

Übung 1. *Legendretransformation*

Sei $f(x)$ eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f''(x) > 0$ (strikt konvex). Die Legendretransformation von $f(x)$ ist durch

$$(\mathcal{L}f)(y) = y\xi(y) - f(\xi(y))$$

definiert, wobei $\xi(y) = (f')^{-1}(y)$, d.h. $y = f'(\xi(y))$.

- (i) Berechne die Legendretransformierte für die Funktionen

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

- (ii) Zeige, dass für eine strikt konvexe Funktion f die Legendretransformierte die Eigenschaft

$$(\mathcal{L}f)''(y) > 0$$

besitzt, wobei hier die beiden Ableitungen bezüglich y genommen werden.

- (iii) Wegen (ii) kann man also die Legendretransformierte von $\mathcal{L}f$ bilden. Zeige, dass für eine strikt konvexe Funktion die Legendretransformation eine Involution ist, d.h. dass $\mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$.

Lösung.

- (i) Für $f_1(x) = e^x$ ist $f_1'(x) = e^x$. Mithilfe der Identität $f'((f')^{-1}(y)) = y$ findet man $(f')^{-1}(y) = \log(y)$. Einsetzen in die Definition der Legendretransformation liefert

$$(\mathcal{L}f)(y) = y \log(y) - y = y(\log(y) - 1). \quad (\text{L.1})$$

Bemerkung: Der Definitionsbereich dieser Funktion ist \mathbb{R}^+ .

Für die zweite Funktion ist $f_2'(x) = -x + a$ und $(f')^{-1}(y) = -y + a$, also

$$(\mathcal{L}f)(y) = y(-y + a) + \frac{1}{2}y^2 - \frac{a^2}{4} = -\frac{1}{2}(y-a)^2 + \frac{a^2}{4}. \quad (\text{L.2})$$

Somit ist die Legendretransformierte der Funktion f_2 identisch mit der ursprünglichen Funktion, also $\mathcal{L}f_2 = f_2$.

- (ii) $\mathcal{L}f$ ist ebenfalls stetig differenzierbar, da

$$(\mathcal{L}f)'(y) = \xi(y) + y\xi'(y) - f'(\xi(y))\xi'(y) = \xi(y) = (f')^{-1}(y). \quad (\text{L.3})$$

Somit ist $(\mathcal{L}f)''(y) = (f')^{-1}'(y)$ und $(\mathcal{L}f)''(y) > 0$ falls $(f')^{-1}$ streng monoton wachsend ist. Da f' nach Voraussetzung streng monoton wachsend ist, ist es auch $(f')^{-1}$ und deshalb ist $\mathcal{L}f$ strikt konvex ($(\mathcal{L}f)''(y) > 0$ erfüllt).

(iii) Gemäss Definition der Legendretransformation gilt

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}f)(x) = x\tilde{\xi}(x) - \mathcal{L}f(\tilde{\xi}(x)) \quad (\text{L.4})$$

mit $\tilde{\xi}(x) = (\mathcal{L}f')^{-1}(x) = f'(x)$ nach Gl. (L.3). Somit erhalten wir

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}f)(x) = xf'(x) - \mathcal{L}f(f'(x)). \quad (\text{L.5})$$

Wiederum mit der Definition der Legendretransformation folgt

$$\mathcal{L}f(f'(x)) = f'(x)\xi(f'(x)) - f(\xi(f'(x))) = f'(x)x - f(x), \quad (\text{L.6})$$

wobei wir verwendet haben, dass $\xi(y) = (f')^{-1}(y)$. Einsetzen in Gl. (L.5) liefert

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}f)(x) = xf'(x) - (f'(x)x - f(x)) = f(x). \quad (\text{L.7})$$

Die Legendretransformation ist also für eine Funktion $f(x)$ mit $f''(x) > 0$ involutiv.

Übung 2. Vergleich numerischer Lösungsverfahren

In dieser Aufgabe vergleichen wir drei numerische Verfahren, um Differentialgleichungen der Form $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ zu lösen, wobei $\mathbf{q} = (q^1, q^2, \dots, q^n)^T$ und q^j die j -te Lagekoordinate ist. Definiere nun $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$, $\mathbf{q}_i := \mathbf{q}(t_i)$ und $\dot{\mathbf{q}}_i := \dot{\mathbf{q}}(t_i)$. Die Verfahren sind¹:

- Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{q}}_i + \Delta t \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t_i), \\ \mathbf{q}_{i+1} &= \mathbf{q}_i + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{q}}_i. \end{aligned} \quad (1)$$

- Leapfrog-Verfahren:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{i+1/2} &= \dot{\mathbf{q}}_{i-1/2} + \Delta t \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}_i, t_i), \\ \mathbf{q}_{i+1} &= \mathbf{q}_i + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{q}}_{i+1/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Beachte, dass dieses Verfahren nur mit DGl der Form $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, t)$ benutzt werden kann.

- 4. Ordnung Runge-Kutta-Verfahren:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \Delta t \cdot \mathbf{F}_u(\mathbf{u}_i, t_i) \\ \mathbf{k}_2 &= \Delta t \cdot \mathbf{F}_u\left(\mathbf{u}_i + \frac{\mathbf{k}_1}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ \mathbf{k}_3 &= \Delta t \cdot \mathbf{F}_u\left(\mathbf{u}_i + \frac{\mathbf{k}_2}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ \mathbf{k}_4 &= \Delta t \cdot \mathbf{F}_u(\mathbf{u}_i + \mathbf{k}_3, t_i + \Delta t) \\ \mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{u}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \mathbf{k}_4) \end{aligned} \quad (3)$$

wobei

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_u(\mathbf{u}, t) := \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

¹Siehe z.B. das Skript der Vorlesung "Numerische Methoden" für mehr Details: http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/nm_pc

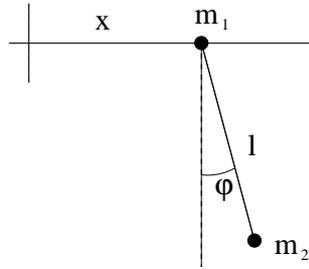


Abbildung 1: Ebenes Pendel

Betrachte nun zuerst einen harmonischen Oszillator mit Federkonstante α^2 .

- (a) Finde die Lagrangefunktion, die Bewegungsgleichung und deren exakte Lösung.
- (b) Löse die Bewegungsgleichung numerisch mit den gegebenen Verfahren. Benutze z.B. die Parameter/Randbedingungen $\omega = \sqrt{(\alpha^2/m)} = 2$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $\Delta t = 0.1$.
- (c) Überprüfe die Stabilität der Lösungen: vergleiche dazu direkt die numerischen Lösungen mit der exakten Lösung und überprüfe, wie gut jeweils die Energie erhalten wird.

Betrachte als nächstes das Pendel von Serie 6 Aufgabe 3 (Abbildung 1).

- (d) Zeige, dass die Bewegungsgleichung wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \sin \theta \frac{l \dot{\phi}^2 + g \cos \phi}{\mu - \cos^2 \phi}, \\ \ddot{\phi} &= -\sin \theta \frac{l \dot{\phi}^2 \cos \phi + \mu g}{l(\mu - \cos^2 \phi)}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei $\mu = 1 + m_1/m_2$.

- (e) Löse die Bewegungsgleichungen numerisch mit Euler- und Runge-Kutta-Verfahren. Benutze dazu zum Beispiel folgende Parameter und Randbedingungen: $\mu = 5$, $l = 2$, $g = 10$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\varphi(0) = 3\pi/4$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ und $\Delta t = 0.05$.

Hinweis: Benutze die Datei `ex_9_2.py` (Webpage der Vorlesung) und implementiere die fehlenden Funktionen.

Lösung.

- (a) Die Lagrangefunktion des Systems ist gegeben durch

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \tag{L.8}$$

Somit ist die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m(\dot{x} + \omega^2 x) = 0, \tag{L.9}$$

wobei $\omega^2 = \alpha^2/m$. Die Lösung ist dann

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin(\omega t) \\ \dot{x}(t) &= -x(0)\omega \sin(\omega t) + \dot{x}(0) \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{L.10}$$

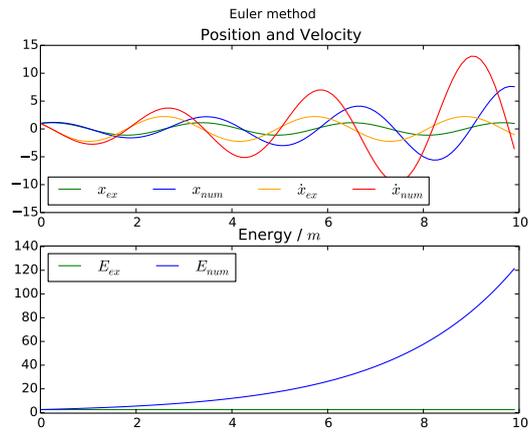
- (b) Abbildungen 2(a), 2(b) und 2(c) zeigen die Lösung der Differentialgleichung mit $\omega = 2$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$ und $\Delta t = 0.1$. Das erste Diagramm vergleicht die Position und Geschwindigkeit der Masse mit der exakten Lösung, das zweite Diagramm zeigt die Energie in jedem Zeitschritt.
- (c) Aus Abbildungen 2(a), 2(b) und 2(c) sieht man leicht, dass man mit dem Euler-Verfahren eine nicht stabile Lösung erhält, während das Leapfrog- und das 4. Ordnung Runge-Kutta-Verfahren zu stabilen Lösungen führen.
- (d) Durch einsetzen von $\mu = 1 + m_1/m_2$ in (Serie 6, L.17) kommt man auf

$$\begin{aligned}\mu\ddot{x} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi &= l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi &= -g \sin \varphi.\end{aligned}\tag{L.11}$$

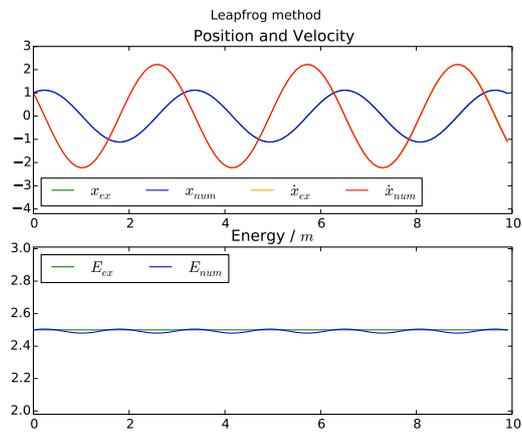
Umformen ergibt die gesuchten Gleichungen (5).

- (e) Wir lösen die Differentialgleichungen (5) mit Euler- und Runge-Kutta-Verfahren (man kann das Leapfrog-Verfahren hier nicht benutzen, weil die Differentialgleichungen auch $\dot{\varphi}$ enthalten). Wir haben die folgenden Parameter benutzt: $\mu = 5$, $l = 2$, $g = 10$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\varphi(0) = 3\pi/4$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ und $\Delta t = 0.05$. Analog zum harmonischen Oszillator ist die Lösung des Euler-Verfahrens nicht stabil (exponentieller Anstieg der Energie), während die Lösung des 4. Ordnung Runge-Kutta-Verfahrens stabil ist.

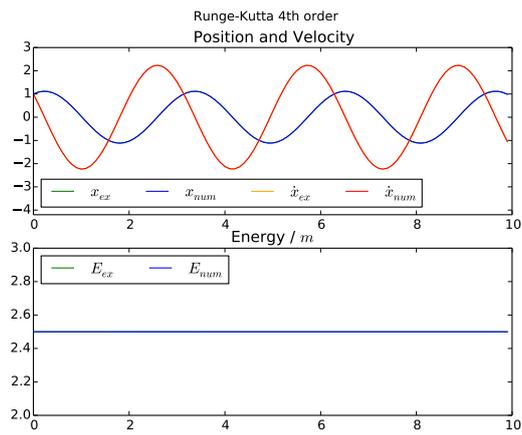
Der gesamte Code befindet sich in der Datei `sol_9_2.py` auf der Webpage der Vorlesung.



(a) Lösung mit Euler-Verfahren

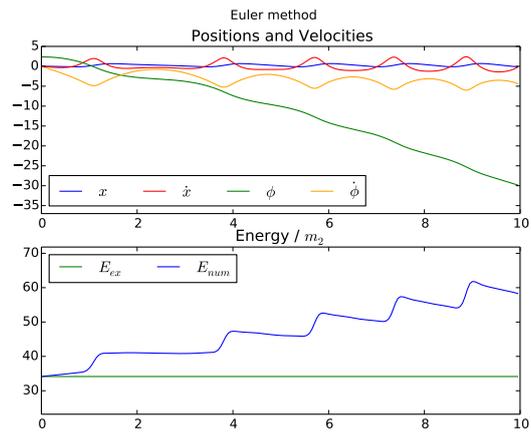


(b) Lösung mit Leapfrog-Verfahren

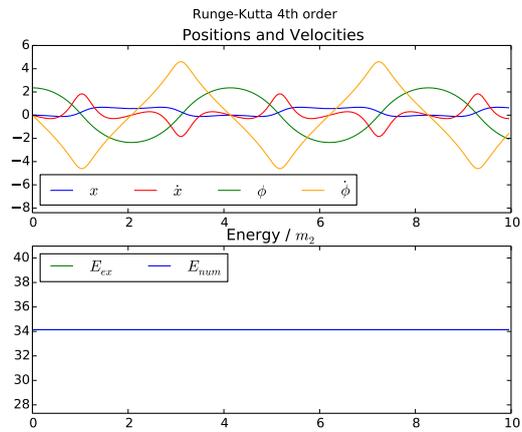


(c) Lösung mit Runge-Kutta-Verfahren

Abbildung 2: Harmonischer Oszillator



(a) Lösung mit Euler-Verfahren



(b) Lösung mit Runge-Kutta-Verfahren

Abbildung 3: Ebenes Pendel