Allgemeine Mechanik
Musterlösung 4.

Übung 1. *Streuquerschnitt für abstossende Zentralkraft*

Betrachte die Streuung eines Teilchens der Energie $E > 0$ in einem abstossenden Zentralkraftfeld

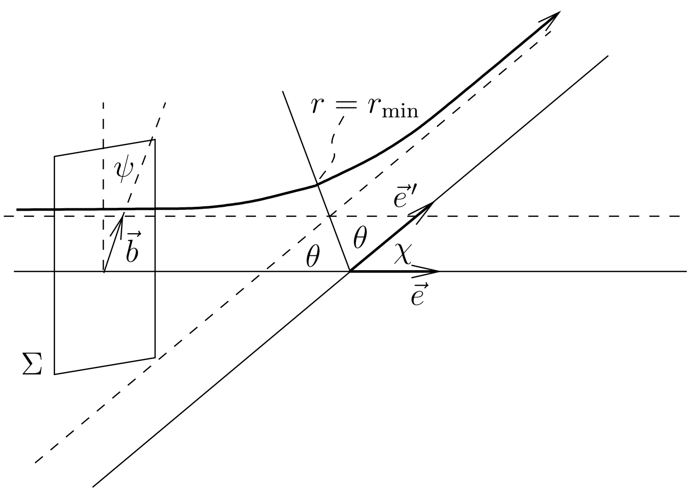
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{C}{r^4}\boldsymbol{x}\,, \tag{1}$$

wobei $C = const$ und $r = |\boldsymbol{x}|$, wie unten abgebildet.

(i) Berechne den Streuwinkel $\chi = \pi - 2\theta$ als Funktion des Stossparameters b.

(ii) Leite daraus den differentiellen Streuquerschnitt her:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \frac{C}{2\pi E}\frac{1-x}{x^2(2-x)^2\sin(\pi x)}\,, \quad (x = \chi/\pi)\,.$$



Hinweise: Siehe Kapitel 2.1 im Skript, insbesondere den Abschnitt 2.1.4 über Streubahnen. Nützlich sind auch die folgenden Tatsachen:

(i) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1-t^{-2}}} = \frac{\pi}{2}$,

(ii) $x(2-x) = 1-(1-x)^2$.

Lösung. Der gegebenen Kraft entspricht das Potential $V(r) = C/(2r^2)$.

(i) Nach der Abbildung und Gleichung (2.1.20) beträgt allgemein der Streuwinkel $\chi = \pi - 2\theta$, wobei

$$\theta(b) = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1 - V(r)/E - b^2/r^2}}\,. \tag{L.1}$$

In unserem Fall beträgt der obige Radikant $1-(C/(2E)+b^2)/r^2$. Er verschwindet genau dann, wenn die radiale kinetische Energie des Teilchens verschwindet, was den Umkehrpunkt $r=r_{\min}$ bestimmt:

$$r_{\min}^2 = \frac{C}{2E} + b^2 \,. \tag{L.2}$$

Somit ist

$$\theta(b) = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-r_{\min}^2/r^2}} = \frac{b}{r_{\min}} \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1-t^{-2}}}}_{=:I} \,. = \frac{b}{\sqrt{b^2+C/(2E)}} I \tag{L.3}$$

mit der Substitution $t := r/r_{\min}$. Für $C=0$ ist das Teilchen frei. Die Bahnkurven sind also Geraden, d.h. $\theta=\pi/2$, also $I=\pi/2$. So ergibt sich

$$\chi(b) = \pi - 2\theta = \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2E}b}{\sqrt{2Eb^2+C}}\right) \,. \tag{L.4}$$

(ii) Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi}{\partial b} &= -\pi\sqrt{2E}\left(\frac{1}{\sqrt{2Eb^2+C}} - \frac{1}{2}\frac{b\cdot 4Eb}{(2Eb^2+C)^{3/2}}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2E}C}{(2Eb^2+C)^{3/2}} & \text{(L.5)} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} &= \frac{b}{\sin(\chi)}\left|\left(\frac{\partial\chi}{\partial b}\right)^{-1}\right| = \frac{b}{\sin(\pi x)}\frac{(2Eb^2+C)^{3/2}}{\pi\sqrt{2E}C} \,. & \text{(L.6)} \end{aligned}$$

Mit

$$1-x = \frac{\sqrt{2E}b}{\sqrt{2Eb^2+C}} \,, \qquad x(x-2) = 1-(1-x)^2 = \frac{C}{2Eb^2+C} \,, \tag{L.7}$$

stimmt dies mit der Behauptung überein.

Übung 2. *Virialsatz und Wasserstoffatom*

Wir betrachten ein System von N Massepunkten, deren Kräfte einem Potentialgesetz genügen,

$$m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = -\nabla_i V(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \ . \tag{2}$$

Wir wollen in dieser Aufgabe den Virialsatz beweisen, der einen Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Mittelwert der kinetischen Energie der Teilchen und dem Kraftfeld herstellt. Dieser besagt, dass, sofern alle $\mathbf{x}_i$ und $\dot{\mathbf{x}}_i$ im Verlauf der Zeit endlich bleiben,

$$2\bar{E}_{\mathrm{kin}} = -\overline{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i} \tag{3}$$

gilt, beziehungsweise für ein System mit Potentialgesetz wie oben:

$$2\bar{E}_{\mathrm{kin}} = \overline{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V}, \tag{4}$$

wobei der zeitliche Mittelwert definiert ist durch

$$\bar{E}_{\mathrm{kin}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt E_{\mathrm{kin}}(t) \ . \tag{5}$$

Gehe dazu wie folgt vor:

(i) Beweise, dass die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2$ die Gleichung

$$2E_{\text{kin}} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i\Big) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V \tag{6}$$

erfüllt.

(ii) Zeige den Virialsatz (4) unter der Annahme, dass $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i$ für alle Zeiten beschränkt ist.

(iii) Betrachte nun das Zweikörperproblem mit reduzierter Masse μ und Relativpotential

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r} , \tag{7}$$

wobei wir zunächst das Keplerproblem behandeln, für das $\kappa = GM_0 m$ ist. Unter Benutzung des 3. Kepler'schen Gesetzes, Gl. (2.2.12) aus dem Skript, sowie des Viralsatzes (der direkt aus (ii) folgt) zeige, dass

$$\oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = \kappa\,\pi \sqrt{\frac{-2\,\mu}{E}} . \tag{8}$$

Hierbei wird das Integral einmal entlang der geschlossenen Bahn ausgewertet.

Hinweise:

(1) Benutze Teil (ii) um für dieses Potential den eigentlichen Virialsatz abzuleiten, nämlich

$$\bar{E}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}\bar{E}_{\text{pot}} . \tag{9}$$

(2) Beobachte, dass

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x} = \oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta .$$

(3) Benutze die Ellipserelationen aus dem Skript, um zu zeigen, dass $a = -\frac{GMm}{2\,E}$.

(iv) Gemäss der Sommerfeld'schen Quantisierungsbedingung sind die Integrale

$$\oint p_r dr = n_r\, h , \qquad \oint p_\theta d\theta = n_\theta\, h \tag{10}$$

quantisiert, wobei h das Plank'sche Wirkungsquant ist, und n_r, n_θ positive ganze Zahlen sind. Im Fall des Wasserstoffatoms ist $\kappa = e^2$. Zeige damit für das Energiespektrum des Wasserstoffatoms

$$E = -\frac{m_e\, e^4}{2\hbar^2\,(n_r + n_\theta)^2} , \tag{11}$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Lösung.

(i)

$$\begin{aligned}
2\,E_{kin} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i\right) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\underbrace{\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{p}_i\Big)}_{=-\nabla_i V} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{p}_i \cdot \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{x}_i\Big)\right) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 \ .
\end{aligned}$$

(ii) Da die Summe $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i$ für alle Zeiten beschränkt ist, wissen wir dass

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t: \quad \Big|\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i(t) \cdot \mathbf{x}_i(t)\Big| \leq A \ .$$

Damit können wir zeigen dass der erste Term null ist,

$$\begin{aligned}
\left|\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i\right)\right| &= \left|\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i(T) \cdot \mathbf{x}_i(T) - \mathbf{p}_i(-T) \cdot \mathbf{x}_i(-T)\right)\right| \\
&\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(\Big|\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i(T) \cdot \mathbf{x}_i(T)\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i(-T) \cdot \mathbf{x}_i(-T)\Big|\right) \\
&\leq \lim_{T\to\infty} \frac{A}{T} = 0
\end{aligned}$$

Der zeitliche Mittelwert ist jetzt

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\text{kin}} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt E_{\text{kin}}(t) \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i\right)}_{=0} + \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V \\
&= \frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V} \ .
\end{aligned} \tag{L.8}$$

(iii) Wir wissen dass

$$2\,T\,\bar{E}_{\text{kin}} = 2\int_0^T E_{\text{kin}} dt = m \int_0^T \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = \oint \mathbf{p} d\mathbf{x} = \oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta \ , \tag{L.9}$$

wobei wir benutzt haben, dass $2E_{\text{kin}} dt = m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = m\dot{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}$ ist. Diese Gleichung gilt für beliebige T; allerdings ist das Linienintegral nur geschlossen, falls T (ein Vielfaches der) Periode ist.

Für das Potential $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$ folgt nun aus eq. (10), dass

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,\overline{\mathbf{x} \cdot \nabla V} = \frac{1}{2}\, r\,\overline{\frac{\kappa}{r^2}} = -\frac{1}{2}\,\overline{V} = -\frac{1}{2}\bar{E}_{\text{pot}} \ . \tag{L.10}$$

Wegen Energieerhaltung gilt also

$$E = \bar{E}_{\text{kin}} + \bar{E}_{\text{pot}} = -\bar{E}_{\text{kin}} \; .$$

Einsetzen in (L.9) führt dann zu

$$\oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = -2\,E\,T = -4\pi E\sqrt{\frac{\mu}{GMm}}a^{3/2} \; , \tag{L.11}$$

wobei wir nun über eine Periode integrieren und in der letzten Zeile Gl. (2.2.12) aus dem Skript (das 3. Kepler'sche Gesetz) benutzt haben.

Es bleibt die grosse Halbachse a mit der totalen Energie zu verknüpfen. An den Extremen der Ellipse ist die radiale Geschwindigkeit $\dot{r}$ gleich null. Aus Gl. (2.1.10) im Skript folgt, dass

$$E = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r} \quad \to \quad r^2_{\text{min/max}} + \frac{GMm}{E} r_{\text{min/max}} - \frac{l^2}{2\mu\,E} = 0 \; . \tag{L.12}$$

Andererseits folgt aus Gl. (2.2.7) im Skript, dass Minimum und Maximum gerade durch

$$r_{\text{min}} = \frac{d}{1-\epsilon} \; , \qquad r_{\text{max}} = \frac{d}{1+\epsilon} \tag{L.13}$$

gegeben sind, also ist

$$r_{\text{min}} + r_{\text{max}} = \frac{2d}{1-\epsilon^2} = 2a \; , \tag{L.14}$$

wobei wir $d = a(1-\epsilon^2)$ benutzt haben. Also gilt

$$a = -\frac{GMm}{2\,E} \tag{L.15}$$

Einsetzen in Gleichung (L.11) führt dann zu

$$\oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = G\,M\,m\,\pi\,\sqrt{\frac{-2\,\mu}{E}}$$

(iv) Folgt durch direktes Einsetzen:

$$(n_r + n_\theta)\,h = k_e\,e^2\,\pi\,\sqrt{\frac{-2\,m_e}{E_n}} \implies E = -\frac{m_e\,e^4}{2\hbar^2\,(n_r + n_\theta)^2} \; . \tag{L.16}$$

Übung 3. *Gravitationskraft ausgedehnter Körper*

Zeige, dass die von einem sphärisch symmetrischen Körper mit Gesamtmasse M ausgehende Gravitationskraft auf einen Massepunkt m (der sich ausserhalb des Körpers befindet[1]) gleich ist wie die einer Punktmasse M im Zentrum des Körpers.

Lösung. Für sphärisch symmetrische Körper können wir die Masseverteilung als konstant auf Schalen mit Radius r' betrachten, und bezeichnen diese Flächendichte mit σ, sodass die Masse auf einer Schale durch

$$dM = 4\pi r'^2 \sigma \tag{L.17}$$

[1] Masse, die sich sphärisch symmetrisch verteilt weiter weg vom Zentrum als der Massepunkt m befindet, hebt sich in ihrer Wirkung auf m gegenseitig auf — dies kann mit einer ähnlichen Rechnung gezeigt werden.

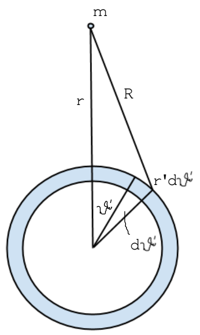


Abbildung 1: Skizze zur Masseverteilung

gegeben ist. Wir schreiben deshalb das Potential, das von einem Flächenelement dS' auf einer solchen Schale ausgeht, als

$$d\Phi_S = -G\sigma \frac{dS'}{R}, \tag{L.18}$$

wobei G die Gravitationskonstante und R den Abstand des angezogenen Massepunkts vom Flächenelement bezeichnet.

Wir wissen weiterhin, dass

$$dS' = 2\pi r'^2 \sin\theta' d\theta' \tag{L.19}$$

und wegen dem Kosinussatz

$$R = \left[r^2 - 2rr' \cos\theta' + r'\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{L.20}$$

wobei r den Abstand zwischen Zentrum der Masseverteilung und angezogenem Massepunkt bezeichnet. Wir wollen im Folgenden eine Integration über eine Kugelschale vornehmen. Es ist dann allerdings nützlich, statt dem Winkel θ' die Integrationsvariable

$$dR = \left[r^2 - 2rr' \cos\theta' + r'\right]^{-\frac{1}{2}} rr' \sin\theta' d\theta' \tag{L.21}$$

$$= rr' \sin\theta \frac{d\theta'}{R} \tag{L.22}$$

zu betrachten.

Wir können nun berechnen:

$$\Phi_S = -\frac{GdM}{2} \int_0^\pi \sin\theta' \frac{d\theta'}{R} \tag{L.23}$$

$$= -\frac{GdM}{2rr'} \int_{R=r-r'}^{R=r+r'} dR \tag{L.24}$$

$$= -\frac{GdM}{2rr'} R|_{R=r-r'}^{R=r+r'} \tag{L.25}$$

$$= -\frac{GdM}{r}. \tag{L.26}$$

Damit ist gezeigt, dass das von der Kugelschale erzeugte Potential, das auf einen Massepunkt m wirkt, das gleiche ist wie ein Potential erzeugt von einem Massepunkt dM im Zentrum des sphärisch symmetrischen Körpers. Wenn wir nun über alle Schalen des Körpers integrieren, folgt das gewünschte Resultat für die Gravitationskraft.