

Übung 1. Gekoppelte Pendel

Wir betrachten ein System aus zwei gleichen mathematischen Pendeln der Länge $l_1 = l_2 = l$ mit Massen $m_1 = m_2 = m$ im Schwerfeld mit Erdbeschleunigung g . Die Pendel bewegen sich beide in einer Ebene, und der Auslenkungswinkel der Pendel relativ zur Vertikalen wird mit q_1 und q_2 (kleine Auslenkungen!) bezeichnet. Weiterhin sind die Pendel durch eine masselose Feder gekoppelt, deren Länge gleich dem Abstand der Aufhängepunkte ist. Definiere $\omega_g^2 = g/l$ und $\omega_f^2 = f/m$.

(i) Bestimme die beiden Eigenschwingungen des Systems.

(ii) Zur Zeit $t = 0$ seien die Pendel in Ruhe. Dann wird eines der beiden Pendel mit der Geschwindigkeit $\dot{q}_1 = v$ angestossen. Zeige, dass sich das erste Pendel nach einer gewissen Zeit T , die bestimmt werden soll, beinahe in Ruhe befindet, und dass alle Energie zum zweiten übergegangen ist.

Hinweis: (i) Zeige, dass die Federkraft auf Masse m_1 für kleine Auslenkungen $-f(q_1 - q_2)$ ist. (ii) Hier soll man annehmen, dass die Federkonstante f klein ist, und die trigonometrische Identität $\sin(a) + \sin(b) = 2 \cos(\frac{a-b}{2}) \sin(\frac{a+b}{2})$ benutzen.

Lösung. Für den Fall kleiner Auslenkungen wird das gekoppelte Pendel durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= -mg\frac{q_1}{l} - f(q_1 - q_2) \\ m\ddot{q}_2 &= -mg\frac{q_2}{l} + f(q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (\text{L.1})$$

beschrieben, wobei ml^2 das Trägheitsmoment eines mathematischen Pendels, sowie für kleine Auslenkungen $-mglq_i$ das Drehmoment aufgrund der Schwerkraft und $\pm fl^2(q_1 - q_2)$ das Drehmoment aufgrund der Federkraft. Durch Definition von $\omega_g^2 = g/l$ und $\omega_f^2 = f/m$ lässt sich dieses System schreiben als

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\omega_g^2 + \omega_f^2) & \omega_f^2 \\ \omega_f^2 & -(\omega_g^2 + \omega_f^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2})$$

(i) Mithilfe des Ansatzes

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\lambda t} \quad (\text{L.3})$$

finden wir die zwei Eigenfrequenzen des System als Lösung von

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^2 - (\omega_g^2 + \omega_f^2) & \omega_f^2 \\ \omega_f^2 & \lambda^2 - (\omega_g^2 + \omega_f^2) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{L.4})$$

als $\lambda_+ = \omega_g$ (symmetrische Schwingung) und $\lambda_- = \sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_f^2}$ (antisymmetrische Schwingung). Die Eigenvektoren der Schwingung sind $(A_{1+}, A_{2+}) = (1, 1)$ und $(A_{1-}, A_{2-}) = (1, -1)$.

(ii) Die allgemeine Lösung für eine gekoppelte Schwingung ist

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = (a_+ \sin(\lambda_+ t) + b_+ \cos(\lambda_+ t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_- \sin(\lambda_- t) + b_- \cos(\lambda_- t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.5})$$

Mithilfe der Anfangsbedingungen $q_1(t=0) = q_2(t=0) = 0$ findet man leicht $b_+ = b_- = 0$, ausserdem folgt aus $\dot{q}_1(t=0) = v$ und $\dot{q}_2(t=0) = 0$

$$v = \lambda_+ a_+ + \lambda_- a_-, \quad (\text{L.6})$$

$$0 = \lambda_+ a_+ - \lambda_- a_-, \quad (\text{L.7})$$

woraus folgt, dass $a_{\pm} = v/(2\lambda_{\pm})$ und somit

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_+ t)/\lambda_+ + \sin(\lambda_- t)/\lambda_- \\ \sin(\lambda_+ t)/\lambda_+ - \sin(\lambda_- t)/\lambda_- \end{pmatrix}. \quad (\text{L.8})$$

Für kleine Federkonstante f gilt $\omega_f \ll \omega_g$ und somit

$$\frac{1}{\lambda_-} = \frac{1}{\omega_g \sqrt{1 + 2(\omega_f/\omega_g)^2}} = \frac{1}{\omega_g} \left(1 + \mathcal{O}((\omega_f/\omega_g)^2)\right) \quad (\text{L.9})$$

und wir erhalten

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \approx \frac{v}{2\omega_g} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_+ t) + \sin(\lambda_- t) \\ \sin(\lambda_+ t) - \sin(\lambda_- t) \end{pmatrix} = \frac{v}{\omega_g} \begin{pmatrix} \cos((\lambda_+ - \lambda_-)t/2) \sin((\lambda_+ + \lambda_-)t/2) \\ \cos((\lambda_+ + \lambda_-)t/2) \sin((\lambda_+ - \lambda_-)t/2) \end{pmatrix}. \quad (\text{L.10})$$

Wir betrachten nun $q_1(t)$ und $\dot{q}_1(t)$ für kleine f ,

$$q_1(t) = \frac{v}{\omega_g} \left(\cos((\lambda_+ - \lambda_-)t/2) \sin((\lambda_+ + \lambda_-)t/2) + \mathcal{O}((\omega_f/\omega_g)^2) \right) \quad (\text{L.11})$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{v}{\omega_g} \left(\cos((\lambda_+ - \lambda_-)t/2) \cos((\lambda_+ + \lambda_-)t/2) + \mathcal{O}((\omega_f/\omega_g)^2) \right) \quad (\text{L.12})$$

und erkennen, dass für $T = \pi/(\lambda_- - \lambda_+) \approx \pi\omega_g/\omega_f^2$ die Masse m_1 (beinahe) zum Stillstand kommt, also $q_1(T) \approx 0$ und $\dot{q}_1(T) \approx 0$.

Übung 2. Gekoppelte Federn

Wir betrachten ein System von N identischen Teilchen der Massen m mit Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, die auf einem Ring angeordnet sind (siehe Abbildung 1). Die Teilchen sind über Federn der Federkonstante f miteinander gekoppelt, wobei wir annehmen, dass die Federkräfte auf jedes Teilchen genau entlang der Tangentialen wirken.

- (i) Finde die Bewegungsgleichungen für \mathbf{x} in der Form $\ddot{\mathbf{x}} = c\mathbf{A}\mathbf{x}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.
- (ii) Das System hat eine zyklische Symmetrie:

$$S : (x_1, x_1, \dots, x_N) \rightarrow (x_2, x_3, \dots, x_N, x_1). \quad (1)$$

Finde die Matrixdarstellung für S und diagonalisiere diese, d.h. finde Eigenvektoren $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^N$ und Eigenwerte $\lambda_k \in \mathbb{C}$, so dass

$$S\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k \quad (2)$$

erfüllt ist.

- (iii) Warum lassen sich die Bewegungsgleichungen nun deutlich vereinfachen?

- (iv) Verwende die Entwicklung $\mathbf{x}(t) = \sum_k u_k(t)\mathbf{e}_k$ und zeige, dass

$$\ddot{u}_k = -\omega_k^2 u_k. \quad (3)$$

Finde die ω_k . Was bedeuten diese?

- (v) Beschreibe die Lösungen, die $\lambda_k = \pm 1$ entsprechen.

Lösung. (i) Die Bewegungsgleichungen sind

$$m\ddot{x}_i = -f((x_i - x_{i+1}) + (x_i - x_{i-1})). \quad (\text{L.13})$$

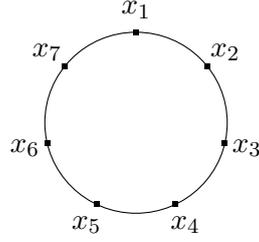


Abbildung 1: Anordnung von 7 identischen Teilchen auf einem Ring.

Damit ist $c = -\frac{f}{m}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.14})$$

(ii) Es ist

$$S_{ij} = \delta_{i,j+1} \quad (\text{L.15})$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}. \quad (\text{L.16})$$

Da $S^N = \mathbb{I}$ gilt, muss für alle Eigenwerte $\lambda^N = 1$ gelten. Das gleiche Ergebnis lässt sich durch Aufstellen von $\det(S - \lambda\mathbb{I}) = 0$ und Verwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes finden. Die Eigenwerte sind also

$$\lambda_k = e^{2\pi i \frac{k}{N}}. \quad (\text{L.17})$$

Für die Eigenvektoren ergibt sich in Komponenten:

$$\begin{aligned} \sum_j S_{ij}(\mathbf{e}_k)_j &= e^{2\pi i \frac{k}{N}} (\mathbf{e}_k)_i \\ (\mathbf{e}_k)_j &= e^{2\pi i \frac{k}{N}} (\mathbf{e}_k)_{j-1}. \end{aligned} \quad (\text{L.18})$$

Hier wurde wiederum die zyklische Eigenschaft der Komponenten benutzt. Als Lösung ergibt sich

$$(\mathbf{e}_k)_j = e^{2\pi i \frac{k}{N} j}. \quad (\text{L.19})$$

(iii) Da die beiden Matrizen S und A kommutieren gibt es eine gemeinsame Eigenbasis. Da es in diesem Fall keine entarteten Eigenwerte gibt, die Eigenräume also eindimensional sind, können wir A einfach in der soeben gefundenen Eigenbasis von S diagonalisieren indem wir die Eigenwerte ausrechnen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (A\mathbf{e}_k)_j &= 2(\mathbf{e}_k)_j - (\mathbf{e}_k)_{j+1} - (\mathbf{e}_k)_{j-1} \\ &= (2 - e^{2\pi i \frac{k}{N}} - e^{-2\pi i \frac{k}{N}})(\mathbf{e}_k)_j \\ &= 2 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{k}{N} \right) \right) (\mathbf{e}_k)_j. \end{aligned} \quad (\text{L.20})$$

Die Eigenwerte von A sind also

$$a_k = 2 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{k}{N} \right) \right) = 4 \sin^2 \left(\pi \frac{k}{N} \right). \quad (\text{L.21})$$

(iv) Durch Einsetzen findet man

$$\sum_k \ddot{u}_k(t) \mathbf{e}_k = -\frac{f}{m} \sum_k a_k u_k(t) \mathbf{e}_k, \quad (\text{L.22})$$

so dass die Behauptung folgt, wobei die ω_k sich mit Gl. L.21 zu

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{f}{m} \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}\right)} \quad (\text{L.23})$$

ergeben. Dies sind die Winkelgeschwindigkeiten der Eigenschwingungen des Systems.

(v)

i) $\lambda = 1$ ergibt sich für $k = N$, es ist also $\omega = \omega_N = 0$. Durch Integration der Differentialgleichung ergibt sich $u_N(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist also eine gleichmäßige Rotation.

ii) $\lambda = -1$ ergibt sich für $k = \frac{N}{2}$. Es ist dann $u_{N/2}(t) = u_{\pm} e^{\pm 2i\sqrt{f/mt}}$ und $(\mathbf{e}_{N/2})_i = (-1)^i$, also

$$x_i(t) = u_{\pm} e^{\pm 2i\sqrt{f/mt}} (-1)^i. \quad (\text{L.24})$$

Die Teilchen mit geradem bzw. ungeradem Index oszillieren also mit einer relativen Phasenverschiebung.

Übung 3. *Phasenportrait gedämpfter Schwingungen*

Wir betrachten einen gedämpften Oszillator,

$$m\ddot{x} = -fx - r\dot{x}. \quad (4)$$

(i) Zeichne das Phasenportrait in der (x, \dot{x}) -Ebene für die Anfangsbedingung $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) \in \{0, 1, -1, -2\}$ in den 4 Fällen, wie im Skript, wenn die Dämpfung eine der folgenden ist:

1. $\beta = 0, \alpha \neq 0$
2. $0 < \beta < \alpha$
3. $\beta = \alpha$
4. $\beta > \alpha$

Hier $\beta = \frac{r}{2m}$, $\alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}$. Die Abbildung sollte mit dem Computer angefertigt werden, beispielsweise mit **Matlab**, **Mathematica** oder **Python/Matplotlib**.

(ii) Beschreibe das Verhalten des Systems anhand der Phasenportraits.

Lösung. (i) Die Lösung für $x(t)$ kann dem Skript entnommen werden (mit $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$):

$$\alpha \neq \beta \quad : \quad x(t) = x(0)e^{-\beta t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) + \dot{x}(0)e^{-\beta t} \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\text{L.25})$$

$$\alpha = \beta \quad : \quad x(t) = x(0)e^{-\beta t} (1 + \beta t) + \dot{x}(0)e^{-\beta t} t. \quad (\text{L.26})$$

Die Ableitung nach der Zeit ergibt:

$$\alpha \neq \beta \quad : \quad \dot{x}(t) = -x(0)e^{-\beta t} \frac{\beta^2 + \omega_0^2}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \dot{x}(0)e^{-\beta t} \left(\cos \omega_0 t - \frac{\beta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (\text{L.27})$$

$$\alpha = \beta \quad : \quad \dot{x}(t) = -x(0)e^{-\beta t} \beta^2 t + \dot{x}(0)e^{-\beta t} (1 - \beta t). \quad (\text{L.28})$$

Die zu betrachtenden Fälle sind (1) $\beta = 0$, (2) $0 < \beta < \alpha$, (3) $\beta = \alpha$, (4) $\beta > \alpha$. Ein Python-Programm findet sich auf der nächsten Seite, die Ausgabe in Abb. 2.

(ii) Die Fälle sind:

- (1) In diesem Fall oszilliert das System ungedämpft. Das Phasenportrait ist also eine geschlossene Kurve.
- (2) In diesem Fall ist die Oszillation schwach gedämpft. Es gibt also einen Ausschlag über den Gleichgewichtspunkt hinaus.
- (3) In diesem Grenzfall gibt es für $\dot{x}(0) = 0$ gerade keinen Ausschlag über den Gleichgewichtspunkt hinaus. Bei entsprechender Anfangsgeschwindigkeit schlägt das System über den Gleichgewichtspunkt hinaus aus, kehrt dann aber vom Umkehrpunkt ohne weitere Oszillationen zur Gleichgewichtslage zurück.
- (4) In diesem Fall ist der Abfall der Geschwindigkeit schneller, jedoch ist die Rückkehr zum Gleichgewichtspunkt langsam (nicht im Phasenportrait zu erkennen).

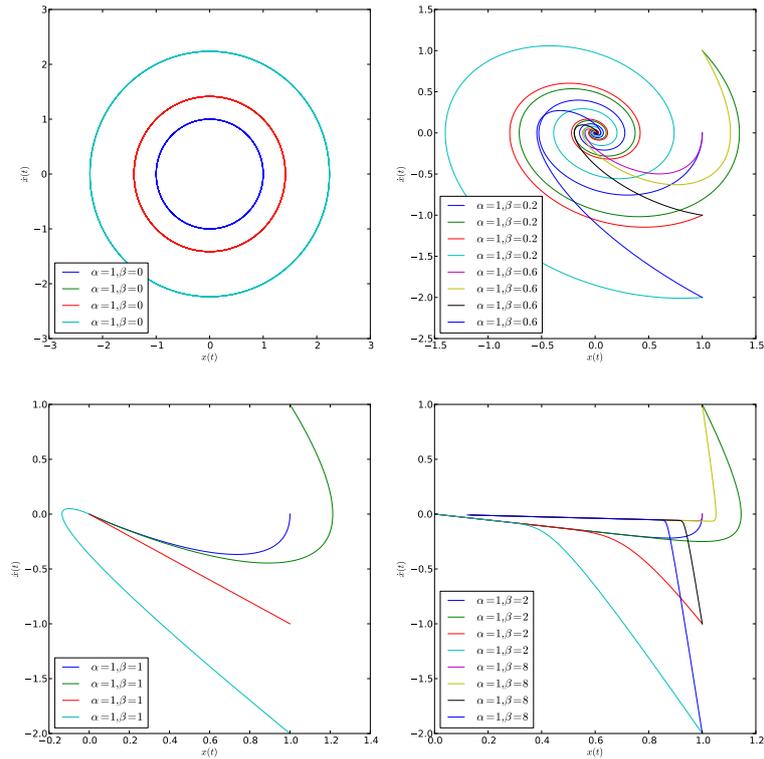


Abbildung 2: Phasenportraits.

```

import math as m, numpy as np, matplotlib.pyplot as plt

def plot(alpha, beta, x0, dx0, tmax):
    if alpha != beta:
        w0 = np.sqrt(complex(alpha*alpha-beta*beta))
        x = lambda t, x0, dx0: x0*np.exp(-beta*t)*(np.cos(w0*t)+beta/w0*np.
            sin(w0*t)) + dx0*np.exp(-beta*t)*1/w0*np.sin(w0*t)
        dx = lambda t, x0, dx0: -x0*np.exp(-beta*t)*(beta*beta+w0*w0)/w0*np.
            sin(w0*t) + dx0*np.exp(-beta*t)*(np.cos(w0*t) - beta/w0*np.sin(
            w0*t))
    else:
        x = lambda t, x0, dx0: x0*np.exp(-beta*t)*(1+beta*t) + dx0*np.exp(-
            beta*t) * t
        dx = lambda t, x0, dx0: -x0*np.exp(-beta*t)*beta*beta*t + dx0*np.exp
            (-beta*t)*(1-beta*t)

    t = np.linspace(0, tmax, 1000)
    lines = plt.plot(np.real(x(t, x0, dx0)), np.real(dx(t, x0, dx0)))
    plt.xlabel("$x(t)$")
    plt.ylabel("$\dot{x}(t)$")
    lines[0].set_label("$\alpha = %s, \beta = %s$" % (alpha, beta))

tmax = 10*m.pi
plt.figure(figsize=(16,16))

dx0 = [0,1,-1,-2]

plt.subplot(221)
[plot(1,0,1,dx0_,tmax) for dx0_ in dx0]
plt.legend(loc=3)

plt.subplot(222)
[plot(1,0.2,1,dx0_,tmax) for dx0_ in dx0]
[plot(1,0.6,1,dx0_,tmax) for dx0_ in dx0]
plt.legend(loc=3)

plt.subplot(223)
[plot(1,1,1,dx0_,tmax) for dx0_ in dx0]
plt.legend(loc=3)

plt.subplot(224)
[plot(1,2,1,dx0_,tmax) for dx0_ in dx0]
[plot(1,8,1,dx0_,tmax) for dx0_ in dx0]
plt.legend(loc=3)

plt.savefig("phasenportrait.pdf")
plt.show()

```