Elektrodynamik

Prof. G.M. Graf — *Schriftliche Prüfung Winter 2009*

- Bitte füllen Sie das beiliegende Deckblatt aus.
- Von insgesamt 65 erzielbaren Punkten genügen 35 für die Note 4 und 55 für die Note 6.

Grundkenntnisse[1] (je 5 Punkte; keine Herleitung, ausser wo verlangt)

1. Auf welche Situation beziehen sich die *Kapazitätskoeffizienten*? Gib zwei physikalische Grössen an, die sich damit berechnen lassen. Wie?

2. Wie lautet die Lösung des *Anfangswertproblems* der freien skalaren Wellengleichung $\Box u = 0$ in $\mathbb{R}^{3+1} \ni (\vec{x}, t)$?

3. Wie *transformiert* ein gemischtes Tensorfeld ${T^\alpha}_\beta(x)$ unter Koordinatentransformationen $\overline{x}^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu + a^\mu$?

4. Schreibe die *Bewegungsgleichungen* eines relativistischen Teilchens im äusseren elektromagnetischen Feld. Aus welchem *Variationsprinzip*, bzw. *Wirkung*, stammen sie? Erkläre, wieso die Wirkung, aber nicht die Weltlinie, von der *Eichung* abhängt.

5. Formuliere die *makroskopischen Maxwell-Gleichungen* in materiellen Medien. Erläutere den Bezug zwischen den darin *vorkommenden Grössen* einerseits und den räumlich gemittelten Feldern $\vec{E}$, $\vec{B}$ und Quellen ρ, $\vec{\imath}$, sowie der elektrischen und magnetischen Polarisation, $\vec{P}$ und $\vec{M}$, andererseits. Wie lauten die *Verknüpfungsgleichungen* im einfachsten Fall? Welche Feldkomponenten sind an Grenzflächen *stetig*?

6. Gib eine qualitative Erklärung des *Himmelsblau* (keine Gleichungen).

7. Was versteht man unter einem idealen *Wellenleiter*? Welcher Ansatz für die elektromagnetischen Felder ist dadurch begründet? Welche *Feldkomponenten* bestimmen dann in der Regel die restlichen (keine Gleichungen)? Die Felder sind die Superposition welcher *Spezialfälle*? Welche *Feldgleichungen* und *Randbedingungen* gehören zu diesen? Was sind *Moden*?

Aufgaben (je 10 Punkte; Antworten sind durch Herleitung zu begründen oder aus der Vorlesung zu übernehmen)

1. Ein ebenes elektrostatisches Randwertproblem

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ der Sektor mit Öffnungswinkel α, $(0 < \alpha \leq 2\pi)$, also

$$G = \{(x_1, x_2) \mid 0 < \theta < \alpha\},$$

[1] Beispiel. Frage: Was sind *Lorentz-Transformationen*, und durch welche Gleichung sind sie charakterisiert? Antwort: Lorentz-Transformationen $x' = \Lambda x + a$ beschreiben in der speziellen Relativität die Transformation der Koordinaten $x = (ct, \vec{x})$ eines Ereignisses bei Wechsel des Inertialsystems. Sie sind charakterisiert durch $\Lambda^T g \Lambda = g$ mit $g = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

wobei r, θ Polarkoordinaten sind: $x_1 + \mathrm{i}x_2 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Betrachte das in 3-Richtung translationsinvariante Gebiet $G \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Darin sollen sich keine Ladungen befinden, und das elektrostatische Potential φ sei auf dem Rand vorgegeben:

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & (\theta = 0)\,, \\ V, & (\theta = \alpha) \end{cases}$$

mit V konstant. Gesucht ist die Lösung für das elektrische Feld $\vec{E}$ in $G \times \mathbb{R}$ mit $E_3 = 0$ und überall beschränktem Potential.

Hinweis: Die Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $\varphi(\vec{x}) = \varphi(z)$, $(z = x_1 + \mathrm{i}x_2)$. Dann ist $\varphi(z) = \operatorname{Re}\Phi(z)$ mit Φ einer analytischen Funktion, die nun erraten werden kann. Sollte dies nicht gelingen: Welche analytische Abbildung $f : G \to \widetilde{G}, z \mapsto \tilde{z}$ bildet G bijektiv auf einen Streifen $\widetilde{G}$ ab? Das Randwertproblem für $\widetilde{\Phi}(\tilde{z}) := \Phi(z)$ ist nun einfacher.

2. Feld bei plötzlichem Einschalten des Stroms

Das elektromagnetische Feld eines unendlich langen und dünnen, geraden Leiters (konstanter Strom I, keine Ladungen) ist bekanntlich

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0\,, \qquad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi c r}\vec{e}_\theta\,, \tag{1}$$

wobei r, θ und $z = x_3$ Zylinderkoordinaten mit dem Leiter als Achse sind. Berechne die beiden Felder für den Fall, dass der Strom erst zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet wird, $I(t) = I\vartheta(t)$, und dass vorher kein Feld herrschte. Man überprüfe das Resultat dadurch, dass es für $t \to +\infty$ gegen (1) streben soll.

Hinweise: Es tritt ein Integral der Form $\int_0^{f(\vec{x},t)} (1+s^2)^{-1/2} ds$ auf. Für die weitere Rechnung ist es von Vorteil, es nicht weiter umzuformen, selbst wenn die entsprechende Stammfunktion bekannt sein sollte. Ferner: Für den Einheitsvektor $\vec{e}_\theta$ in azimutaler Richtung gilt $\vec{e}_\theta = (-\partial_2 r, \partial_1 r, 0)$, $(\partial_i = \partial/\partial x_i)$.

3. Relativistische Bewegung in gekreuzten Feldern

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ seien homogen und stehen senkrecht zueinander. Finde, als Funktion der Eigenzeit τ, die 4er-Geschwindigkeit $u^\mu(\tau)$ eines Teilchens (Masse m, Ladung e), das anfänglich ruht: $u^\mu(0) = (1, 0, 0, 0)$ in Einheiten, wo $c = 1$. Gehe wie folgt vor:

(a) Zeige, dass die Lösung von der Form $u(\tau) = \mathrm{e}^{A\tau}u(0)$ ist für eine zu bestimmende Matrix A.

(b) Sei $A^3 = a^2 A$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Zeige

$$\mathrm{e}^{A\tau} = 1 + \frac{A}{a}\mathrm{sh}(a\tau) + \frac{A^2}{a^2}(\mathrm{ch}(a\tau) - 1)\,.$$

(c) Zeige, dass für $\vec{E} \perp \vec{B}$ die Voraussetzung in (b) erfüllt ist, sofern $|\vec{E}| > |\vec{B}|$. Nehme dazu und fortan oEdA an $\vec{E} = (0, E, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, B)$.

(d) Finde $u(\tau)$. (Ein ähnliches, nicht herzuleitendes Resultat gilt im Fall $|\vec{E}| < |\vec{B}|$.)

Hinweis: Das Resultat (b) kann unabhängig von seiner Herleitung angewandt werden.