

Quantenmechanik I. Übung 3.

HS 13

Abgabe: Di 15. Oktober 2013

1. De Broglie Wellen und Bohrsche Quantisierung

Betrachte ein freies Teilchen auf dem Kreis (Bsp. 3 auf S. 9). Verlange, dass seine de Broglie Welle stationär sei. Welche Quantisierungsbedingung erhält man? Vergleiche sie mit der Sommerfelds.

2. Das Schalenmodell der Atome

Die Sommerfeld-Quantisierung lässt sich strikt nicht auf ein Atom mit mehr als einem Elektron anwenden, da es aufgrund der Wechselwirkungen zwischen ihnen als Hamiltonsches System nicht separabel ist. Näherungsweise stellt man sich jedes Elektron in einem radialen Potential $V(r)$ vor, das nebst der Kernanziehung auch die Abstoßung der restlichen Elektronen summarisch beschreibt. Die Energieniveaus eines solchen Elektrons tragen zwei Quantenzahlen $n_r = 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, \dots$, und sind $(2l + 1)$ -fach entartet (s. S. 11) durch Weglassung der Quantenzahl n_φ . Statt n_r wird oft die Quantenzahl $n = n_r + l$ verwendet und die Niveaus in Abweichung zur Vorlesung mit $E_{n,l}$ bezeichnet. Pauli (1925) formuliert das Ausschlussprinzip:

- Es gibt eine zusätzliche Quantenzahl, die nur zwei Werte annimmt (also: die Entartung von $E_{n,l}$ ist $2(2l + 1)$).
- Jeder Quantenzustand (bestimmt durch eine Kombination aller Quantenzahlen) kann nur durch ein Elektron besetzt werden.

Der Grundzustand des Atoms ergibt sich durch sukzessive Besetzung der Quantenzustände nach steigenden Energien $E_{n,l}$. Empirische Regel (Janet 1927, Madelung 1936)

- $E_{n,l}$ wächst mit $n + l$.
- Bei gleichen $n + l$ wächst $E_{n,l}$ mit n .

Ordne die Paare (n, l) in einer Tabelle an, wie der folgenden:

$l =$	0	1	2	3	4	5
$n = 1$	○	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○	○

Welche Schalen (\circ) gibt es? In welcher Reihenfolge werden sie mit Elektronen gefüllt, und mit wie vielen? Bezeichne sie mit n und einem Buchstaben s, p, d, f für $l = 0, 1, 2, 3$ (z.B. $(n = 2, l = 1) = 2p$) und übersetze die Reihenfolge in diese Notation. “Erkläre” ferner die Längen der Zeilen im Periodensystem der Elemente: 2, 8, 8, 18, 18, 32 (im letzten Fall unter Einbezug der Lanthanoiden).

Hinweis: Eine neue Zeile beginnt immer dann, wenn erneut Zustände mit $l = 0$ besetzt werden.

3. Zum Compton-Effekt

(i) In der Vorlesung wurde die Änderung der Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung bei Streuung an einem ruhenden Elektron bestimmt, s. (1.43) im Skript auf dem Netz¹. Zugrunde liegt die Vorstellung eines Lichtquants (Photon). Zeige folgende Verallgemeinerung: Falls das Elektron einen anfänglichen Impuls p in Richtung der einfallenden Strahlung hat, so beträgt die Änderung

$$\lambda' - \lambda = \frac{4\pi\hbar + 2\lambda p}{E/c - p} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} . \quad (1)$$

Hinweis: Ein nützliches Zwischenresultat ist

$$(\hbar k^\mu + p^\mu)k'_\mu = p^\mu k_\mu ,$$

wobei p^μ der 4er-Impuls des Elektrons und k^μ der 4er-Wellenvektor des Photons ist. Ungestrichene Grössen beziehen sich auf vor dem Stoss, gestrichene danach.

(ii) Berechne die Änderung gemäss klassischen Vorstellungen und zeige, dass (1) mit $\hbar = 0$ resultiert.

Hinweis: Für $p = 0$ ist $\lambda' = \lambda$; für $p \neq 0$ passe man das Bezugssystem an.

(iii) Argumentiere qualitativ, worin sich die Ergebnisse aus (ii) und aus (1.43) experimentell unterscheiden.

Hinweis: Vergleiche die Diskussion des photoelektrischen Effekts.

¹(1.41) auf Papier