omega_m}\right)^3 + \dots .$$

Da dort (6.24) gilt, ist die Bewegung nach oben beschränkt. Im zweiten, d.h. für kleine  $(\Omega_\Lambda - 1)/\Omega_\Lambda > 0$ , ist

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} < 2\left(\frac{\Omega_\Lambda - 1}{3\Omega_\Lambda}\right)^{3/2} + \dots .$$

Dies entspricht einer nach unten beschränkten Bewegung: Kein Big Bang, sondern Kontraktion mit anschliessender Expansion.

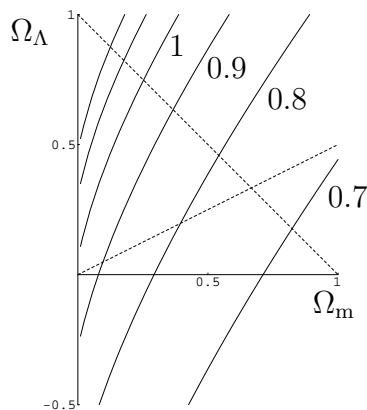
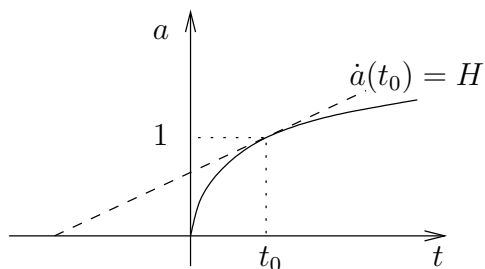


In den Modellen mit (6.24) war  $\ddot{a}(t) < 0$  in der Vergangenheit, also  $a(t)$  konkav, s. Fig. links. Das Alter  $t_0$  des Universums ist dann  $t_0 < H^{-1}$ . Allgemein ist nach (6.21)

$$t_0 = H^{-1} \int_0^1 da \frac{1}{\sqrt{\Omega_k - U(a)}} ,$$

was sich nicht geschlossen berechnen lässt. In der Fig. rechts ist  $t_0$  in Einheiten der Hubble-Zeit  $H^{-1}$  durch Niveaulinien dargestellt.





Der zeitliche Abhängigkeit von  $a(t)$  kann für (i)  $C = 0$ ,  $\Lambda > 0$  oder (ii)  $\Lambda = 0$  explizit bestimmt werden. Wir verwenden die Bewegungsgleichung in der Form (6.17, 6.16). (Die Ersetzung von (6.14) bringt unechte Lösungen mit  $\dot{a} \equiv 0$  hinzu, die zu verwerfen sind.)

**Lösungen:**

(i) Setze  $\alpha^2 = \Lambda/3$ .

$$a(t) = \alpha^{-1} \begin{cases} \text{ch } \alpha t, & (k = +1), \\ e^{\alpha t}, & (k = 0), \\ \text{sh } \alpha t, & (k = -1). \end{cases}$$

Beim exponentiell expandierenden Universum mit  $k = 0$  (de Sitter 1917) ist der Raum invariant unter Translationen der Zeit, da  $t \mapsto t - t_0$  auf eine Reskalierung der Koordinaten in  $M_0$  hinausläuft, vgl. Bemerkung auf S. 47.

(ii) ( $a = 0$  bei  $t = 0$ )

$$k = +1 : \quad \begin{cases} a = \frac{C}{2}(1 - \cos \eta), \\ t = \frac{C}{2}(\eta - \sin \eta), \end{cases} \quad (0 < \eta < 2\pi), \quad (6.25)$$

$$k = 0 : \quad a = \left(\frac{9C}{4}\right)^{1/3} t^{2/3} \quad (0 < t < \infty),$$

$$k = -1 : \quad \begin{cases} a = \frac{C}{2}(\text{ch } \eta - 1), \\ t = \frac{C}{2}(\text{sh } \eta - \eta), \end{cases} \quad (0 < \eta < \infty). \quad (6.26)$$

Der Fall  $k = 0$  ist als Einstein-de Sitter Universum bekannt. **Beweis:** Durch Nachrechnen ( $' = d/d\eta$ ). Für  $k = +1$ :

$$\dot{a} = \frac{a'(\eta)}{t'(\eta)} = \frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta},$$

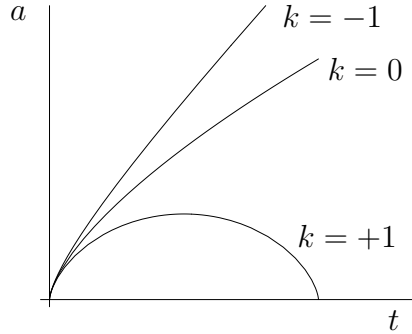
$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + k = \underbrace{\frac{\sin^2 \eta}{(1 - \cos \eta)^2}}_{\frac{1 + \cos \eta}{1 - \cos \eta}} - \frac{2}{1 - \cos \eta} + 1 = 0.$$

Für  $k = 0$ :

$$\dot{a} = \left(\frac{9C}{4}\right)^{1/3} \frac{2}{3} t^{-1/3},$$

$$\dot{a}^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^{1/3} C^{2/3} t^{-2/3} = C/a.$$

Für  $k = -1$ : analog zu  $k = +1$ . □



#### 4. Welches Universum?

Astrophysikalische Beobachtungen gestatten es, die Parameter in Gl. (6.21) zu bestimmen, d.h.  $H$  und neuerdings auch  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$ . Die folgende Beschreibung ist vereinfacht.

Die Hubble-Konstante  $H = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$  ist bestimmt durch die Rotverschiebung  $z$  des Lichts ferner Galaxien, das bei  $t_s$  gesendet und bei  $t_0$  empfangen wird. Wir entwickeln (6.9) nach der Laufzeit  $t_0 - t_s$  des Lichts, die klein gegen das Alter des Universums sei. Mit

$$a(t_s) = a(t_0) - \dot{a}(t_0)(t_0 - t_s) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t_0 - t_s)^2 + \dots$$

$$= a(t_0)\left(1 - H \cdot (t_0 - t_s) - \frac{1}{2}H^2q \cdot (t_0 - t_s)^2 + \dots\right),$$

wobei  $q = -a(t_0)\ddot{a}(t_0)\dot{a}(t_0)^{-2}$  der dimensionslose Bremsparameter ist, ergibt sich

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_s)} = 1 + H \cdot (t_0 - t_s) + H^2\left(1 + \frac{1}{2}q\right)(t_0 - t_s)^2 + \dots$$

Der Abstand  $d$  zwischen Empfänger und Sender zur Zeit  $t_0$  ist nach (6.8)

$$d = a(t_0)R_0 \int_0^r \frac{dr'}{w(r')} = a(t_0) \int_{t_0}^{t_s} \frac{dt}{a(t)} = (t_0 - t_s) + \frac{1}{2}H \cdot (t_0 - t_s)^2 + \dots$$

Eliminiert man  $t_0 - t_s$  aus den beiden Gleichungen, so resultiert die Beziehung zwischen Rotverschiebung und Abstand:

$$z = Hd + \frac{1}{2}(1 + q)(Hd)^2 + \dots$$

Die niedrigste Ordnung entspricht, s. (6.7), einer Dopplerverschiebung um  $z = \dot{d}(t_0) = Hd(t_0)$ . Sie liefert  $H = z/d$ , wobei  $d$  aus der scheinbaren Helligkeit gewisser Sterne

bekannter absoluter Helligkeit (Cepheiden, Supernovae Typ Ia) bestimmt wird:  $H = 71 \pm 4$  (km/s)/Megaparsec, (1 Megaparsec =  $3,26 \cdot 10^6$  Lichtjahre), oder  $H^{-1} = 13,7 \cdot 10^9$  Jahre. In höherer Ordnung liefern solche Messungen auch  $q$ . Dieses bestimmt eine Kombination  $\Omega_\Lambda, \Omega_m$ : Nach der Ableitung von (6.21), bzw. nach (6.18) ist  $2q = \Omega_m - 2\Omega_\Lambda$ .

Die **kosmische Hintergrundstrahlung** (CMB) ist elektromagnetische Strahlung mit derselben Spektralverteilung wie die, die ein schwarzer Körper der Temperatur 2,73 K ausstrahlt. Sie erreicht uns mit nahezu isotroper Intensität und stammt von dem Zeitpunkt  $t_s$ , als Atomkerne und Elektronen kühl genug ( $\sim 3000$  K) wurden, um sich zu neutralen H- und He-Atome zu verbinden. Dadurch wurde die Materie durchsichtig, die Strahlung entkoppelte und wurde seither um  $1+z \approx 3000$  K/2,7 K  $\approx 1100$  rotverschoben. Aus (6.21) ergibt sich dann  $H(t_s)^2 \approx H^2 \Omega_m z^3$ . Abweichungen von der Isotropie in der Intensitätsverteilung ( $\sim 10^{-5}$ ) haben eine charakteristische Korrelationslänge

$$\Delta s \approx 2H(t_s)^{-1}, \quad (6.27)$$

die dem Radius des Horizonts zur Zeit  $t_s$  entspricht (s. (6.30) unten) und heute unter einem Winkel  $\Delta\varphi \approx 1^\circ$  beobachtet werden (z.B. bei WMAP). Nun lassen  $z, \Delta s, \Delta\varphi$  Rückschlüsse auf die Geometrie  $k$  des Universums zu: Zwei Richtungen, die sich für uns in  $\vec{x} = 0$  um  $\Delta\varphi$  unterscheiden, unterscheiden sich um denselben Winkel auch in der Karte. Damit ist  $\Delta s = a(t_s)r\Delta\varphi$ , oder mit (6.23)

$$\frac{r}{R_0} = 2 \left( \frac{|\Omega_k|}{\Omega_m} \right)^{1/2} z^{-1/2} (\Delta\varphi)^{-1}. \quad (6.28)$$

Setzt man  $r/R_0 = \sin \chi$ , vgl. (6.4), so ist  $d\chi = dr/w(r)$  und nach (6.8)

$$\chi = R_0^{-1} \int_{t_s}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = R_0^{-1} \int_{a(t_s)}^1 \frac{da}{a(t)\dot{a}(t)} = |\Omega_k|^{1/2} \int_{(1+z)^{-1}}^1 \frac{da}{a\sqrt{\Omega_k - U(a)}}. \quad (6.29)$$

Zusammen schränken die Gleichungen (6.28, 6.29) eine weitere Kombination von  $\Omega_\Lambda, \Omega_m$  ein:  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1,02 \pm 0,02$ . Neuerdings kann die Intensität der Anisotropie bei  $\Delta s$  gemessen werden und daraus auch  $\Omega_m$  bestimmt werden:

$$\Omega_m = 0,27 \pm 0,04, \quad \Omega_\Lambda = 0,73 \pm 0,04,$$

bzw.  $\rho(t_0) = 2,6 \cdot 10^{-27}$  kg m $^{-3}$ ,  $\Lambda = 1,3 \cdot 10^{-52}$  m $^{-2}$  aus (6.22). Aus der Figur auf S. 55 ergibt sich dann das Alter des Universums zu  $t_0 = (13,7 \pm 0,2) \cdot 10^9$  Jahre.

## 5. Das Kausalitäts- und Flachheitsproblem

In der Metrik (6.6) tauschen wir  $t$  gegen die konforme Zeit  $\eta$  ein gemäss  $dt = R_0 a(t) d\eta$  (vgl. die Spezialfälle (6.25, 6.26)). Dann gilt mit (6.5),

$$g = R_0^2 a^2(t) (d\eta^2 - (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))).$$

Der Bereich von  $\eta$  hat eine untere Schranke, die zu  $\eta = 0$  normiert werden kann mittels

$$\eta = R_0^{-1} \int_0^t \frac{dt'}{a(t')},$$

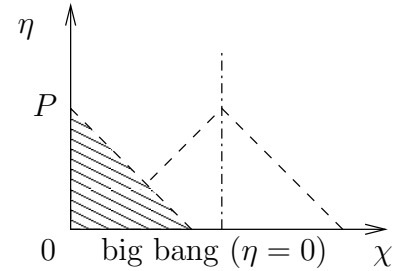
sofern das Integral bei  $t' = 0$  konvergent ist. Für den Fall einer Flüssigkeit mit Zustandsgleichung  $p = w\rho$ , und damit  $a \propto t^\alpha$ , ( $t \rightarrow 0$ ) mit  $\alpha = 2/(3 + w)$ , ist dies der Fall für  $\alpha < 1$ , d.h. für  $w > -1$ . In diesem Fall

$$\eta \approx \frac{2}{1+w} (R_0 \dot{a})^{-1}.$$

Geodäten, die bei  $\chi = 0$  enden, verlaufen radial ( $d\theta = d\varphi = 0$ ), sodass die relevante Metrik konform äquivalent ist zur Minkowski-Metrik  $d\eta^2 - d\chi^2$ . Insbesondere verlaufen Null-Geodäten mit Steigung  $\pm 45^\circ$  in der  $(\eta, \chi)$ -Ebene.

Der Teilchenhorizont bei  $P$  trennt die Weltlinien, die  $P$  erreichen, von denen die es nicht tun. Zur Zeit  $\eta$  ist die mitbewegte Materie bei  $\chi = 0$  kausal mit der bei  $\chi$  verbunden, sofern  $\chi \leq \eta$  (oder indirekt  $\chi \leq 2\eta$ ), die sich dann innerhalb einer Distanz

$$d = R_0 a(t) \eta = \frac{2}{1+w} \frac{a(t)}{\dot{a}(t)} = \frac{2}{1+w} H(t)^{-1}. \quad (6.30)$$



befindet.

Diese Distanz für  $t = t_s$  (Zeit der letzten Streuung) wird als charakteristische Korrelationslänge in der CMB-Strahlung beobachtet, s. (6.27) für  $w = 0$ . Allerdings ist die Strahlung fast homogen über den gesamten Himmel und damit über Bereiche ohne gemeinsame Vergangenheit. Dieses **Kausalitätsproblem** der Friedmann-Kosmologien kann umgangen werden durch die Annahme, dass die früheste Phase der Evolution durch  $w \approx -1$  (Inflation) dominiert ist; damit wird der Bereich von  $\eta$  nach unten unbeschränkt, oder er liefert zumindest eine Skala (6.30), die sich über das gesamte Universum erstreckt.

Eine weitere Schwierigkeit wird erhellt aus dem “Flachheitsparameter”, (6.23),

$$\Omega_k = -\frac{k}{R_0^2 \dot{a}(t_0)^2},$$

so wie er durch Eigenschaften des heutigen Universums ausgedrückt ist. In der Vergangenheit war die entsprechende Grösse  $\Omega_k(t) = -k/R_0^2 \dot{a}(t)^2$ , also

$$\frac{\Omega_k(t)}{\Omega_k} = \frac{\dot{a}(t_0)^2}{\dot{a}(t)^2} = \frac{H^2}{\dot{a}^2} = \frac{1}{\Omega_k + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_m a^{-1}}$$

wegen (6.21). Verfolgen wir die Zeit rückwärts,  $a(t) \rightarrow 0$ , so finden wir  $\Omega_k(t)/\Omega_k \rightarrow 0$  wegen  $\Omega_m > 0$ : Das Universum muss viel flacher als heute ( $\Omega_k = 0.02 \pm 0.02$ ) gewesen sein. Dies erscheint als eine aussergewöhnliche Anfangsbedingung (**Flachheitsproblem**). Auch dazu schafft die Inflation Abhilfe: Dank der selben Gleichung wäre diese Anfangsbedingung das Ende einer Evolution mit  $\Omega_\Lambda > 0$  vorwärts in der Zeit (und damit mit wachsendem  $a(t)$ ) beginnend mit einer noch früheren, generischen Bedingung. Jenes  $\Omega_\Lambda$ , das von einer Flüssigkeit mit  $w \approx -1$  stammt, ist von der kosmologischen Konstanten zu unterscheiden und viel grösser als letztere.

## 6. Rotverschiebung und Symmetrien

Aus Symmetrien kann man manchmal  $\nu_2/\nu_1$  ohne Berechnung der Null-Geodäten bestimmen. Geodäten sind bestimmt durch das Variationsprinzip

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} L d\lambda = 0, \quad L = \frac{1}{2}g(\dot{x}, \dot{x})$$

bei festen Endpunkten  $(x^{(i)}, \lambda^{(i)})_{i=1,2}$ . Sind bloss die  $\lambda^{(i)}$  fest, so ist

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} L d\lambda = (p, \delta x) \Big|_{(1)}^{(2)}, \quad (6.31)$$

mit

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = \dot{x}_\mu.$$

Dies folgt aus der Euler-Lagrange Gleichung  $d(p, \delta x)/d\lambda = \delta L$ .

Für Null-Geodäten ( $L = 0$ ) gilt dann mit  $\delta x^{(i)} = u^{(i)} \delta \tau^{(i)}$  (vgl. Fig. S. 48),  $u = 4$ -er Geschwindigkeit Sender/Empfänger,

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\delta \tau^{(1)}}{\delta \tau^{(2)}} = \frac{(u^{(2)}, p)}{(u^{(1)}, p)}. \quad (6.32)$$

Es sei nun  $\varphi_s$  eine 1-parametrische Gruppe von Isometrien von  $M$ , vgl. (6.1). Man nennt das erzeugende Vektorfeld  $K$  von  $\varphi_t$  ein **Killing-Feld**:

$$L_K g = 0.$$

Dann gilt längs jeder Geodäte

$$(K, p) = \text{konstant}. \quad (6.33)$$

**Beweis:** (Dies ist der Satz von Noether aus der Mechanik.) Unter der Variation  $x_t = \varphi_t(x)$  ist  $L$  nach Voraussetzung invariant. Dabei ist  $\delta x = K$  und (6.31) lautet  $0 = (p, K) \Big|_{(1)}^{(2)}$ .  $\square$

Wir wollen fortan die Situation betrachten, wo bei (1), bzw. (2) der Killing-Vektor in der durch  $u$  und  $p$  aufgespannten Ebene liegt:

$$K = \alpha u + \beta p. \quad (6.34)$$

Aus  $\beta p = -\alpha u + K$ , sowie aus  $(u, u) = 1$ ,  $(p, p) = 0$  folgt

$$0 = (\beta p, \beta p) = \alpha^2 - 2\alpha(K, u) + (K, K),$$

d.h.

$$\alpha = (K, u) \pm \sqrt{(K, u)^2 - (K, K)}. \quad (6.35)$$

Zusammen mit  $(K, p) = \alpha(u, p)$  und (6.32, 6.33) folgt

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{(K, p)_2}{(K, p)_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

**Spezialfälle:**

i)  $K \parallel u$ : In diesem Fall ist  $\beta = 0$  und aus  $(K, K) = \alpha^2$  (oder aus (6.35)) folgt

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{(K, K)_1^{1/2}}{(K, K)_2^{1/2}}$$

ii)  $K \perp u$ : In diesem Fall ist  $\alpha = \pm[-(K, K)]^{1/2}$  und

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{[-(K, K)_1]^{1/2}}{[-(K, K)_2]^{1/2}} . \tag{6.36}$$

**Anwendungen:**

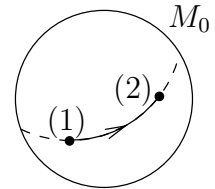
1) **Kosmologische Rotverschiebung** im homogenen isotropen Kosmos (6.6). Ist  $(t(\lambda), x(\lambda)) \in I \times M_0 = M$  eine Nullgeodäte, so ist  $x(\lambda)$  eine Geodäte bezgl.  $(M_0, g_0)$ , wenn auch nicht eine affin parametrisierte. Zur Überprüfung variieren wir  $x(\lambda)$  mit festen Endpunkten in  $M_0$  und machen daraus eine Schar von Raumzeitkurven mit  $L = 0$  durch  $dt/d\lambda = a(t)[g_0(\dot{x}, \dot{x})]^{1/2}$ . Für diese kann man bloss fordern, dass  $\delta t^{(1)} = 0$ . Dasselbe folgt dann für den anderen Endpunkt,  $\delta t^{(2)} = 0$ , wegen (6.9) und  $(p, \delta x)|_{(i)} = p^0 \delta t|_{(i)}$ . Ebenso folgt  $\delta \eta^{(i)} = 0$  für jede Funktion  $\eta(t)$ . Definiert man diese durch  $d\eta = dt/a(t)$ , so folgt

$$0 = \delta \eta \Big|_{(1)}^{(2)} = \delta \int_{(1)}^{(2)} \frac{d\eta}{d\lambda} d\lambda = \delta \int_{(1)}^{(2)} [g_0(\dot{x}, \dot{x})]^{1/2} d\lambda .$$

Sei  $\varphi_s : M_0 \rightarrow M_0$  eine 1-parametrische Schar von Isometrien ( $\varphi_s^* g_0 = g_0$ ) mit erzeugendem  $K$ . Sie werden zu Isometrien  $M \rightarrow M$ , mit entsprechendem Killing-Feld auf  $M$ , mittels

$$\varphi_s(t, q) = (t, \varphi_s(q)) , \quad K_{(t,q)} = (0, K_q) ,$$

( $q \in M_0$ ). Seien  $q_1, q_2 \in M_0$  die Orte ruhender Sender bzw. Empfänger. Wegen der Symmetrie von  $M_0$  ist die Geodäte  $x(\lambda)$  die Integralkurve eines Killing-Felds  $K_q$ , sodass  $K_q \parallel \dot{x}$  und demzufolge (6.34) zutrifft. Ferner sind wir im Fall ii), also gilt (6.36). Nun ist



$$g(K, K) = -a(t)^2 g_0(K, K) , \quad g_0(K, K)_2 = g_0(K, K)_1 ,$$

letzteres wegen

$$\frac{d}{ds} g_0(K, K)_{\varphi_s(q)} \Big|_{s=0} = K g_0(K, K) = \underbrace{L_K g_0(K, K)}_{=0} + 2g_0(\underbrace{[K, K]}_{=0}, K) = 0 .$$

Also ist

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} ,$$

wie in (6.9).

2) **Gravitationelle Rotverschiebung** in stationärer Metrik. In passenden Koordinaten ist

$$g_{\mu\nu,0} = 0 , \quad (\partial/\partial x^0 \text{ zeitartig}) .$$

Dann ist das Vektorfeld  $K = \partial/\partial x^0 = (1, 0, 0, 0)$  ein Killing-Feld:

$$(L_K g)_{\mu\nu} = \underbrace{K^\lambda g_{\mu\nu,\lambda}}_{g_{\mu\nu,0}=0} + g_{\lambda\nu} \underbrace{K^\lambda{}_{,\mu}}_{=0} + g_{\mu\lambda} \underbrace{K^\lambda{}_{,\nu}}_{=0} = 0. \quad (6.37)$$

Für ruhende Beobachter gilt i):

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{g_{00}(\vec{x}_1)^{1/2}}{g_{00}(\vec{x}_2)^{1/2}},$$

wie in (4.17).

3) **Longitudinaler Doppler-Effekt** in der SRT: Ruhender Empfänger, Sender mit Geschwindigkeit  $\vec{\beta}$ , also  $u^{(1)} = \gamma(1, \vec{\beta})$ , die dem Empfänger (a) zu- oder (b) abgewandt sein kann. Für  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  ist jedes konstante Vektorfeld Killing. Für  $K = (1, 0, 0, 0)$  gilt (6.34) und es ist  $\alpha_2 = 1$ ,  $(K, u^{(1)}) = \gamma$ ,

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \alpha_1 = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1} = \gamma(1 \pm \beta) = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}},$$

den beiden Fällen (a,b) entsprechend.

# 7. Die Schwarzschild-Kruskal Metrik

## 1. Stationäre und statische Metrik

Es sei  $\varphi_s$  eine 1-parametrische Gruppe von Isometrien von  $M$ . Man nennt das erzeugende Vektorfeld  $K$  von  $\varphi_s$  ein **Killing-Feld**. Nach (1.13) gleichbedeutend ist

$$L_K g = 0 .$$

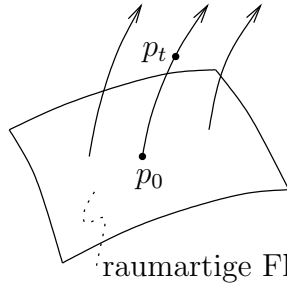
Eine Metrik heisst (lokal) **stationär**, falls in einem Kartengebiet

$$g_{\mu\nu,0} = 0 , \quad (\partial/\partial x^0 \text{ zeitartig}) . \quad (7.1)$$

Dann ist nach (6.37)  $K = \partial/\partial x^0$  ein Killing-Feld.

**Umkehrung:**  $g$  ist stationär, falls ein zeitartiges Killing-Feld  $K$  existiert:

$$L_K g = 0 ; \quad (K, K) > 0 .$$



**Beweis:** Durch Konstruktion einer Karte, in der (7.1) gilt. Es sei  $\varphi_t$  der durch  $K$  erzeugte Fluss,  $x^1, x^2, x^3$  beliebige Koordinaten in  $N$  für  $p_0$  und

$$(t, x^1, x^2, x^3)$$

die Koordinaten von  $p_t = \varphi_t(p_0)$ . Dann ist in dieser Karte  $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , also (vgl. (6.37))  $L_K g = 0$  äquivalent zu  $g_{\mu\nu,0} = 0$ .  $\square$

Eine Metrik heisst (lokal) **statisch**, falls in einem Kartengebiet ( $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ )

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(\vec{x})(dx^0)^2 + \sum_{i,k=1}^3 g_{ik}(\vec{x}) dx^i dx^k$$

mit  $g_{00} > 0$ . Dann ist  $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$  ein Killing-Feld. Sei  $\widehat{K} = gK$  die entsprechende 1-Form,  $K_\mu = (g_{00}, 0, 0, 0)$ . Für sie gilt  $\widehat{K} = g_{00} dx^0$ , also  $d\widehat{K} = dg_{00} \wedge dx^0$  und

$$\widehat{K} \wedge d\widehat{K} = 0 . \quad (7.2)$$

**Umkehrung:** Eine Metrik ist statisch, falls es ein zeitartiges Killing-Feld  $K$  gibt mit  $\widehat{K} \wedge d\widehat{K} = 0$  (Beweis, s. unten).

Die Bedeutung von (7.2) erhellt aus folgender Vorbemerkung, der anschliessenden Fragestellung und dem Satz. Gegeben sei ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  mit  $X_p \neq 0$ , ( $p \in M$ ); dann ist  $V_p = \{\lambda X_p \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset T_p M$  ein Unterraum der Dimension 1. Offensichtlich gibt es eine Schar von Kurven  $\gamma$  so, dass  $\dot{\gamma}_p \in V_p$ , und zwar die Integralkurven von  $X$ . Sei nun stattdessen eine 1-Form  $\omega$  auf  $M$  mit  $\omega_p \neq 0$ , ( $p \in M$ ) gegeben. Dann ist  $V_p = \{X_p \in T_p M \mid \omega_p(X_p) \neq 0\} \subset T_p M$  ein Unterraum der Kodimension 1. Gibt es eine Blätterung von  $M$  in Untermannigfaltigkeiten  $N \subset M$  so, dass

$$T_p N = V_p ? \quad (7.3)$$



Falls ja, heisst  $N$  eine Integralfläche von  $V_p$ .

**Satz** (Frobenius). Sei  $\omega$  eine 1-Form. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

i)  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

ii) für Vektorfelder  $X, Y$  gilt:  $\omega(X) = \omega(Y) = 0 \Rightarrow \omega([X, Y]) = 0$ .

iii) lokal ist  $\omega$  von der Form

$$\omega = \lambda df$$

mit  $\lambda, f \in \mathcal{F}$ .

**Bemerkungen.** 1) Sofern  $\omega_p \neq 0$ , impliziert (iii), dass die Niveauflächen  $N = \{p \in M \mid f(p) = \text{const}\}$  Gl. (7.3) erfüllen. Umgekehrt, falls es Integralflächen  $N$  gibt, so bedeutet  $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ , dass  $X, Y$  Vektorfelder auf  $N$  sind. Damit ist es  $[X, Y]$  ebenfalls, also gilt (ii).

2) Der Satz kann auf Integralflächen von kleinerer Dimension verallgemeinert werden.

3) Der Satz setzt keine Metrik voraus. Die Zerlegung in (iii) ist nicht eindeutig.

**Zusatz.** Ist eine Metrik  $g$  mit Killing-Feld  $K$  vorhanden, so kann für  $\omega = \widehat{K}$  in Eigenschaft (iii)  $\lambda = (K, K)$  gewählt werden:

$$\widehat{K} = (K, K)df, \quad (7.4)$$

wobei  $Kf = 1$ .

Die Umkehrung von (7.2) folgt nun dadurch, dass in der Konstruktion auf S. 62  $N$  als Niveaufläche von  $f$ , z.B.  $f = 0$ , gewählt wird. Der Fluss  $\varphi_t$  bildet dann  $N$  in die Fläche  $f = t$  ab, so dass  $f_{,i} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Damit ist

$$g_{0i} = \left(K, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = K_i = (K, K)f_{,i} = 0.$$

**Beweise.** Man kann annehmen, dass  $\omega_p \neq 0$ . Wir zeigen (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) dadurch, dass beide äquivalent sind zu

$$d\omega = \omega \wedge \theta \quad (7.5)$$

mit einer 1-Form  $\theta$ . Sei  $e^1 = \omega, e^2, \dots, e^n$  eine lokale Basis von 1-Formen und  $d\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j$  (Summe über  $i < j$ ).

i) Der Ausdruck

$$\omega \wedge d\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j \wedge e^i$$

verschwindet genau dann, falls  $\omega_{ij} = 0$  für  $1 < i < j$ , also falls (7.5) gilt, wobei  $\theta = \omega_{ij}e^j$ .

ii) Nach (1.21) ist

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]). \quad (7.6)$$

Bei  $\omega(X) = \omega(Y) = 0$  sind demnach  $d\omega(X, Y) = 0$  und  $\omega([X, Y]) = 0$  äquivalent. Da in  $d\omega(X, Y) = \omega_{ij}(X^i Y^j - X^j Y^i)$  die Komponenten  $X^i = e^i(X), Y^i$  frei wählbar sind bis auf  $X^1 = Y^1 = 0$ , folgt wieder  $\omega_{ij} = 0$  für  $1 < i < j$ .

Die Implikation (iii)  $\Rightarrow$  (i) ist klar. Was (i)  $\Rightarrow$  (iii) anbetrifft, beweisen wir bloss den Spezialfall des Zusatzes und behaupten

$$d\widehat{K}(X, K) = X(K, K) = d\lambda(X) , \quad (7.7)$$

wobei  $\lambda = (K, K)$ . In der Tat,

$$0 = (L_K g)(X, K) = K(X, K) - ([K, X], K) - (X, \underbrace{[K, K]}_{=0}) ,$$

also mit (7.6) für  $\omega = \widehat{K}$

$$\begin{aligned} d\widehat{K}(X, K) &= X\widehat{K}(K) - K\widehat{K}(X) - \widehat{K}([X, K]) \\ &= X(K, K) - \underbrace{K(K, X) - (K, [X, K])}_{=0} , \end{aligned}$$

was (7.7) belegt. Nun ist

$$\begin{aligned} 0 &= (\widehat{K} \wedge d\widehat{K})(K, X, Y) \\ &= \widehat{K}(K)d\widehat{K}(X, Y) + \widehat{K}(X)d\widehat{K}(Y, K) + \widehat{K}(Y)d\widehat{K}(K, X) \\ &= \lambda d\widehat{K}(X, Y) + \widehat{K}(X)d\lambda(Y) - \widehat{K}(Y)d\lambda(X) \end{aligned}$$

d.h.  $\lambda d\widehat{K} + \widehat{K} \wedge d\lambda = 0$ , also

$$d(\lambda^{-1}\widehat{K}) = \lambda^{-2}(\lambda d\widehat{K} - d\lambda \wedge \widehat{K}) = 0 .$$

Nach dem Lemma von Poincaré (s. S. 12) ist  $\lambda^{-1}\widehat{K} = df$ . Es folgt (7.4) und daraus  $(K, K) = \widehat{K}(K) = (K, K)Kf$ , also  $Kf = 1$ .  $\square$

## 2. Die Schwarzschild-Metrik

Ansatz: **Statische Metrik** der Form

$$ds^2 = e^{2a} dt^2 - [e^{2b} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (7.8)$$

auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times S^2$  mit den Koordinaten  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $(\theta, \varphi)$  Polarkoordinaten auf  $S^2$ . Dabei sind  $a = a(r)$ ,  $b = b(r)$  unbekannte Funktionen, die aus den Feldgleichungen (5.10) im Vakuum zu bestimmen sind.

**Bemerkungen:** 1) Die Metrik (7.8) ist invariant unter Drehungen der  $S^2$ . Ohne Beweis: Sie ist die allgemeinste statische Metrik, die sphärisch symmetrisch ist: Damit gemeint ist, dass  $R \in \text{SO}(3) : M \ni p \mapsto R(p) \in M$  auf der Raum-Zeit  $M$  als Isometrie wirkt, d.h.  $R^*g = g$ , und dass für jedes  $p \in M$  die Bahn  $\{R(p) \mid R \in \text{SO}(3)\} \subset M$  eine raumartige 2-dimensionale Fläche ist. Die Koordinate  $r$  in (7.8) ist dann so gewählt, dass  $4\pi r^2$  ihr Mass ist.

2) Die Koordinatentransformation  $t \mapsto \tilde{t} = e^{-ct}$  ( $r, \theta, \varphi$  fest) entspricht der Ersetzung

$$a \mapsto \tilde{a} = a + c \quad (7.9)$$

in (7.8):  $a$  und  $\tilde{a}$  stellen dieselbe Raumzeit dar.

Der Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$  kann entweder anhand (a) des Cartan'schen Kalküls oder (b) obiger Karte berechnet werden.

a) **Basis von 1-Formen:**

$$\left. \begin{array}{l} e^0 = e^a dt \\ e^1 = e^b dr \\ e^2 = r d\theta \\ e^3 = r \sin \theta d\varphi \end{array} \right\} g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

( $e^2, e^3$  sind äquivalent bzgl. der sphärischen Symmetrie). Es ist

$$\begin{aligned} de^1 &= 0 \\ de^0 &= a' e^a dr \wedge dt = e^1 \wedge (a' e^{a-b} dt) \\ de^2 &= dr \wedge d\theta = e^1 \wedge (e^{-b} d\theta) \\ de^3 &= \sin \theta dr \wedge d\varphi + r \cos \theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= e^1 \wedge (e^{-b} \sin \theta d\varphi) + e^2 \wedge (\cos \theta d\varphi) \end{aligned}$$

Die Strukturgleichungen (3.16, 3.17) für die **Zusammenhangsformen**  $\omega^\mu{}_\nu$  sind:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} &= dg_{\mu\nu} = 0 \\ de^\mu &= e^\nu \wedge \omega^\mu{}_\nu. \end{aligned}$$

**Lösung:** Die  $\omega^\mu{}_\nu \neq 0$  sind

$$\begin{aligned} -\omega^2{}_3 &= \omega^3{}_2 = \cos \theta d\varphi \\ -\omega^1{}_3 &= \omega^3{}_1 = e^{-b} \sin \theta d\varphi \\ -\omega^1{}_2 &= \omega^2{}_1 = e^{-b} d\theta \\ \omega^1{}_0 &= \omega^0{}_1 = a' e^{a-b} dt \end{aligned}$$

**Krümmungsformen:**  $\Omega^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\sigma \wedge \omega^\sigma{}_\nu$ .

**Ergebnis:** ( $i = 2, 3$ ),  $\neq 0$  sind

$$\begin{aligned} \Omega^0{}_1 &= \Omega^1{}_0 = (a'b' - a'' - a'^2) e^{-2b} e^0 \wedge e^1 \\ \Omega^0{}_i &= \Omega^i{}_0 = -\frac{a'}{r} e^{-2b} e^0 \wedge e^i \\ -\Omega^1{}_i &= \Omega^i{}_1 = -\frac{b'}{r} e^{-2b} e^1 \wedge e^i \\ -\Omega^2{}_3 &= \Omega^3{}_2 = -\frac{1}{r^2} (1 - e^{-2b}) e^2 \wedge e^3. \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \Omega^1{}_0 &= d\omega^1{}_0 = (a'(a' - b') + a'') e^{a-b} dr \wedge dt \\ \Omega^2{}_0 &= \omega^2{}_1 \wedge \omega^1{}_0 = a' e^{a-2b} d\theta \wedge dt \\ \Omega^2{}_1 &= d\omega^2{}_1 = -b' e^{-b} dr \wedge d\theta \\ \Omega^3{}_2 &= d\omega^3{}_2 + \omega^3{}_1 \wedge \omega^1{}_2 = -\sin \theta (1 - e^{-2b}) d\theta \wedge d\varphi \end{aligned}$$

**Ricci-Tensor:**

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \Omega^\alpha{}_\mu(e_\alpha, e_\nu)$$

ist diagonal wegen  $\Omega^\alpha{}_\mu \sim e^\alpha \wedge e^\mu$ . Man findet:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -(a'b' - a'' - a'^2)e^{-2b} + \frac{2a'}{r}e^{-2b} \\ R_{11} &= (a'b' - a'' - a'^2)e^{-2b} + \frac{2b'}{r}e^{-2b} \\ R_{22} = R_{33} &= -\frac{a'}{r}e^{-2b} + \frac{b'}{r}e^{-2b} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2b}) \end{aligned}$$

b) Die nicht verschwindenden Christoffel Symbole sind ( $' = d/dr$ )

$$\begin{aligned} \Gamma^t{}_{tr} &= \Gamma^t{}_{rt} = a' , \\ \Gamma^r{}_{tt} &= a'e^{2(a-b)} , \quad \Gamma^r{}_{rr} = b' , \quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -re^{2b} , \quad \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -r(\sin^2 \theta)e^{-2b} , \\ \Gamma^\theta{}_{r\theta} &= \Gamma^\theta{}_{\theta r} = r^{-1} , \quad \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin \theta \cos \theta , \\ \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = r^{-1} , \quad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \cot \theta . \end{aligned}$$

Der Ricci-Tensor ist diagonal mit

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -(a'b' - a'' - a'^2)e^{2(a-b)} + \frac{2a'}{r}e^{2(a-b)} , \\ R_{rr} &= (a'b' - a'' - a'^2) + \frac{2b'}{r} , \\ R_{\theta\theta} &= r(b' - a')e^{-2b} + 1 - e^{-2b} , \\ R_{\varphi\varphi} &= (\sin^2 \theta)R_{\theta\theta} . \end{aligned} \tag{7.11}$$

**Feldgleichungen** (5.10) im Vakuum:

$$R_{\mu\nu} = 0 .$$

Aus (a)  $R_{00} + R_{11} = 0$  oder (b)  $R_{tt}e^{-2(a-b)} + R_{rr} = 0$  folgt  $a' + b' = 0$ , also unter Benützung der Freiheit (7.9):

$$a + b = 0 .$$

Aus (a)  $R_{22} = R_{33} = 0$  oder (b)  $R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} = 0$  folgt dann

$$\begin{aligned} 1 &= e^{-2b} - 2rb'e^{-2b} = (re^{-2b})' \\ re^{-2b} &= r - 2m , \quad (m : \text{Integrationskonstante}) , \\ e^{2a} &= e^{-2b} = 1 - \frac{2m}{r} . \end{aligned} \tag{7.12}$$

Damit ist auch die letzte verbleibende Gleichung (a)  $R_{00} = 0$ , bzw. (b)  $R_{rr} = 0$  erfüllt: sie lautet

$$((2b'^2 - b'')r - 2b')e^{-2b} = 0$$

und folgt durch Differentiation von (7.12).

### Schwarzschild-Metrik:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (7.13)$$

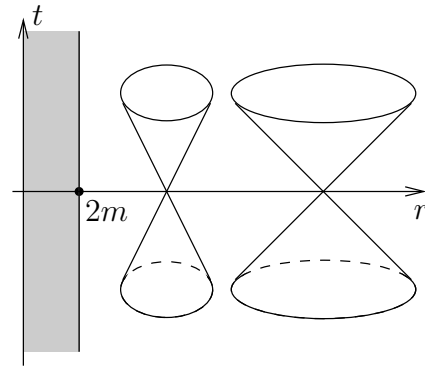
Für  $r \rightarrow \infty$  geht (7.13) über in die flache Metrik der SRT. So beschreibt die Schwarzschild-Metrik das Gravitationsfeld im Äusseren einer sphärisch-symmetrischen Massenverteilung. Bedeutung von  $m$ : Nach (4.14) ist das Newtonsche Potential für  $r \rightarrow \infty$

$$\varphi = \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1) = -\frac{mc^2}{r} = -\frac{G_0 M}{r}$$

für einen Zentralkörper der Masse  $M$ . Die Konstante  $m$  erweist sich also als

$$m = \frac{G_0 M}{c^2} (> 0) .$$

Beim Schwarzschild-Radius  $r = 2m$  wird die Metrik (7.13) in der verwendeten Karte singular: Die Öffnung der Lichtkegel strebt gegen Null. Das durch (7.13) beschriebene Stück der Raumzeit ist nebenan skizziert. Wir werden sehen, dass bei  $r = 2m$  nur die Karte versagt, ohne dass die Metrik singular wird: Es gibt eine Karte in welcher die Raumzeit fortgesetzt wird.



### 3. Geodäten der Schwarzschild-Metrik

Geodäten sind Bahnen zur Lagrange-Funktion  $\mathcal{L} = (\dot{x}, \dot{x})$ , vgl. (3.7), die lautet

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + (\sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2)$$

( $\cdot = d/d\tau$ ,  $\tau$ : affiner Parameter;  $c = 1$ ). Die  $\theta$ -Gleichung

$$-(r^2 \dot{\theta})' + (r \dot{\varphi})^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

ist identisch erfüllt durch  $\theta = \pi/2$ , was wir nun voraussetzen (Bahn in Äquatorebene). Dann ist

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - (r \dot{\varphi})^2 .$$

Die Variablen  $t, \varphi$  sind zyklisch: Es gelten die **Erhaltungssätze**

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\varphi} &= l , & (\text{Drehimpuls}) \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} &= \mathcal{E} . \end{aligned} \quad (7.14)$$

Ferner ist  $\mathcal{L}$  erhalten. Dann folgt für die **radiale Gleichung**

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} (\mathcal{E}^2 - \dot{r}^2) - \frac{l^2}{r^2} ;$$

oder:

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 + V(r) &= \mathcal{E}^2, \\ V(r) &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\mathcal{L} + \frac{l^2}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Es ist zweckmässig, die Variable  $u = 1/r$  zu benützen. Aus  $\dot{u} = -u^2\dot{r}$  und  $\dot{\varphi} = lu^2$  folgt für  $u' = du/d\varphi$

$$u'^2 = \left(\frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 - V}{l^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{l^2} - (1 - 2mu) \left(\frac{\mathcal{L}}{l^2} + u^2\right)$$

oder, nach  $\varphi$  abgeleitet (und dividiert durch  $2u'$ ):

$$u'' + u - \mathcal{L} \frac{m}{l^2} = 3mu^2. \quad (7.16)$$

### i) Periheldrehung

Wir betrachten **zeitartige** Geodäten (4.4, 4.5) (frei fallende Körper) und normieren dann

$$\mathcal{L} = 1, \quad \text{d.h. } \tau = \text{Eigenzeit}.$$

Dann lautet (7.16)

$$u'' + u - \frac{m}{l^2} = 3mu^2. \quad (7.17)$$

Der Vergleich mit der **nicht-relativistischen** Gleichung für die radiale Bewegung (s. Allgemeine Mechanik)

$$\dot{r}^2 - \frac{2m}{r} + \frac{l^2}{r^2} = 2E,$$

bzw.

$$u'' + u - \frac{m}{l^2} = 0, \quad (7.18)$$

zeigt, dass (abgesehen von  $\mathcal{E}^2 - 1 = 2E$ ) der Term  $\sim r^{-3}$  in (7.15), bzw.  $\sim u^2$  in (7.17), die ART-Korrektur beschreibt. Jede (nichtrelativistische) Lösung von (7.18),

$$u_0 = \frac{1}{d}(1 + \varepsilon \cos \varphi), \quad d = \frac{l^2}{m},$$

stellt für  $0 < \varepsilon < 1$  eine **Ellipse** dar: Dabei wurde das Azimut so gewählt, dass sich das Perihel bei  $\varphi = 0, 2\pi, \dots$  befindet. Für die Lösung von (7.17) setzen wir an  $u = u_0 + v$  und erhalten (in 1. Ordnung in  $m$ ) für die Störung  $v$  die lineare inhomogene Gleichung

$$v'' + v = \frac{3m}{d^2}(1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi).$$

Für die Anfangsbedingungen  $v = v' = 0$  bei  $\varphi = 0$  haben die drei Gleichungen

$$v'' + v = \begin{cases} A_1 \\ A_2 \cos \varphi \\ A_3 \cos^2 \varphi \end{cases}$$

die Lösungen

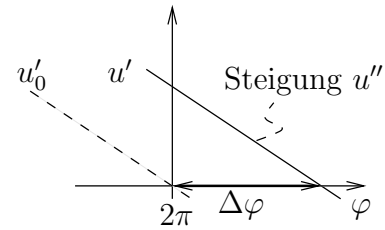
$$v = \begin{cases} A_1(1 - \cos \varphi) \\ \frac{1}{2}A_2\varphi \sin \varphi \\ A_3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2\varphi - \frac{2}{3}\cos \varphi\right) \end{cases}.$$

Nur der 2. Term liefert einen Beitrag zu  $u'(2\pi) = v'(2\pi)$ , nämlich

$$u'(2\pi) = A_2\pi = \frac{6\pi m \varepsilon}{d^2}.$$

Wegen  $u''(2\pi) = -\varepsilon/d$  (0. Ordnung) ist also die Perihel-Verschiebung (d.h. Verschiebung der Nullstelle von  $u'(\varphi)$ ):

$$\Delta\varphi = -\frac{u'(2\pi)}{u''(2\pi)} = \frac{6\pi m}{d} = \frac{6\pi m}{a(1-\varepsilon^2)},$$



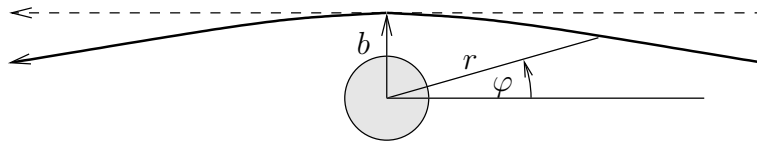
wobei  $a$  die grosse Halbachse der Ellipsenbahn ist. Für Merkur ergibt sich  $\Delta\varphi \approx 43''$  pro Jahrhundert ( $'' =$  Bogensekunden), was heute auf ca. 1% bestätigt ist. (Andere Störungen sind ca. 10 mal grösser!)

## ii) Lichtablenkung an der Sonne

Wir betrachten **lichtartige Geodäten** (4.7):  $\mathcal{L} = 0$ . Dann lautet (7.16)

$$u'' + u = 3mu^2. \quad (7.19)$$

Die Gleichung  $u'' + u = 0$  beschreibt hingegen den geraden Lichtstrahl  $u_0 = b^{-1} \sin \varphi$ , d.h.  $r \sin \varphi = b$  (Wahl des Azimuts: Perihel bei  $\varphi = \pi/2$ ):



Lösung von (7.19) durch Störungsrechnung:  $u = u_0 + v$ ,

$$v'' + v = \frac{3m}{b^2} \sin^2 \varphi$$

mit  $v = v' = 0$  bei  $\varphi = \pi/2$ :

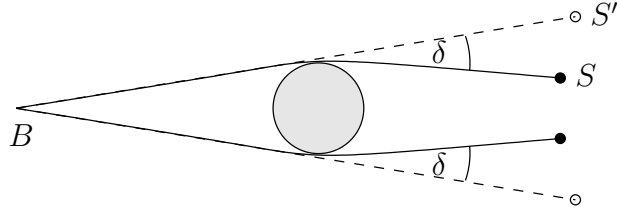
$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{3m}{b^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi \right) \\ &= \frac{\varphi}{b} + \frac{3m}{b^2} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \varphi \right) + O(\varphi^2), \quad (\varphi \rightarrow 0), \end{aligned}$$

d.h. die Nullstelle  $\varphi = 0$  von  $u_0$  verschiebt sich in 1. Ordnung in  $m$  zu  $\varphi_\infty = -2m/b$ . Die Gesamtabweichung  $\delta = 2|\varphi_\infty|$  beträgt

$$\delta = \frac{4m}{b} \approx \frac{1,75''}{b/R_\odot}$$

für die Sonne mit Radius  $R_\odot$  und kann bei einer totalen Sonnenfinsternis beobachtet werden. Die experimentelle Übereinstimmung liegt bei etwa 1%. (Andere Störungen: optische Ablenkung in der Sonnenkorona.)

( $B$ : Beobachter;  $S, S'$ : echte und scheinbare Position eines Sterns).



### 3. Die Kruskal-Fortsetzung der Schwarzschild-Metrik: Schwarzes Loch

Wir untersuchen die Singularität der Metrik in der Kartendarstellung (7.13) bei  $r = 2m > 0$ . Die skalare (d.h. kartunenunabhängige) Grösse

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48m^2}{r^2} \quad (7.20)$$

weist bei  $r = 2m$  keine Singularität auf. Für ein Teilchen, das radial fällt ( $l = 0$ ), gilt nach (7.15)

$$\dot{r} = -(\mathcal{E}^2 - V(r))^{1/2}, \quad V(r) = 1 - \frac{2m}{r},$$

( $\dot{\phantom{x}} = d/d\tau$ ). Das Teilchen fällt also mit zunehmendem  $|\dot{r}|$  gegen den Schwarzschildradius  $r = 2m$ , wo es nach endlicher Eigenzeit  $\tau$  ankommt. Die Koordinatenzeit  $t$  aber divergiert: Es ist

$$\dot{t} = \mathcal{E}/V(r),$$

also

$$-\frac{dt}{dr} = -\frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \frac{\mathcal{E}}{(1 - \frac{2m}{r})\sqrt{\mathcal{E}^2 - (1 - \frac{2m}{r})}} \approx \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \rightarrow \infty$$

für  $r \rightarrow 2m$ . Setzt man  $r =: 2m + \rho$ , so ist

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{2m}$$

in 1. Ordnung in  $\rho$ . Die Bahn

$$r = 2m + \text{const } e^{-t/2m}$$

gelangt also erst für  $t = +\infty$  bei  $r = 2m$  an. Dies und (7.20) deuten darauf hin, dass die Singularität der Schwarzschild-Metrik bei  $r = 2m$  nur auf einem Versagen des Koordinatensystems beruht — was sich durch eine Koordinatentransformation bestätigt:

#### Kruskal-Transformation

$$u = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \text{ch } \frac{t}{4m},$$

$$v = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \text{sh } \frac{t}{4m}.$$

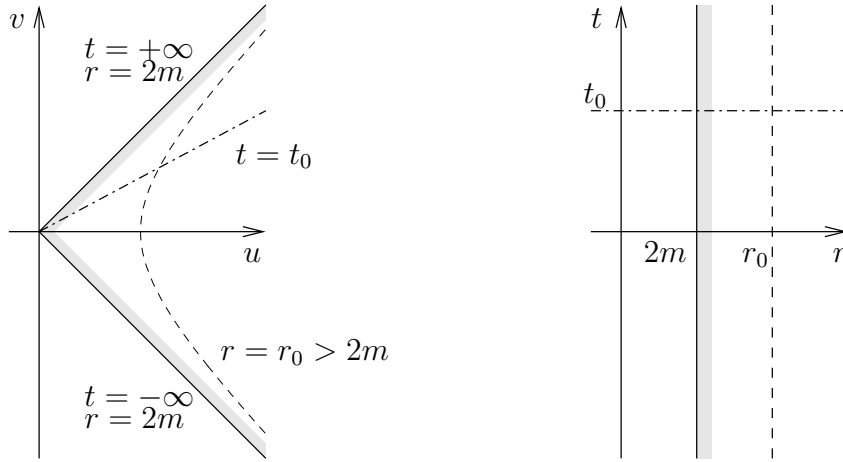
Dies ist nur eine Transformation  $(t, r) \leftrightarrow (u, v)$ ;  $\theta, \varphi$  bleiben unverändert. Es ist nun

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{r/2m} \equiv g\left(\frac{r}{2m}\right), \quad (7.21)$$

$$v/u = \text{th } \frac{t}{4m}.$$

d.h. das Kartengebiet  $-\infty < t < +\infty, r > 2m$  wird abgebildet auf den Sektor  $u > |v|$  in der  $(u, v)$ -Ebene:





Die Metrik lautet in den neuen Koordinaten:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-r/2m} (dv^2 - du^2) \quad (7.22)$$

(+ Winkelanteil:  $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ ). Im letzten Ausdruck ist  $r = r(u, v)$  als Lösung von (7.21) aufzufassen.

**Beweis:** Wir setzen  $4m = 1$ . Mit

$$\frac{d}{dr}(2r - 1)^{1/2} e^r = 2r(2r - 1)^{-1/2} e^r$$

ist

$$\begin{aligned} du &= 2r(2r - 1)^{-1/2} e^r \operatorname{ch} t \, dr + (2r - 1)^{1/2} e^r \operatorname{sh} t \, dt \\ dv &= 2t(2r - 1)^{-1/2} e^r \operatorname{sh} t \, dr + (2r - 1)^{1/2} e^r \operatorname{ch} t \, dt \\ dv^2 - du^2 &= (2r - 1)e^{2r} dt^2 - 4r^2(2r - 1)^{-1} e^{2r} dr^2 \\ &= 2re^{2r} \left[ \left(1 - \frac{1}{2r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{2r}\right)^{-1} dr^2 \right] \end{aligned}$$

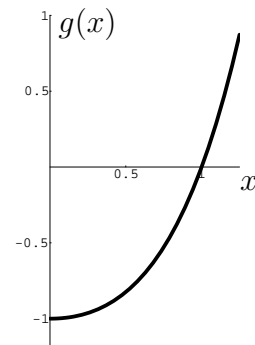
Nun ersetzt man wieder  $r \rightarrow r/4m$ ,  $t \rightarrow t/4m$ . □

**Die Fortsetzung:** Die Funktion  $g(x)$  wächst auf  $0 < x < \infty$  monoton von  $-1$  nach  $+\infty$ , da

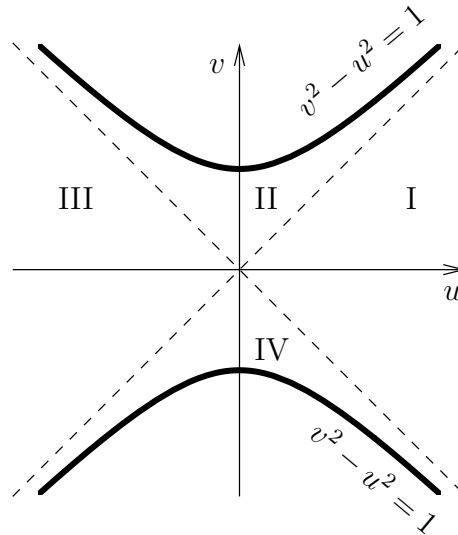
$$((x - 1)e^x)' = xe^x > 0.$$

Deshalb ist  $r(u, v)$  eindeutig bestimmt durch (7.21) im Gebiet

$$v^2 - u^2 < 1. \quad (7.23)$$



In dieser erweiterten  $(u, v)$ -Karte **definieren** wir die Metrik durch (7.22). Die Feldgleichungen (5.10) bleiben dabei erfüllt, da (7.22) für  $u, v$  in (7.23) reell-analytisch ist (s. aber auch unten). Die erweiterte Karte teilen wir in 4 Gebiete, I-IV:



I ist das Gebiet der Schwarzschild-Metrik. Die Gebiete III, IV gehen durch die Spiegelung  $(u, v) \mapsto (-u, -v)$  aus I, II hervor. Wir diskutieren also nur das Gebiet II. Auch dort können wir “Schwarzschild-Koordinaten”  $t$  und  $r < 2m$  einführen durch

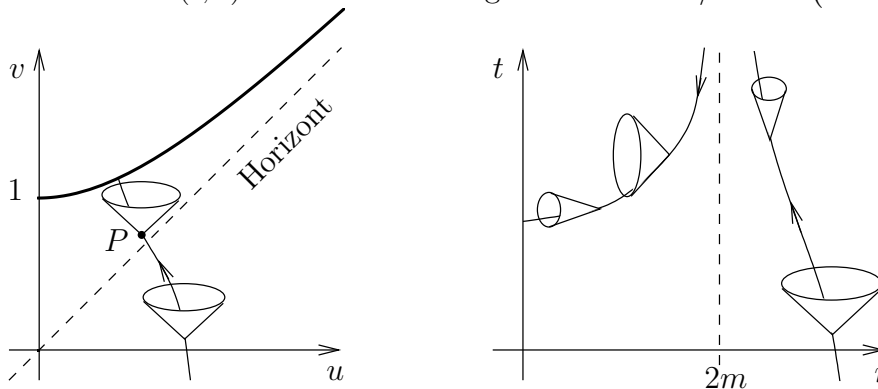
$$u = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} e^{r/4m} \operatorname{sh} \frac{t}{4m},$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} e^{r/4m} \operatorname{ch} \frac{t}{4m}.$$

Wegen

$$v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{2m}\right) e^{r/2m}, \quad u/v = \operatorname{th} \frac{t}{4m}$$

wird dann das Gebiet II ( $0 < v^2 - u^2 < 1, v > 0$ ) durch den Streifen  $0 < r < 2m, -\infty < t < +\infty$  dargestellt, und die Metrik hat dort genau die Form der Schwarzschild-Metrik (7.22). Aber: Wegen  $1 - (2m/r) < 0$  ist nun  $t$  eine Raum- und  $r$  eine Zeitkoordinate geworden! In der  $(u, v)$ -Karte sind die Lichtkegel wegen  $ds^2 \sim du^2 - dv^2$  stets durch 45°-Linien begrenzt. In der  $(t, r)$ -Karte sind sie begrenzt durch  $dr/dt = \pm(1 - (2m/r))$  und



stehen vertikal (horizontal) für  $r > 2m$  ( $r < 2m$ ) und entarten bei  $r = 2m$ . In der  $(u, v)$ -Karte ist die kausale Struktur dieser Raum-Zeit evident. Zukunftsgerichtete zeit- oder lichtartige Geodäten durch ein Ereignis  $P$  jenseits des Horizontes gelangen nie diesseits: Für einen “ausenstehenden” Beobachter ist die jenseitige Portion der Raum-Zeit verborgen (**schwarzes Loch**). Solche Bahnen enden vielmehr (nach endlicher Eigenzeit) in der

Singularität  $v^2 - u^2 = 1$ , d.h.  $r = 0$ . Diese Singularität ist im Unterschied zu  $r = 2m$  eine echte Singularität der Mannigfaltigkeit. So wird z.B. (7.20) singulär bei  $r = 0$ .

**Anwendung:** Sphärisch symmetrischer Kollaps eines Sterns.

**Satz** (Birkhoff). Jede sphärisch symmetrische Lösung  $g$  der Vakuum-Feldgleichungen ( $g$  braucht nicht statisch vorausgesetzt zu werden) ist lokal isometrisch zu einem Teil der Schwarzschild-Kruskal Raum-Zeit.

**Bemerkung.** Dies steht in Analogie zur Newtonschen Gravitation: Das Potential im Äusseren einer sphärisch symmetrischen, möglicherweise zeitabhängigen Massenverteilung ist durch  $\varphi = -G_0 M/r$  gegeben und ist damit statisch, denn die Gesamtmasse  $M$  ist erhalten.

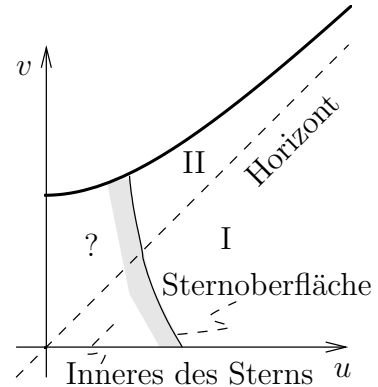
**Beweisskizze.** Die Metrik ist von der Form (7.8), jedoch mit  $a = a(t, r)$ ,  $b = b(t, r)$ . Die Transformationen, die den Ansatz bewahren (vgl. Bemerkung 2 auf S. 64), verallgemeinern zu  $t \mapsto \tilde{t} = \int^t e^{-c(s)} ds$ , was der Ersetzung (7.9) mit  $c = c(t)$  gleichkommt. Eine Rechnung, die dem statischen Fall analog ist, liefert die nicht verschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors

$$\begin{aligned} R_{tt} &= R_{tt}^{(0)} - f, & R_{rr} &= R_{rr}^{(0)} + e^{2(b-a)} f \\ R_{\theta\theta} &= R_{\theta\theta}^{(0)} + e^{2(b-a)} f, & R_{\varphi\varphi} &= (\sin^2 \theta) R_{\theta\theta} \\ R_{tr} &= R_{rt} = \frac{2\dot{b}}{r}, \end{aligned}$$

wobei (0) für die statisch berechneten Grössen (7.11) steht und  $f = \dot{b}^2 - \dot{a}\dot{b} + \ddot{b}$ . Die Feldgleichungen liefern neu  $b = b(r)$ , also  $f = 0$ , und weiterhin  $a' + b' = 0$ . Daraus folgt mit der erwähnten Ersetzung (7.9) wieder  $a + b = 0$ . Somit resultiert wieder die Schwarzschild-Metrik (7.13).  $\square$

**Beispiel:** Aussenraum eines Sterns.

Für sehr massive Sterne kann der Sternradius  $< 2m$  werden. Dann wird Teil II der Kruskal-Metrik relevant. Es entsteht ein "Horizont" im Äusseren bei  $r = 2m$ , und der Kollaps des Sterns in die Singularität ist unvermeidlich, da die Weltlinien der Punkte auf der Oberfläche zeitartig sind.



**Bemerkung.** Komplementär zu obigem gilt auch folgender **Satz** (Israel). Jedes statische schwarze Loch ( $g$  braucht nicht rotationssymmetrisch postuliert zu werden) ist durch die Schwarzschild-Metrik gegeben.

#### 4. The Kerr metric and rotating black holes

The exterior of a rotating black hole or (steady) star is described by a stationary metric, rather than by a static one.

**Coordinates** (Boyer-Lindquist):  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  spherical coordinates

**Parameters:**  $m$ ,  $a$

**Notations:**

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - 2mr + a^2 \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta\end{aligned}$$

**Identity:**

$$\rho^4 \Delta - 4mr^2 a^2 \sin^2 \theta = \Sigma^2 (\rho^2 - 2mr) \quad (7.24)$$

**Metric** (Kerr 1963)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 + 4 \frac{mar}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi dt - \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (7.25)$$

Alternate expression: completing the square in  $d\varphi$  gives

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\Sigma^2} \Delta dt^2 - \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta (d\varphi - \Omega dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (7.26)$$

with

$$\Omega = a \cdot \frac{2mr}{\Sigma^2}.$$

Indeed, that expression yields the same  $g_{\varphi t}$  as in (7.25) and, by (7.24),

$$g_{tt} = \frac{\rho^2}{\Sigma^2} \Delta - \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \cdot \Omega^2 = \frac{1}{\rho^2 \Sigma^2} (\rho^4 \Delta - 4mr^2 a^2 \sin^2 \theta) = 1 - \frac{2mr}{\rho^2}.$$

**Remarks.** 1) The special case  $a = 0$  is the Schwarzschild metric (7.13), because  $\rho^2 = r^2$ ,  $\Sigma^2 = r^4$ .

2) The Kerr metric solves the vacuum equation  $R_{\mu\nu} = 0$ . It is the most general stationary solution which is axisymmetric: A space-time on which  $SO(2)$  acts as isometries under which each orbit is a closed space-like curve.

3) Any just axisymmetric solution is given by Kerr or some extension thereof (cf. Birkhoff's thm.). Any stationary black hole is given by Kerr (cf. Israel's thm.). This is known as the **"no hair" theorem**: Black holes have no property other than  $m$ ,  $a$  (or charge, if an electromagnetic field, rather than vacuum, is allowed outside).

4) The metric (7.25) tends to Minkowski in polar coordinates at  $r \rightarrow \infty$ .

5) Meaning of parameters:  $m$  mass (from Newtonian limit  $r \rightarrow \infty$ );  $J = am$  angular momentum (without proof).

The metric has a singularity at  $\Delta = 0$ , i.e., at

$$r = r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}.$$

It exists (and with it the black hole) only for  $|a| \leq m$  (and hence  $|J| \leq m^2$ ). We restrict to  $r > r_+$ .

The metric has the Killing fields  $\Phi = \partial/\partial\varphi$ ,  $K = \partial/\partial t$ :

- $\Phi$  is space-like:

$$g(\Phi, \Phi) = g_{\varphi\varphi} < 0$$

- $K$  is time-like,

$$g(K, K) = g_{tt} = \frac{1}{\rho^2}(r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2mr) > 0,$$

for

$$r > r_0(\theta) = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (\geq r_+)$$

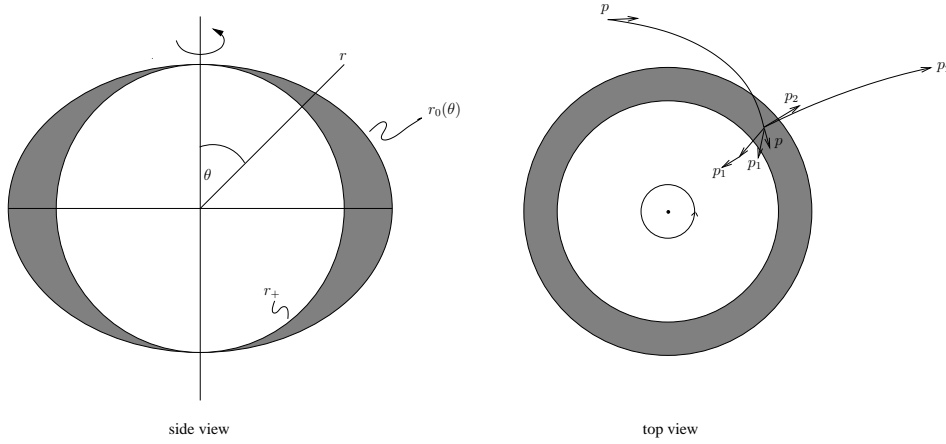


Abbildung 1: See page 76 for trajectories

The shaded region  $r_+ < r < r_0(\theta)$  is the **ergosphere**. Its physical meaning will emerge from considering various observers. As such, their 4-velocity  $u^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$  is time-like,  $(u, u) = +1$ .

i) A **static** observer has fixed coordinates  $r, \theta, \varphi$ :  $u^\mu = (\dot{t}, 0, 0, 0) \propto K$ . It can exist for  $r > r_0(\theta)$ . For  $r < r_0(\theta)$  any observer is dragged w.r.t. infinity.

ii) A **stationary** observer has fixed  $r, \theta$ , and  $\omega \equiv d\varphi/dt = \dot{\phi}/\dot{t}$ . It has  $u^\mu = (\dot{t}, 0, 0, \omega\dot{t}) \propto (1, 0, 0, \omega)$  and, see (7.26),

$$(u, u) \propto \frac{\rho^2}{\Sigma^2} \Delta - \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta (\omega - \Omega)^2;$$

$u^\mu$  is time-like if

$$|\omega - \Omega| < \frac{\rho^2}{\Sigma^2} \cdot \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\sin \theta}$$

The bound on the r.h.s. is  $< \Omega$  iff  $r < r_0(\theta)$ , since that is when  $\omega = 0$  is not contained in the interval, see (i).

iii) Observer **freely falling** from infinity. Note:  $V$  Killing field,  $x(\tau)$  geodesic. Then  $(V, \dot{x})$  is constant in  $\tau$  by Noether's theorem. Indeed,  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha$  has constant  $V_\alpha \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = V^\alpha \dot{x}_\alpha$ .

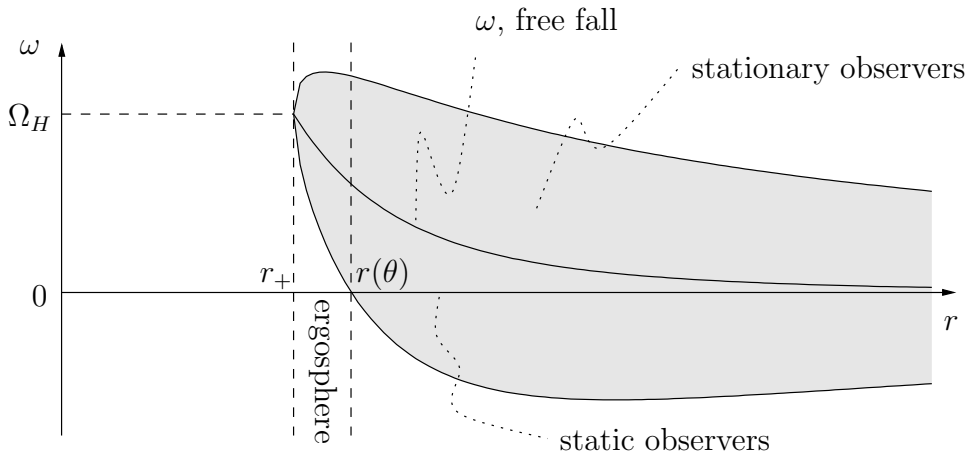
Take  $V = \Phi$  and  $u = \dot{x}$ . At infinity,  $(\Phi, u) = 0$ ; at a finite position along the geodesic

$$0 = (\Phi, u) = -\frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta (\dot{\varphi} - \Omega \dot{t}) \cdot (-\Omega) :$$

the freely falling observer rotates with angular velocity

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \Omega = a \cdot \frac{2mr}{\Sigma^2},$$

being dragged by the rotating mass inside.



The angular velocity at  $r = r_+$ ,

$$\Omega_H = \Omega|_{r_+} = a \cdot \frac{2mr}{\Sigma^2} \Big|_{r_+} = \frac{a}{2mr_+},$$

(use  $\Sigma|_{r_+} = r^2 + a^2 = 2mr_+$ ), is the **angular velocity of the black hole**.

**Energy extraction** (Penrose 1969). A freely falling particle of 4-momentum  $p = m\dot{x}$  has conserved “energy”  $E = (K, p)$  (take  $V = K$  above). Wherever  $K$  is time-like,  $E > 0$ . In particular, for an observer resting near infinity, where the metric is  $\sim \eta_{\mu\nu}$  and  $t$  is its time,  $E = p^t$  is indeed the energy. Let the particle decay,

$$p = p_1 + p_2,$$

inside the ergosphere (s. fig. on p. 75), after which free fall carries particle 1 across the horizon  $r = r_+$  inside the black hole and particle 2 back to infinity. While  $E_2 = (K, p_2) > 0$  as explained, one may have  $E_1 = (K, p_1) < 0$ , because  $K$  is space-like along the fall of 1. Hence

$$E = E_1 + E_2 < E_2 :$$

energy has been extracted from the black hole! However, particle 1 reduces the angular momentum of the black hole, whereby the ergosphere decreases and the process can not be repeated indefinitely.

## 5. Hawking radiation

Energy emission is possible even from a static black hole, provided quantum effects are taken into account. Suppose a pair of particles is created from nothing,

$$0 = p_1 + p_2.$$

Then

$$0 = \langle K, p_1 \rangle + \langle K, p_2 \rangle \equiv E_1 + E_2$$

with  $K = \partial/\partial t$  and  $E_1, E_2$  conserved from then on. They cannot be created outside of the horizon, since then  $E_1, E_2 > 0$  as explained at the end of the previous section. If they are created inside,  $E_1, E_2$  may have opposite signs, but the particles never get outside. A vacuum fluctuation, however, may create a pair with particle 1 inside and 2 outside of the horizon. As particle 2 reaches a distant observer with energy  $E_2 > 0$  it is part, with many others, of the **Hawking radiation**. A detailed discussion requires Quantum Field Theory on a curved spacetime.

**a) Classical Klein-Gordon field.** The action for a scalar field of mass  $\mu$  is

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \mu^2 \varphi^2)}_{\mathcal{L}},$$

where  $\partial^\mu \varphi = g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi$ . It is invariant under coordinate transformations  $x \mapsto \tilde{x}$ , with  $\varphi$  transforming as a scalar,  $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$ . The equation of motion,

$$\partial_\nu \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\nu \varphi)} - \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \varphi} = 0, \quad (7.27)$$

is

$$\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\mu \varphi) + \mu^2 \sqrt{|g|}\varphi = 0, \quad (7.28)$$

i.e.

$$(\square_g + \mu^2)\varphi = 0, \quad (7.29)$$

where  $\square_g = |g|^{-1/2}\partial_\nu(|g|^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\mu)$  is the Laplacian for the metric  $g$ . Canonical quantization rests on equal time commutators. This requires a foliation of spacetime in space-like 3-surfaces  $\Sigma$ , which without loss may be taken as surfaces of constant  $x^0$ . The conjugate momentum is

$$\pi(x) = \sqrt{|g|}g^{\mu 0}\partial_\mu \varphi(x)$$

and the Hamiltonian is

$$H = \int_{x^0=0} d^3x (\pi \partial_0 \varphi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}) = \int_{x^0=0} d^3x \sqrt{|g|} (g^{\mu 0} \partial_\mu \varphi \partial_0 \varphi - \mathcal{L}).$$

The initial data  $\varphi(\underline{x}) = \varphi(x)|_{x^0=0}$ ,  $\pi(\underline{x}) = \pi(x)|_{x^0=0}$  make up the phase space

$$\Gamma = \{(\varphi(\underline{x}), \pi(\underline{x}))_{\underline{x} \in \mathbb{R}^3}\}$$

with Poisson brackets

$$\{\pi(\underline{x}), \varphi(\underline{y})\} = \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}), \quad \{\varphi(\underline{x}), \varphi(\underline{y})\} = 0, \quad \{\pi(\underline{x}), \pi(\underline{y})\} = 0.$$

They determine the solution through the canonical equations of motion

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \underline{x}) = \{H, \varphi(t, \underline{x})\}, \quad \frac{\partial \pi}{\partial t}(t, \underline{x}) = \{H, \pi(t, \underline{x})\},$$

which, as usual, are equivalent to (7.27) or (7.29).

Let  $f, h$  be any complex solutions of (7.29) and let

$$j^\mu = \text{i}g^{\mu\nu}(\bar{f}\partial_\nu h - (\partial_\nu \bar{f})h).$$

Then, see (5.21),

$$j^\mu{}_{;\mu} \cdot \sqrt{|g|} = (\sqrt{|g|}j^\mu)_{;\mu} = 0$$

by the equation of motion (7.28). As a result,

$$\begin{aligned} \langle f, h \rangle &:= \int_\Sigma i_j \eta \\ &= \int_\Sigma \sqrt{|g|} j^\mu d\sigma_\mu = \int_{x^0=t} d^3x \sqrt{|g|} j^0, \end{aligned}$$

where  $i_j$  is the inner product (1.35) and  $d\sigma_\mu$  the coordinate normal to  $\Sigma$ , is **independent** of the slice  $\Sigma$ , resp. of  $t$ . This follows by Gauss' theorem if  $j^\mu$  decays fast enough in space-like directions. We denote the space of solutions equipped with the inner product  $\langle f, h \rangle$  by  $\mathcal{K}$ . It satisfies

$$\overline{\langle f, h \rangle} = -\langle \bar{f}, \bar{h} \rangle = \langle h, f \rangle;$$

in particular

$$\langle f, \bar{f} \rangle = 0$$

and  $\langle f, f \rangle$  is real. Note that it is not positive definite, since  $\langle f, f \rangle = -\langle \bar{f}, \bar{f} \rangle$ ; however it is nondegenerate ( $\langle f, h \rangle = 0, (h \in \mathcal{K}) \Rightarrow f = 0$ ), as seen from

$$\langle f, h \rangle = \text{i} \int_{x^0=0} d^3x (\bar{f}(\sqrt{|g|}g^{0\nu}\partial_\nu h) - (\sqrt{|g|}g^{0\nu}\partial_\nu \bar{f})h),$$

where  $h(\underline{x})$  and the corresponding momentum  $\sqrt{|g|}g^{0\nu}(\partial_\nu h)(\underline{x})$  may be chosen at will.

Taking for  $h$  the field itself, we define functions on  $\Gamma$  by

$$a(f) := \langle f, \varphi \rangle = \text{i} \int_{x^0=0} d^3x (\bar{f}(\underline{x})\pi(\underline{x}) - (\sqrt{|g|}g^{0\nu}\partial_\nu \bar{f})(\underline{x})\varphi(\underline{x})). \quad (7.30)$$

Since  $f(\underline{x})$  and the corresponding momentum may be chosen arbitrarily, the complex data  $a(f)$  determine the real data  $\varphi(\underline{x}), \pi(\underline{x})$ . However, they are not independent:

$$\overline{a(f)} = -a(\bar{f}). \quad (7.31)$$

Their Poisson bracket is

$$\{a(f), \overline{a(h)}\} = \text{i}\langle f, h \rangle, \quad (7.32)$$

which by (7.31) also implies

$$\{a(f), a(h)\} = -\text{i}\langle f, \bar{h} \rangle, \quad (7.33)$$

$$\{\overline{a(f)}, \overline{a(h)}\} = -\text{i}\langle \bar{f}, h \rangle. \quad (7.34)$$



**b) Quantization.** Canonical quantization of a Hamiltonian system is, at least in a first step, a map

$$\mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A} \quad (7.35)$$

from classical to quantum **observables**, i.e. from (complex) functions  $a = a(q, p)$  on  $\Gamma$  into an algebra with involution  $*$  (technically a  $C^*$ -algebra), such that

$$a \mapsto A \Rightarrow \bar{a} \mapsto A^*.$$

Moreover for a distinguished set of canonical coordinates  $a, b, \dots$  we have ( $\hbar = 1$ )

$$\{a, b\} \mapsto i[A, B].$$

**States**  $\omega$  are linear maps  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \mapsto \omega(A)$ , where  $\omega(A)$  has the meaning of the expectation value of the observable  $A$  in the state  $\omega$ . They should satisfy

$$\omega(1) = 1, \quad \omega(A^*A) \geq 0. \quad (7.36)$$

In particular, we have the Cauchy-Schwarz inequality

$$|\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B). \quad (7.37)$$

In a second step, a Hilbert space may be constructed and expectation values computed in the way known from bra-ket Quantum Mechanics. This is accomplished abstractly by the GNS construction:

**Theorem** (Gelfand, Naimark, Segal). Let  $\omega$  be a state on  $\mathcal{A}$ . Then there are

- a Hilbert space  $\mathcal{H}$ ,
- a vector  $\Omega \in \mathcal{H}$ ,
- a representation  $\pi$  of  $\mathcal{A}$  on  $\mathcal{H}$ ,

such that

$$\omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$$

and  $\{\pi(A)\Omega | A \in \mathcal{A}\}$  is dense in  $\mathcal{H}$ . For given  $\omega$ , these objects are unique up to isomorphisms.

Of course, any normalized vector  $\psi \in \mathcal{H}$  defines a state by  $\omega_\psi(A) = (\psi, \pi(A)\psi)$ , and so does any density matrix on  $\mathcal{H}$ . However the states so obtained from a given  $\omega$  do not exhaust all states on  $\mathcal{A}$ . In this sense the algebra  $\mathcal{A}$  is more fundamental than a Hilbert space  $\mathcal{H}$  on which it is represented.

In the context of the Klein-Gordon equation we denote the same way both kinds of observables in (7.35) ( $a(f) \mapsto a(f)$ ) and obtain from (7.31 - 7.34)

$$\begin{aligned} a^*(f) &= -a(\bar{f}), \\ [a(f), a^*(h)] &= \langle f, h \rangle, \\ [a(f), a(h)] &= -\langle f, \bar{h} \rangle, \\ [a^*(f), a^*(h)] &= -\langle \bar{f}, h \rangle, \end{aligned} \quad (7.38)$$

(one could have stated these equations in terms of  $\varphi(\underline{x})$ ,  $\pi(\underline{x})$  instead.) The algebra  $\mathcal{A}$  is generated by  $a(f)$ , ( $f \in \mathcal{K}$ ).

A particular class of states on  $\mathcal{A}$  (quasi-free states) is specified by (i)

$$\omega(a^*(f)a(h)) = \langle h, \rho f \rangle, \quad (7.39)$$

where  $\rho$  is a positive semidefinite operator on  $\mathcal{K}$ , cf. (7.36),

$$\langle f, \rho f \rangle \geq 0, \quad (f \in \mathcal{K}),$$

and (ii) the use of Wick's lemma (sum over contractions) to compute expectations of any products of  $a^*(f)$ 's and  $a(h)$ 's. Eq. (7.38) implies

$$\rho + \bar{\rho} = -1, \quad (7.40)$$

where  $\bar{\rho} = C\rho C$  and  $C : f \mapsto \bar{f}$  is the complex conjugation.

Examples of this kind may be constructed as follows. Let  $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$  be a subspace such that

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$$

with  $\bar{\mathcal{H}} = C\mathcal{H}$ , and

$$\langle f, f \rangle \geq 0, \quad (f \in \mathcal{H}), \quad (7.41)$$

$$\langle f, h \rangle = 0, \quad (f \in \mathcal{H}, h \in \bar{\mathcal{H}}). \quad (7.42)$$

Solutions  $f \in \mathcal{H}$  (resp.  $\bar{\mathcal{H}}$ ) may be seen abstractly as single **particle** (resp. **antiparticle**) states. Then

$$\rho = N \oplus (-1 - \bar{N}) \quad (7.43)$$

with  $\langle f, Nf \rangle \geq 0$ , ( $f \in \mathcal{H}$ ) defines an operator with (7.36). Indeed, by the block form of (7.43) it suffices to verify that property for  $f \in \mathcal{H}$  (which is the hypothesis) and for  $f \in \bar{\mathcal{H}}$ : Since (7.40) holds by construction,

$$\begin{aligned} \langle f, \rho f \rangle &= \overline{\langle f, \rho f \rangle} = -\langle \bar{f}, \bar{\rho} \bar{f} \rangle \\ &= \langle \bar{f}, (1 + \rho) \bar{f} \rangle = \langle \bar{f}, (1 + N) \bar{f} \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

because  $\bar{f} \in \mathcal{H}$ .

In the case  $N = 0$  the GNS Hilbert space can be realized as the bosonic Fock space over  $\mathcal{H}$ :  $\mathcal{F}$  is the span of

$$a^*(f_1) \cdots a^*(f_n) \Omega, \quad (f_i \in \mathcal{H}) \quad (7.44)$$

with

$$a(f) \Omega = 0, \quad (f \in \mathcal{H}). \quad (7.45)$$

**c) Quantization of the Klein-Gordon field in Minkowski space.** Solutions  $f \in \mathcal{K}$  of  $(\square + \mu^2)f = 0$  are superpositions of positive and negative frequency states

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t)}$$

with  $\omega = \omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}$ . Let  $\mathcal{H}$  be the subspace of **positive** frequency solutions. Writing  $f = f_+ \oplus f_-$  with  $f_+ \in \mathcal{H}$ ,  $f_- \in \overline{\mathcal{H}}$  one finds by the Parseval identity

$$\langle f, h \rangle = \int \frac{d^3k}{2\omega} (\overline{f_+(\vec{k})} h_+(\vec{k}) - \overline{f_-(\vec{k})} h_-(\vec{k})),$$

where  $f_{\pm}(\vec{k})$  define the wave packets:

$$f_{\pm}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} f_{\pm}(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t)}.$$

In particular, (7.41, 7.42) hold true.

This choice of  $\mathcal{H}$  is Lorentz invariant. Indeed  $\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t = -k_{\mu} x^{\mu}$  with  $k^{\mu} = (\pm\omega(\vec{k}), \vec{k})$  on the upper, resp. lower mass shell: those are invariant under orthochronous Lorentz transformations (time reversal flips  $\mathcal{H}$  and  $\overline{\mathcal{H}}$ ). Equivalently, along the worldline  $x^{\mu}(\tau) = u^{\mu}\tau + b^{\mu}$ ,  $((u, u) = 1)$  of an inertial observer the phase

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = e^{-i(k_{\mu} b^{\mu})} e^{-i(k_{\mu} u^{\mu})\tau}$$

remains of positive frequency because  $k_{\mu} u^{\mu} = \omega u^0 - \vec{k} \cdot \vec{u} \geq \omega u^0 - |\vec{k}| |\vec{u}| > 0$ . Quantization in QFT usually proceeds by defining the vacuum state through (7.43) with  $N = 0$  on  $\mathcal{H}$  (Minkowski vacuum, again a manifestly Lorentz invariant choice); this produces the Fock space (7.44, 7.45). However one may also consider positive temperature states, specified in momentum space by  $N = (e^{\beta\omega(\vec{k})} - 1)^{-1}$ , i.e.,

$$\omega(a^*(f)a(h)) = \int \frac{d^3k}{2\omega(\vec{k})} \frac{1}{e^{\beta\omega(\vec{k})} - 1} \overline{f(\vec{k})} h(\vec{k}), \quad (f, h \in \mathcal{H}). \quad (7.46)$$

In particular, the expected number of particles in a single particle state  $f$  (occupation number) is obtained by setting  $h = f$ . In the limit where the normalized wave packet  $f$  concentrates around a wave vector  $\vec{k}_0$  we obtain the thermal spectrum

$$\omega(a^*(f)a(f)) \rightarrow \frac{1}{e^{\beta\omega(\vec{k}_0)} - 1}. \quad (7.47)$$

Note that (7.46) is not Lorentz invariant, since  $\omega(\vec{k})$  is not.

**Remark.** In a curved spacetime with a time-like Killing field the solutions of (7.29) have a definite frequency or are superpositions of such. Thus one might pick  $\mathcal{H}$  as the positive frequency subspace and define the vacuum by  $N = 0$  on  $\mathcal{H}$  (Boulware vacuum). It may though not be the physically correct choice, see (e) below.

**d) Regge-Wheeler coordinates.** New coordinates  $(t, r_*, \theta, \varphi)$  are introduced on the Schwarzschild spacetime (7.13) with  $r > 2m$  by the transition function

$$r_* = r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right)$$

with  $t, \theta, \varphi$  fixed. It maps  $r \in (2m, \infty) \mapsto r_* \in (-\infty, \infty)$  (tortoise coordinate). Since

$$\frac{dr_*}{dr} = 1 + \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{-1} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1},$$

the metric reads

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dt^2 - dr_*^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (7.48)$$

with  $r = r(r_*)$ .

Consider a radially infalling particle crossing the horizon  $r_* \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty$  at proper time  $\tau = 0$ . There  $r = 2m$ , whence, see (7.14, 7.15),

$$\dot{r}^2 = \mathcal{E}^2, \quad \frac{r - 2m}{2m} \dot{t} = \mathcal{E}.$$

Thus  $r - 2m = -\mathcal{E}\tau$  and  $\dot{t} = -\frac{2m}{\tau}$ , i.e.,

$$t = -2m \log(-\tau) + \text{const} . \quad (7.49)$$

In particular,

$$r_* = 2m \log\left(-\frac{\mathcal{E}\tau}{2m}\right) + 2m . \quad (7.50)$$

Finally, we write the Klein-Gordon equation in Regge-Wheeler coordinates. After separating the angular part,

$$f(t, r_*, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{f_{lm}(t, r_*)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

it reads (without proof)

$$(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V_{lm})f_{lm} = 0,$$

where the effective potential

$$V_{lm}(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{2m}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2\right)$$

has limits

$$V_{lm}(r) \rightarrow \begin{cases} 0, & (r_* \rightarrow -\infty, \text{ i.e. } r \rightarrow 2m), \\ \mu^2, & (r_* \rightarrow +\infty, \text{ i.e. } r \rightarrow +\infty). \end{cases}$$

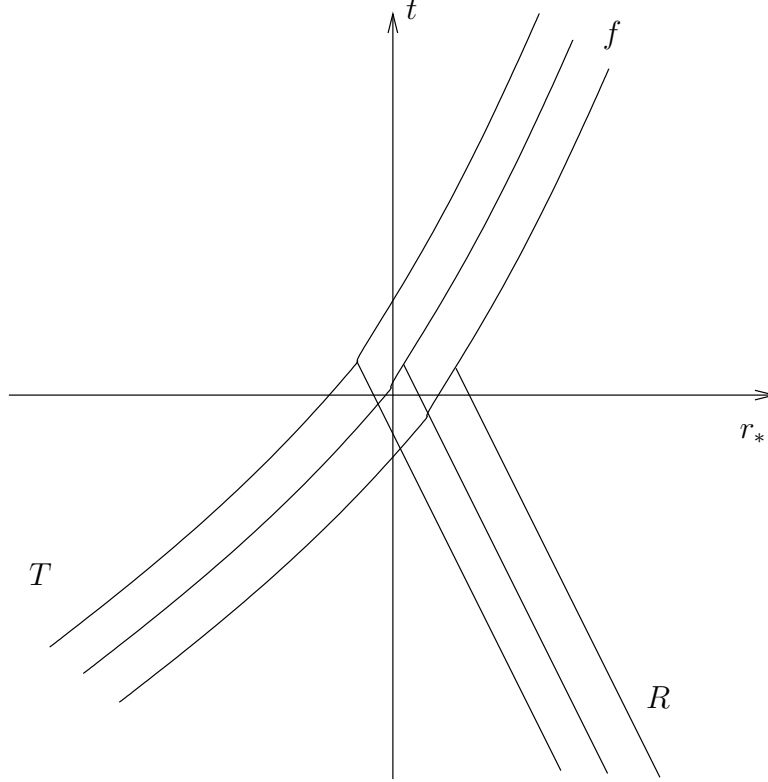
Thus, as  $r_* \rightarrow -\infty$ , solutions are of the form

$$f_{lm}(t, r_*) = f_{\text{in}}(t - r_*) + f_{\text{out}}(t + r_*) \quad (7.51)$$

with  $f_{\text{in}}, f_{\text{out}}$  describing the part of the wave incoming from the white hole, resp. outgoing to the black hole.

**e) The expected number of outgoing particles.** Consider a wave packet  $f$  solving the Klein-Gordon equation in the Schwarzschild metric (7.48), which

- consists of positive frequencies  $\approx \omega$  and
- is outgoing at  $r_* \rightarrow \infty$  at late times.



Since for  $r_* \rightarrow +\infty$  the metric is Minkowski,  $f$  represents a **particle** state at late times. The goal is to compute its occupation number

$$n = \omega(a^*(f)a(f)).$$

What is  $\omega$ ? The equivalence principle (see postulate 4 on p. 31) suggests: On states incoming from either  $r_* = -\infty$ , ( $r = 2m$ ) or  $r_* = +\infty$ , ( $r = +\infty$ ) and to an observer in free fall there,  $\omega$  is the Minkowski vacuum (**Unruh vacuum**).

The wave  $f$  is not of this form (it is outgoing) but can it be split into such,

$$f = T + R,$$

where  $T$ ,  $R$  are the parts incoming at  $r_* = \mp\infty$ . They are determined "by scattering  $f$  backwards in time", see figure.

An observer with  $r_* = r_0$ , ( $r_0 \rightarrow \infty$ ) is in free fall; and  $R$ , being of positive frequency, is a particle state. Thus

$$\omega(a^*(R)a(R)) = 0$$

and, by (7.37),

$$\omega(a^*(T)a(R)) = 0, \quad \omega(a^*(R)a(T)) = 0.$$

Hence

$$n = \omega(a^*(T)a(T)).$$

By (7.51),

$$T \propto e^{-i\omega(t-r_*)}, \quad (\omega \geq \mu)$$

(or narrow superpositions thereof). For a freely falling observer approaching the horizon  $r_* = -\infty$

$$t - r_* \approx -4m \log(-\tau) + \text{const} .$$

by (7.49, 7.50); hence

$$T(\tau) \propto \begin{cases} e^{4im\omega \log(-\tau)}, & (\tau < 0), \\ 0, & (\tau > 0), \end{cases} \quad (7.52)$$

which is not of positive frequency. Let

$$T = T_+ + T_- \quad (7.53)$$

be its decomposition into positive/negative frequencies w.r.t.  $\tau$ . Then, based on the Unruh vacuum,

$$\omega(a^*(T_+)a(T_+)) = 0,$$

we obtain

$$n = \omega(a^*(T_-)a(T_-)) = \langle T_-, \rho T_- \rangle = -\langle T_-, T_- \rangle,$$

see (7.39, 7.43) with  $N = 0$ . It remains to compute the decomposition (7.53) and to this end we may temporarily replace proportionality in (7.52) by equality. The positive frequency part

$$T_+(\tau) = \int_0^\infty \hat{T}_+(w) e^{-iw\tau} dw$$

is analytic in the lower complex half-plane, and  $T_-(\tau)$  in the upper one. By analytically continuing

$$T_0(\tau) := e^{4im\omega \log(-\tau)} = e^{4im\omega \log|\tau|} e^{-4m\omega \arg(-\tau)}$$

from  $\tau < 0$  to  $\tau > 0$  through the lower half-plane we get  $T_0(-\tau)e^{-4m\omega\pi}$ , whence we tentatively set

$$T_+(\tau) = c_+ \begin{cases} T_0(\tau), & (\tau < 0), \\ T_0(-\tau)e^{-4m\omega\pi}, & (\tau > 0). \end{cases}$$

Similarly, continuing through the upper half-plane,

$$T_-(\tau) = c_- \begin{cases} T_0(\tau), & (\tau < 0), \\ T_0(-\tau)e^{4m\omega\pi}, & (\tau > 0). \end{cases}$$

Comparison with (7.52) yields

$$c_+ + c_- = 1, \quad c_+ e^{-4m\omega\pi} + c_- e^{4m\omega\pi} = 0,$$

i.e.

$$c_\pm = \frac{1}{1 - e^{\mp 8\pi m\omega}} .$$

Finally,

$$T_-(\tau) = c_-(T(\tau) + e^{4\pi m\omega} \tilde{T}(\tau)) \quad (7.54)$$

with  $\tilde{T}(\tau) = T(-\tau)$ . Since

$$\langle T, \tilde{T} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle = -\langle T, T \rangle$$

( $T, \tilde{T}$  are non-overlapping, time flip changes sign of  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ), we obtain

$$\langle T_-, T_- \rangle = |c_-|^2 (1 - e^{8\pi m \omega}) \langle T, T \rangle = \frac{\langle T, T \rangle}{1 - e^{8\pi m \omega}},$$

and hence

$$n = \frac{\langle T, T \rangle}{e^{8\pi m \omega} - 1}.$$

Apart from the "grey-body" factor  $\langle T, T \rangle$ , which depends on  $f$  and hence on  $\omega$ , this is, cf. (7.47), **black-body radiation** of temperature

$$\beta^{-1} = \frac{1}{8\pi m} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G_0 M}$$

(Hawking temperature). Note that (7.54) indicates that  $T_-$ , which determines the particle content of  $T$ , so does with  $\tilde{T}$ , which is supported beyond the horizon. This is in agreement with the informal interpretation given at the beginning.

## 8. Die linearisierte Gravitationstheorie

---

### 1. Die linearisierten Feldgleichungen

Wir untersuchen Raumzeiten, die nur schwach gekrümmt sind, d.h. solche, deren Metrik in passenden Koordinaten lautet

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (8.1)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}, \quad h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

In linearer Näherung in  $h$  ist dann

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\mu\beta,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) = \frac{1}{2}(h^\alpha{}_{\mu,\nu} + h^\alpha{}_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}), \quad (8.2)$$

wobei das Rauf- und Runterziehen der Indizes mit Hilfe von  $\eta_{\mu\nu}$  geschieht. Ferner,

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu,\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu},$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h^\alpha{}_{\mu,\alpha\nu} + h^\alpha{}_{\nu,\alpha\mu}),$$

wobei  $h = h^\alpha{}_\alpha$ . Es ist zweckmässig, die Störung mit umgekehrter Spur

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad \gamma = \gamma^\alpha{}_\alpha = -h$$

einzuführen (verwende  $\eta^\mu{}_\mu = 4$ ). Mit

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma$$

ist dann

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\square\gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square\gamma + \gamma^\alpha{}_{\mu,\alpha\nu} + \gamma^\alpha{}_{\nu,\alpha\mu}),$$

$$R = \frac{1}{2}(\square\gamma + 2\gamma^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}),$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}(-\square\gamma_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \gamma^\alpha{}_{\mu,\alpha\nu} + \gamma^\alpha{}_{\nu,\alpha\mu}). \quad (8.3)$$

Die **Feldgleichungen** (5.9) sind in dieser Näherung

$$-\square\gamma_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \gamma^\alpha{}_{\mu,\alpha\nu} + \gamma^\alpha{}_{\nu,\alpha\mu} = 2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (8.4)$$

**Bemerkungen.** 1) Aus (8.3) folgt die linearisierte, verkürzte 2. Bianchi Identität (3.13)

$$G^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (8.5)$$

und somit

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (8.6)$$



2) Die Feldgleichungen (8.4) sind **Lorentz-kovariant**, falls  $\gamma_{\mu\nu}$  (bzw.  $h_{\mu\nu}$ ) als Tensorfelder transformieren. (Dabei behält  $\eta_{\mu\nu}$  die Form  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ). Dieses Transformationsverhalten aus jedem der  $g_{\mu\nu}$  nach Linearisierung.

3) Gl. (8.4) stellt keine Gravitationstheorie dar, die sowohl mit der SRT wie auch mit dem EA verträglich ist. Begründung: Die metrischen Verhältnisse seien entweder durch (a)  $\eta_{\mu\nu}$  oder (b)  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  beschrieben. (a) Für frei fallenden Staub  $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$  folgt aus (8.6) und der Kontinuitätsgleichung  $(\rho u^\nu)_{;\nu} = 0$ , vgl. (5.2),

$$u^\mu u^\nu{}_{;\mu} = 0, \quad (8.7)$$

d.h. die Bahnen der Staubeilchen Geodäten der flachen Metrik  $\eta_{\mu\nu}$ : Die Materie erfährt keine Gravitation. Im Fall (b) verlangt das EA

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

(kovariante Ableitung bezüglich  $g_{\mu\nu}$ ), was aber mit (8.6) unverträglich ist; denn beides zusammen verlangt, dass die Christoffel-Symbole verschwinden, im Widerspruch zu (8.2). Ausführlich: Aus  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} - T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  folgt für Staub  $0 = u^\mu u^\alpha \Gamma^\nu{}_{\nu\alpha} + u^\alpha u^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} = u^\alpha u^\beta (\Gamma^\nu{}_{\nu\alpha} \delta^\beta{}^\mu + \Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} \delta_\nu{}^\mu)$ . Da für  $u$ , obschon zeitartig, vier linear unabhängige Vektoren eingesetzt werden können, verschwindet die in  $\alpha, \beta$  symmetrisierte Klammer:

$$\Gamma^\nu{}_{\nu\alpha} \delta_\beta{}^\mu + \Gamma^\nu{}_{\nu\beta} \delta_\alpha{}^\mu + 2\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} \delta_\nu{}^\mu = 0.$$

Die  $\beta\mu$ -Spur liefert  $(4 + 1 + 2)\Gamma^\nu{}_{\nu\alpha} = 0$  und somit  $\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} = 0$ .

## 2. Eichtransformationen und Eichungen

Die linearisierten Feldgleichungen (8.4) sind **eichinvariant** als Ausdruck der allgemeinen Kovarianz der Feldgleichungen. Infinitesimale Koordinatentransformationen sind  $g \rightarrow g + L_\xi g$ , wobei  $\xi^\mu$  ein beliebiges Vektorfeld ist. Auf (8.1) bezogen lauten sie  $h \rightarrow h + L_\xi h$  (**Eichtransformationen**), wobei  $L_\xi h$  als Term 2. Ordnung weggelassen wird:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &\rightarrow h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}, \\ \gamma_{\mu\nu} &\rightarrow \gamma_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu} \xi^\alpha{}_{,\alpha} \end{aligned} \quad (8.8)$$

und insbesondere

$$\gamma \rightarrow \gamma - 2\xi^\alpha{}_{,\alpha} \quad (8.9)$$

Ferner ist  $T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu}$ , da die Änderung von höherer Ordnung ist. Die besagte Invarianz von (8.4) folgt aus

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \xi^\alpha{}_{,\mu\nu}, \quad R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} \rightarrow R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} + \underbrace{\xi^\alpha{}_{,\nu\mu\beta} - \xi^\alpha{}_{,\beta\mu\nu}}_{=0}. \quad (8.10)$$

Letzteres koordinatenfrei: Sei  $R[g]$  der Riemann-Tensor von  $g$ . Der linearisierte Riemann-Tensor  $R^{(1)}[g]$  ist eine Abbildung, charakterisiert durch

$$R[g + f] = R[g] + R^{(1)}[g](f) + O(f^2) \quad (f \rightarrow 0),$$

wobei  $R^{(1)}[g](f)$  linear in  $f$  ist. Sei  $\varphi_s$  der Fluss mit Erzeugenden,  $\xi$ . Aus  $\varphi_s^* R[g] = R[\varphi_s^* g]$  folgt

$$\begin{aligned} L_X R[g] &= R^{(1)}[g](L_X g) \\ &= R^{(1)}[g](h + L_X g) - R^{(1)}[g](h) . \end{aligned}$$

Für  $g = \eta$  ist  $R[\eta] = 0$  und es folgt die Eichinvariante (8.10)

$$R^{(1)}[\eta](h + L_X \eta) = R^{(1)}[\eta](h) .$$

Durch spezielle **Eichungen** schränken wir die Eichfreiheit (8.8) **sukzessive** ein.

i) **Hilbert-Eichung** (vgl. Lorenz-Eichung in der ED)

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 . \quad (8.11)$$

Ausgehend von  $\bar{\gamma}^{\mu\nu}$  lässt sie sich erreichen durch Lösen von

$$\bar{\gamma}^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} + \underbrace{\xi^{\nu,\mu}{}_{,\nu} - \eta^{\mu\nu} \xi^{\alpha}{}_{,\alpha\nu}}_{=0} = 0$$

d.h. von

$$\square \xi^\mu = -\bar{\gamma}^{\mu\nu}{}_{,\nu} .$$

Die inhomogene Wellengleichung kann gelöst werden, vgl. Elektrodynamik. Es verbleiben dann noch residuelle Eichtransformationen mit

$$\square \xi^\mu = 0 . \quad (8.12)$$

Frei wählbar ist nicht mehr das gesamte Feld  $\xi^\mu(x)$ , sondern nur noch die Anfangsbedingungen  $\xi^\mu$ ,  $\xi^\mu{}_{,0}$  zur Zeit  $x^0 = 0$ , die die Lösung von (8.12) eindeutig bestimmen.

Die Feldgleichungen (8.4) besitzen in dieser Eichung (8.11) die einfachere Gestalt

$$-\square \gamma_{\mu\nu} = 2\kappa T_{\mu\nu} . \quad (8.13)$$

**Bemerkungen:** 1) Die Integrabilitätsbedingung  $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$  folgt nun aus (8.11).

2) Aus (8.13) ist ersichtlich, dass sich Gravitationswellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

ii) Im **Vakuum** ( $T^{\mu\nu} = 0$ ) oder allgemeiner falls  $T^\mu{}_\mu = 0$  gilt  $\square \gamma = 0$ . Man kann zusätzlich zu (8.11) die spurlose Eichung

$$\gamma = 0 \quad (8.14)$$

fordern. Ausgehend von  $\bar{\gamma}^{\mu\nu}$  in der Eichung (8.11) kann man sie erzielen durch Lösen von (vgl. (8.9))

$$\xi^\alpha{}_{,\alpha} = \frac{1}{2} \bar{\gamma} \quad (8.15)$$

zusammen mit (8.12). Dies ist möglich: Für eine Lösung der letzteren Gleichung ist auch  $\square \xi^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ , und  $\square \bar{\gamma} = 0$  gilt ohnehin. Also gilt (8.15), sobald die Anfangsbedingungen für  $x^0 = 0$  beider Gleichungen übereinstimmen:

$$\xi^\alpha{}_{,\alpha} \equiv \xi^0{}_{,0} + \xi^i{}_{,i} = \frac{1}{2} \bar{\gamma} , \quad (8.16)$$

$$\partial^0 \xi^\alpha{}_{,\alpha} \equiv \Delta \xi^0 + \xi^{i,0}{}_{,i} = \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{,0} . \quad (8.17)$$

Diese Gleichungen lassen sich nach  $\xi^\mu$  und  $\xi^\mu_{,0}$  lösen, wenn auch nicht auf eindeutige Art und Weise. Es verbleiben also immer noch Eichtransformationen mit (8.12) und

$$\xi^\alpha_{,\alpha} = 0 \quad (8.18)$$

(volumenerhaltende Koordinatentransformationen). In der Eichung (8.14) ist auch

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} .$$

iii) **Strahlungseichung** oder TT (Transverse Traceless) Eichung (vgl. Coulomb-Eichung für  $j^\mu = 0$  in der ED). Man fordert zusätzlich

$$h^{0\mu} = 0 . \quad (8.19)$$

In dieser Eichung (bzw. Koordinaten) erfolgt die metrische Verzerrung (8.1) bloss in räumlichen Richtungen, nicht aber in der zeitlichen. Ferner ist

$$R^i{}_{00j} = \Gamma^i{}_{j0,0} - \underbrace{\Gamma^i{}_{00,j}}_{=0} = \frac{1}{2} h^i{}_{j,00} = -\frac{1}{2} h_{ij,00} . \quad (8.20)$$

Ausgehend von  $\bar{h}^{\mu\nu}$  mit (8.11, 8.14) kann (8.19) erzielt werden durch Lösen von (8.12, 8.18) und von

$$h^{00} \equiv \bar{h}^{00} + 2\xi^{0,0} = 0 , \quad (8.21)$$

$$h^{0i} \equiv \bar{h}^{0i} + \xi^{0,i} + \xi^{i,0} = 0 . \quad (8.22)$$

Auch dies ist möglich: Für Lösungen von (8.12) gelten die restlichen Gleichungen, falls zur Zeit  $x^0 = 0$  nebst (8.21, 8.22) auch

$$\bar{h}^{00}{}_{,0} + 2\Delta\xi^0 = 0 , \quad (8.23)$$

$$\bar{h}^{0i}{}_{,0} + \xi^{0,i}{}_{,0} + \Delta\xi^i = 0 , \quad (8.24)$$

sowie (8.16, 8.17) mit  $\bar{\gamma} = 0$  gelten. Gl. (8.21, 8.23) bestimmen die Anfangsbedingungen  $\xi^{0,0}$  und  $\xi^0$ ; danach folgt  $\xi^{i,0}$  aus (8.22), was in die linke Seite von (8.17) eingesetzt auch jene Gleichung erfüllt:

$$\Delta\xi^0 - \bar{h}^{0i}{}_{,i} - \xi^{i,0}{}_{,i} = \Delta\xi^0 + \bar{h}^{00}{}_{,0} + \Delta\xi^0 = 0 .$$

Es verbleiben die Gl. (8.24, 8.16) für  $\xi^i$ . Sie sind von der Form  $\Delta\xi^i = a^i$ ,  $\text{div } \vec{\xi} = b$ , was lösbar ist, sofern die Konsistenzbedingung  $\text{div } \vec{a} = \Delta b$  gilt. Im vorliegenden Fall,

$$\begin{aligned} a^i &= -\bar{h}^{0i}{}_{,0} - \frac{1}{2}\bar{h}^{00}{}_{,i} , & b &= -\frac{1}{2}\bar{h}^{00} , \\ \text{div } \vec{a} &= -\bar{h}^{0i}{}_{,0i} - \frac{1}{2}\bar{h}^{00}{}_{,ii} , & \Delta b &= \frac{1}{2}\bar{h}^{00}{}_{,ii} , \end{aligned}$$

ist diese Bedingung wegen (8.11) erfüllt.

### 3. Gravitationswellen

In der Strahlungseichung ist

$$\begin{aligned} h^{\mu 0} &= 0, & h^i{}_i &= 0, \\ h^{ij}{}_{,j} &= 0 \end{aligned} \tag{8.25}$$

und die Vakuum-Feldgleichungen lauten

$$\square h_{ij} = 0.$$

**Ebene Wellen** sind Lösungen der Form

$$h_{ij} = h_{ij}(s) \quad |\vec{e}| = 1$$

mit Funktionen  $h_{ij}(s)$  der Variablen  $s = \vec{e} \cdot \vec{x} - t$ . Die Eichbedingung (8.25) besagt

$$\frac{dh_{ij}}{ds} e^j = 0, \tag{8.26}$$

oder sogar  $h_{ij}(s)e^j = 0$ , falls die Welle nur endlich lange andauert.

**Bewegung von Testteilchen:** Sei  $u^\mu = (1, \vec{0})$  die 4-er Geschwindigkeit eines zur Eigenzeit  $\tau = 0$  im TT Koordinatensystem ruhenden Teilchens. Im freien Fall gilt dauernd  $u^\mu(\tau) = (1, \vec{0})$ , denn dies löst die Geodätengleichung  $du^\mu/d\tau + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} u^\nu u^\sigma = 0$ , wegen  $\Gamma^\mu{}_{00} = 0$ , s. (8.2, 8.19). Die Weltlinie ist  $x^\mu(\tau) = (\tau, \vec{x}_0)$ ; benachbarte Teilchen haben feste Koordinatendifferenz  $n^\mu = (0, \vec{n})$  aber veränderlichen Abstand, denn nach (8.1) ist

$$(n, n) = -\vec{n}^2 + h_{ij}(s)n^i n^j$$

Alternativ folgt dies aus der Gl. (4.18) der geodätischen Abweichung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(n, n) &= \nabla_u^2(n, n) = 2(\nabla_u^2 n, n) + 2 \underbrace{(\nabla_u n, \nabla_u n)}_{O(h^2)} \\ &= 2(R(u, n)u, n) = -2R^i{}_{00j} n^j n^i = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{ij}}{ds^2} n^i n^j, \end{aligned}$$

wegen (8.20). Oder nochmals anders gesagt: In den Koordinaten

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2} h^\mu{}_\nu x^\nu$$

(insb.  $\tilde{x}^0 = x^0$ ) lautet die Metrik  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(h^2) + O(\vec{x}/\lambda)$ , wobei  $\lambda$  eine charakteristische Länge der Welle ist. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma} &= \delta^\mu{}_\sigma + \frac{1}{2} h^\mu{}_\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial h^\mu{}_\sigma}{\partial x^\rho} x^\rho = \delta^\mu{}_\sigma + \frac{1}{2} h^\mu{}_\sigma + O(\vec{x}/\lambda), \\ \eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu &= \eta_{\mu\nu} \left( \delta^\mu{}_\sigma + \frac{1}{2} h^\mu{}_\sigma \right) \left( \delta^\nu{}_\rho + \frac{1}{2} h^\nu{}_\rho \right) dx^\sigma dx^\rho = (\eta_{\sigma\rho} + h_{\sigma\rho}) dx^\sigma dx^\rho + O(h^2). \end{aligned}$$

In einer kleinen Umgebung der Geodäten  $\tilde{x}^\mu(\tau) = (\tau, 0)$  haben somit die Koordinaten  $\tilde{x}^\mu$  die Bedeutung von Abständen und Zeiten, vgl. S. 32. Die Abweichung benachbarter Teilchen ist nun zeitabhängig:

$$\Delta\tilde{n}^i(t) = -\frac{1}{2}h_{ij}(s)\tilde{n}^j .$$

Dies verschwindet wegen (8.26) für  $\tilde{n}^j = e^j$ : Es gibt keine Oszillationen in Fortpflanzungsrichtung und die Gravitationswellen sind **transversal**. Für **monochromatische** Wellen ist speziell

$$h_{ij}(s) = \varepsilon_{ij}e^{i\omega s} ,$$

wobei das physikalische Feld der Realteil davon ist. Die komplexe Amplitude  $\varepsilon_{ij}$  ist beliebig im 2-dimensionalen komplexen Vektorraum

$$\{\varepsilon_{ij} \in \mathbb{C}^2 \mid \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \varepsilon^i_i = 0, \varepsilon_{ij}e^j = 0\} .$$

Wählt man  $e = e_3$  in 3-er Richtung, so sind nur

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{-11} \end{pmatrix} = \text{Re } \varepsilon + i \text{Im } \varepsilon$$

von Null verschieden.  $\text{Re } \varepsilon$  und  $\text{Im } \varepsilon$  sind symmetrisch. Die **Polarisation** der Welle wird dargestellt durch die Verschiebung  $\vec{n} + \Delta\vec{n}(t)$ , ( $\sim$  weggelassen) von Testteilchen mit  $\vec{n}$  auf dem Einheitskreis in der Ebene  $\perp \vec{e}$  (s. Figur):

$$\Delta\vec{n}(t) = -\frac{1}{2} [(\text{Re } \varepsilon)\vec{n} \cos \omega t + (\text{Im } \varepsilon)\vec{n} \sin \omega t] .$$

### Spezialfälle:

#### 1) lineare Polarisation:

$$\text{Re } \varepsilon \parallel \text{Im } \varepsilon$$

(d.h.  $\text{Re } \varepsilon, \text{Im } \varepsilon$  gleich bis auf einen Faktor). Bezüglich der Eigenbasis  $e_1 \perp e_2$  von  $\varepsilon$  ist

$$\varepsilon = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (A \in \mathbb{C}) ,$$

$$\Delta\vec{n}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} ((\text{Re } A) \cos \omega t + (\text{Im } A) \sin \omega t) .$$

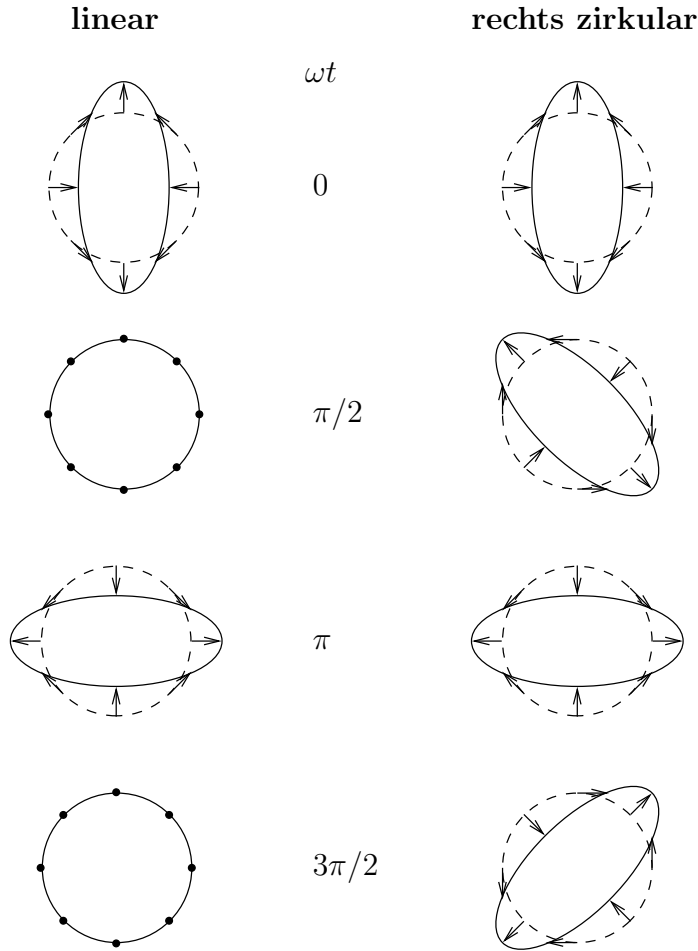
#### 2) rechts/links-zirkulare Polarisation:

$$\text{Im } \varepsilon = \pm R(\text{Re } \varepsilon)R^T = \pm \text{Re} \begin{pmatrix} -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

wobei  $R$  eine Rotation um  $\pi/4$  darstellt. In der Eigenbasis  $e_1 \perp e_2$  von  $\text{Re } \varepsilon$  ist

$$\varepsilon = A \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{pmatrix} , \quad (A \in \mathbb{R}) ,$$

$$\Delta\vec{n}(t) = \frac{1}{2} A \left[ \begin{pmatrix} -n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cos \omega t \mp \begin{pmatrix} n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} \sin \omega t \right] .$$



Unter der Drehung  $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  geht  $\varepsilon$  über in

$$R_\varphi \varepsilon R_\varphi^T = e^{\mp 2i\varphi} \varepsilon .$$

Man sagt, die Welle habe **Helizität**  $\pm 2$  (vgl. elektromagnetische Wellen:  $\pm 1$ ).

**Bemerkung.** Für Teilchen, die sich nicht im freien Fall befinden, sind die Gezeitenkräfte zu anderen hinzuzuaddieren. Anwendung: Gravitationswellendetektoren (LIGO, VIRGO, GEO).

#### 4. Ausstrahlung

**Der Energie-Impulstensor der Gravitation.** Der linearisierte Einstein-Tensor  $G^{(1)}[\eta](h)$ , vgl. (8.3), ist der in  $h$  lineare Term in der Entwicklung

$$G[\eta + h] = G^{(1)}[\eta](h) + O(h^2) , \quad (h \rightarrow 0) .$$

Die exakten Feldgleichungen (5.8) schreiben sich als

$$\begin{aligned} G^{(1)}[\eta](h) &= \kappa T - (G[\eta + h] - G^{(1)}[\eta](h)) \\ &= \kappa(T + t) , \end{aligned} \tag{8.27}$$

wobei

$$t = -\kappa^{-1}(G[\eta + h] - G^{(1)}[\eta](h)) .$$

Vom Standpunkt der exakten Theorie ist die Aufspaltung  $G = G^{(1)} + (G - G^{(1)})$  willkürlich, was sich z.B. darin ausdrückt, dass  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  (und somit  $G^{(1)}[\eta](h)$  und  $t$ ) unter allgemeinen Koordinatentransformationen kein Tensor ist. Vom Standpunkt der linearisierten Theorie, in welcher  $G^{(1)}[\eta](h)$  die relevante Krümmung ist, besagen die exakten Feldgleichungen (8.27), dass (nebst der Materie) das Gravitationsfeld Quelle seiner eigenen Krümmung ist. Man kann deshalb  $t^{\mu\nu}$  als Energie-Impulstensor des Gravitationsfeldes auffassen. Dies rechtfertigt sich auch aus  $(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$ , s. (8.5, 8.27): Energie und Impuls von Materie und Gravitation sind insgesamt erhalten. In niedrigster Ordnung ist  $t^{\mu\nu}$  quadratisch in  $h$ ,

$$\kappa t = -\frac{1}{2}G^{(2)}[\eta](h, h) ,$$

bzw. nach längerer Rechnung

$$4\kappa t_{\mu\nu} = \gamma_{\alpha\beta,\mu}\gamma^{\alpha\beta}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{,\mu}\gamma_{,\nu} \underbrace{-\gamma^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\gamma_{\alpha\mu,\nu} - \gamma^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\gamma_{\alpha\nu,\mu}}_{=0} , \quad (8.28)$$

wobei sich die Unterklammerung auf die Hilbert-Eichung (8.11) bezieht. Also: Obschon  $t$  in den linearisierten Feldgleichungen vernachlässigt wird, kann es aus den Lösungen  $\gamma_{\mu\nu}$  derselben berechnet werden.

**Ausstrahlung von Gravitationswellen.** Eine räumlich lokalisierte Quelle  $T^{\mu\nu}$  mit (8.6) erzeugt die retardierte Lösung der Feldgleichungen (8.13):

$$\gamma^{\mu\nu}(x) = -2\kappa \int d^4y D_{\text{ret}}(x - y) T^{\mu\nu}(y) ,$$

wobei  $D_{\text{ret}}(x) = \delta(x^0 - r)/4\pi r$ , ( $r = |\vec{x}|$ ) die Greensche Funktion der Wellengleichung ist (s. Elektrodynamik), also

$$\gamma^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{2\kappa}{4\pi} \int d^3y \frac{T^{\mu\nu}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} .$$

Die Hilbert-Eichung (8.11) ist erfüllt, aber i.A.  $\gamma \neq 0$ . Die Retardierung bewirkt, dass  $\gamma^{\mu\nu}{}_{,\alpha}$  wie  $r^{-1}$ , und  $t^{\mu\nu}$  wie  $r^{-2}$ , abfallen: Der Energiefluss in ein festes Raumwinkelelement wird konstant für  $r \rightarrow \infty$  (Ausstrahlung). Wir berechnen die Glieder  $\sim r^{-1}$  von  $\gamma^{\mu\nu}$  unter der Annahme

$$r \gg \lambda \gg d$$

wobei  $\lambda$  eine typische Zeit der Quelle ist ( $\approx$  Wellenlänge), und  $d$  ihre Ausdehnung sind. Dann ist in führender Ordnung

$$\gamma^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{\kappa}{2\pi r} \underbrace{\int d^3y T^{\mu\nu}(\vec{y}, t - r)}_{\varepsilon^{\mu\nu}(t-r)}$$

und ebenso für die Ableitungen davon. Die  $\varepsilon^{\mu\nu}(s)$  sind Funktionen einer Variablen  $s = t - r$  mit Raum-Raum Komponenten

$$\varepsilon^{ij}(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3y T^{00}(\vec{y}, t) y^i y^j . \quad (8.29)$$

Für beliebige  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_i v_j + u_j v_i) &= \partial_i \partial_j \frac{1}{2}(\vec{u}, \vec{y})(\vec{v}, \vec{y}) , \\ \varepsilon^{ij} u_i v_j &= \int d^3 y T^{ij} u_i v_j = \frac{1}{2} \int d^3 y T^{ij}{}_{,ji}(\vec{u}, \vec{y})(\vec{v}, \vec{y}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3 y T^{00} y^i y^j u_i v_j , \end{aligned}$$

wobei mit (8.6) verwendet wurde:  $T^{ij}{}_{,ji} = -T^{i0}{}_{,0i} = -T^{0i}{}_{,i0} = T^{00}{}_{,00}$ . Bis auf Terme  $\sim r^{-2}$  ist

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{,j} = \frac{\kappa}{2\pi r} \dot{\varepsilon}^{\mu\nu} e^j ,$$

wobei  $\vec{e} = \vec{x}/r$ . Die Eichung (8.11) besagt

$$0 = \gamma^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{\kappa}{2\pi r} (-\dot{\varepsilon}^{\mu 0} + \dot{\varepsilon}^{\mu j} e^j) ,$$

also

$$\dot{\varepsilon}^{i0} = \dot{\varepsilon}^{ij} e^j , \quad \dot{\varepsilon}^{00} = \dot{\varepsilon}^{0i} e^i = \dot{\varepsilon}^{ij} e^i e^j .$$

Aus (8.28) folgt nun für die Energiestromdichte in Richtung  $\vec{e}$

$$t^{0i} e^i = \frac{\kappa}{16\pi^2 r^2} \left( \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^2 \right) \underbrace{\sum_{i=1}^3 (e^i)^2}_{=1} .$$

Bezeichnen wir mit  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$  den Raum-Raumanteil von  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , so ist

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} &= \text{tr } \dot{\varepsilon}^2 - 2 \sum_{i=1}^3 (\dot{\varepsilon}^{i0})^2 + (\dot{\varepsilon}^{00})^2 \\ &= \text{tr } \dot{\varepsilon}^2 - 2(\dot{\varepsilon}\vec{e}, \dot{\varepsilon}\vec{e}) + (\vec{e}, \dot{\varepsilon}\vec{e})^2 \\ \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^\alpha{}_\alpha = -\text{tr } \dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}^{00} = -\text{tr } \dot{\varepsilon} + (\vec{e}, \dot{\varepsilon}\vec{e}) \end{aligned}$$

und nach kurzer Rechnung

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^2 = \text{tr } \dot{\varepsilon}^2 - 2(\dot{\varepsilon}\vec{e}, \dot{\varepsilon}\vec{e}) + \frac{1}{2} (\vec{e}, \dot{\varepsilon}\vec{e})^2 ,$$

wobei

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{3} (\text{tr } \varepsilon) \text{id} = \frac{1}{6} \ddot{Q}$$

der spurlose Anteil von  $\varepsilon$  ist und (vgl. (8.29))

$$Q_{ij}(t) = \int d^3 y T^{00}(\vec{y}, t) (3y^i y^j - \delta^{ij} \vec{y}^2)$$

der **Quadrupoltensor** der Massenverteilung. Die in den Raumwinkel  $de$  ausgestrahlte Leistung ist

$$dI = r^2 t^{0i} e^i de ,$$



d.h.

$$\frac{dI}{de} = \frac{\kappa}{576\pi^2} (\text{tr } \ddot{Q}^2 - 2(\vec{e}, \ddot{Q}^2 \vec{e}) + \frac{1}{2}(\vec{e}, \ddot{Q}^2 \vec{e})^2) .$$

Nun ist

$$\int de(\vec{e}, Q^2 \vec{e}) = \frac{4\pi}{3} \text{tr } Q^2 , \quad \int de(\vec{e}, Q\vec{e})^2 = \frac{8\pi}{15} \text{tr } Q^2$$

und die total abgestrahlte Leistung beträgt (Einstein 1917)

$$I = \frac{\kappa}{360\pi c^5} \text{tr } \ddot{Q}^2 \quad (8.30)$$

(nun ist  $c$  wieder  $\neq 1$ ).

**Anwendung** auf Doppelstern: Verminderung der Umlaufzeit infolge Strahlungsverluste.

(Einheiten:  $G = \kappa/8\pi = c = 1$ ). Die Bahn der beiden Sterne um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kann innerhalb der Newtonschen Theorie beschrieben werden. Zusammenstellung:

- dynamische Grössen:  $m_1, m_2$  Massen der beiden Körper;  $M = m_1 + m_2$  totale Masse;  $m = m_1 m_2 / M$  reduzierte Masse;  $E < 0$  Energie;  $T$  Periode.

- geometrische Grössen:  $a$  grosse Halbachse der Ellipse;  $\varepsilon$  Exzentrizität;  $p = a(1 - \varepsilon^2)$  Parameter.

- Newtonsches Gesetz:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-M}{r^3} \vec{r} , \quad (\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2) .$$

- Keplersche Gesetze der Bahn ( $r, \varphi$ ):

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} \\ \text{ii)} \quad & r^2 \dot{\varphi} = (pM)^{1/2} \\ \text{iii)} \quad & T = \frac{2\pi a^{3/2}}{M^{1/2}} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$-E = \frac{mM}{2a} . \quad (8.31)$$

Bezgl. des Schwerpunkts ist  $\vec{r}_1 = (m_2/M)\vec{r}$ ,  $\vec{r}_2 = -(m_1/M)\vec{r}$ . Der Trägheitstensor des Systems ist somit

$$\theta = \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x} \otimes \vec{x} = \frac{1}{M^2} \underbrace{(m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2)}_{m_1 m_2 M} \vec{r} \otimes \vec{r} = m \vec{r} \otimes \vec{r} .$$

Wir benötigen

$$\ddot{\theta} = m(\ddot{\vec{r}} \otimes \vec{r} + 3\ddot{\vec{r}} \otimes \dot{\vec{r}} + 3\dot{\vec{r}} \otimes \ddot{\vec{r}} + \vec{r} \otimes \ddot{\vec{r}}) .$$

Seien  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$  Einheitsvektoren in radialer, bzw. tangentialer Richtung. Mit

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r , & \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi , \\ \ddot{\vec{r}} &= -\frac{M}{r^2} \vec{e}_r , & \ddot{\vec{r}} &= M \left( \frac{3}{r^4} \dot{r} \vec{r} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r^3} \right) = M \left( \frac{2\dot{r}}{r^3} \vec{e}_r - \frac{\dot{\varphi}}{r^2} \vec{e}_\varphi \right) \end{aligned}$$

findet man

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} \otimes \vec{r} &= M \left( \frac{2}{r^2} \dot{r} \vec{e}_r \otimes \vec{e}_r - \frac{\dot{\varphi}}{r} \vec{e}_\varphi \otimes \vec{e}_r \right), \\ \ddot{\vec{r}} \otimes \dot{\vec{r}} &= -M \left( \frac{\dot{r}}{r^2} \vec{e}_r \otimes \vec{e}_r + \frac{\dot{\varphi}}{r} \vec{e}_r \otimes \vec{e}_\varphi \right), \\ \ddot{\theta} &= -mM \left( \underbrace{2 \frac{\dot{r}}{r^2} \vec{e}_r \otimes \vec{e}_r}_{-\dot{u}} + 4 \frac{\dot{\varphi}}{r} (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \otimes \vec{e}_r) \right),\end{aligned}$$

sowie

$$\text{tr } \ddot{\theta} = 2mM\dot{u}, \quad \text{tr } \ddot{\theta}^2 = 4(mM)^2(\dot{u}^2 + 8u^2\dot{\varphi}^2).$$

Für den Quadrupoltensor

$$Q = 3\theta - (\text{tr } \theta)\text{id}$$

findet man dann

$$\begin{aligned}\text{tr } \ddot{Q}^2 &= 3(3 \text{tr } \ddot{\theta}^2 - (\text{tr } \ddot{\theta})^2) \\ &= 12(mM)^2(2\dot{u}^2 + 24u^2\dot{\varphi}^2) \\ &= 24 \left( \frac{mM}{p} \right)^2 (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + 12(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2) \dot{\varphi}^2.\end{aligned}$$

Der Energieverlust entspricht der Strahlungsleistung (8.30):

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{45} \text{tr } \ddot{Q}^2.$$

Über eine Periode gemittelt beträgt er

$$\begin{aligned}-\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( -\frac{dE}{dt} \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{dE}{dt} \right) \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{8}{15} \left( \frac{mM}{p} \right)^2 \frac{(pM)^{1/2}}{p^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + 12(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2)(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2 dy}_{24\pi \left( 1 + \frac{73}{24} \varepsilon^2 + \frac{37}{96} \varepsilon^4 \right)},\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile (i, ii) verwendet wurde. Aus (iii) und (8.31) folgt

$$-ET = \pi m (Ma)^{1/2}$$

sowie die Verkürzung der Periode

$$\begin{aligned}\frac{\dot{T}}{T} &= \frac{3\dot{a}}{2a} = -\frac{3\dot{E}}{2E} \\ &= -\frac{96mM^2}{5a^4} (1 - \varepsilon^2)^{-7/2} \left( 1 + \frac{73}{24} \varepsilon^2 + \frac{37}{96} \varepsilon^4 \right).\end{aligned}$$

Diese Voraussage konnte experimentell getestet werden (Hulse und Taylor 1975, Nobelpreis 1993) am Doppelstern bestehend aus dem Pulsar PSR 1913 + 16 und einem unsichtbaren Partner (beides Neutronensternen):

Theorie:

$$\dot{T} = (-2.40247 \pm 0.00002) \times 10^{-12}$$

Beobachtung:

$$\dot{T} = (-2.4086 \pm 0.0052) \times 10^{-12} .$$

Die Übereinstimmung liegt innerhalb von 0.5%.

## Literature:

- P.A.M. Dirac, “General Theory of Relativity”, Wiley 1973
- J.B. Hartle, “Gravity. An Introduction to Einstein’s General Relativity”, Addison Wesley 2003
- C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, “Gravitation”, Freeman 1973
- W. Pauli, “Theory of Relativity”, Pergamon 1958
- W. Rindler, “Essential Relativity”, Springer 1977
- R.K. Sachs, H. Wu, “General Relativity for Mathematicians”, Springer 1977
- N. Straumann, “General Relativity With Applications to Astrophysics”, Springer 2004
- R.M. Wald, “General Relativity”, University of Chicago Press, 1984
- S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, Wiley 1972