Übung 1. *Bewegungsgleichung mit Scheinkräften*

Bezüglich des Inertialsystems S bewege sich ein freies Teilchen gleichförmig entlang der Bahn $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}t$, wobei $\boldsymbol{v} = (0, v_0, 0)$. Berechne die Bewegung dieses Teilchens aus der Perspektive eines relativ zu S gedrehten Koordinatensystems S', wobei

$$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} \qquad\qquad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Betrachte dazu die beiden Fälle, (i) $\phi = \phi_0$ konstant, und (ii) $\phi = \omega t$, wobei ω konstant ist. Im zweiten Fall, zeige, dass die resultierende Bahnkurve in S' die Bewegungsgleichungen (inkl. Scheinkräfte) löst.

Lösung. Wir können annehmen, dass $\boldsymbol{x}(t = 0) = 0$. Damit finden wir für die Bewegung des Teilchens in dem Bezugssystem S':

$$\boldsymbol{x}'(t) = v_0 t \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{L.1}$$

Für den Fall (i), wo $\phi = \phi_0$, ist die Bewegung weiterhin linear, und für $\phi = \omega t$ entspricht sie einer Archimedischen Spirale, da der Abstand vom Beobachter ($v_0 t$) gleichsam linear in t zunimmt wie der Winkel (ωt).

Im ersten Fall bleibt die Bewegungsgleichung unverändert $\ddot{\boldsymbol{x}}' = 0$ und im Fall des rotierenden Bezugssystems erhalten wir

$$\ddot{\boldsymbol{x}}' = -\omega^2 \boldsymbol{x}' + 2\dot{R}\boldsymbol{v}. \tag{L.2}$$

Übung 2. *Foucault'sches Pendel*

Betrachte ein Foucault'sches Pendel mit Fadenlänge l an einem Ort mit geographischer Breite ϕ. Die Beschreibung des Pendels soll wie im Kapitel *Freier Fall auf der Erdoberfläche* der Vorlesung im Koordinatensystem mit Ursprung P und Koordinatenachsen $\boldsymbol{y}$ erfolgen.

(i) Zeige, dass die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ des Massenpunktes zu führender Ordnung in $\omega \ll \sqrt{g/l}$

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = -\frac{g}{l}\boldsymbol{y} + 2\omega\sin\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}$$

ist, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation sei.

(ii) Für $t = 0$ sei $\dot{\boldsymbol{y}} = 0$. Wie gross ist die Periode τ des Pendels? ($\tau/2 > 0$ ist die kleinste Zeit für die gilt $\dot{\boldsymbol{y}}(\tau/2) = 0$). Wovon hängt diese ab?

(iii) Sei die Anfangsbedingung wie in (ii). Mit welcher Periode dreht sich das Pendel in der Schwingungsebene? Wovon hängt diese ab?

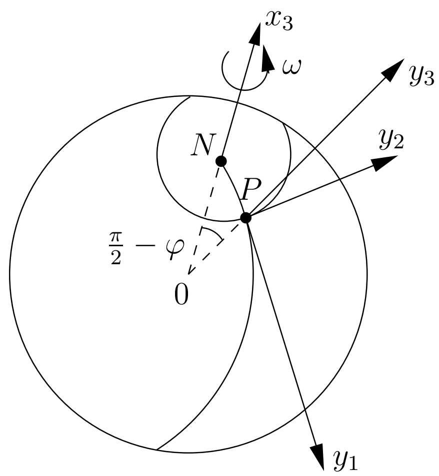

Abbildung 1: Darstellung des $\boldsymbol{y}$-Koordinatensystems für das Foucault'sches Pendel.

Anleitung: Starte mit den Bewegungsgleichungen eines frei fallenden Körpers im erdfesten Koordinatensystem $(P, \boldsymbol{y})$ (gemäss Vorlesung). Die Gravitation kann im gegebenen Fall als homogen angenommen werden, und die Bewegung der Erde um die Sonne wird vernachlässigt. Füge die Zwangskraft des Fadens hinzu und entwickle diese zur ersten Ordnung im Auslenkungswinkel α.

Fasse die zwei Variablen (y_1, y_2) mittels der komplexen Grösse $\zeta = y_1 + iy_2$ zusammen, und löse die resultierende Differentialgleichung, welche Ähnlichkeiten mit einer gedämpften Oszillatorgleichung aufweist. Nutze einen geeigneten Ansatz. Die Ergebnisse der Teilaufgaben (ii) und (iii) sind unabhängig von den Anfangsbedingungen.

Lösung.

(i) Ausgehend von Gleichung 1.7.17 aus dem Skript und hinzufügen der linearisierten Pendelkräfte $-g\boldsymbol{y}/l$ (für kleine Auslenkungen ist $\alpha = |\boldsymbol{y}|/l$ Auslenkungswinkel in Richtung $\hat{\boldsymbol{y}}$) in der Schwingungsebene wird die gesuchte Gleichung sofort erhalten.

(ii-iii) Die Differentialgleichung in komplexer Form $\zeta = y_1 + iy_2$ lässt sich schreiben als

$$\ddot{\zeta} = -\frac{g}{l}\zeta - 2i\omega_\phi\dot{\zeta} \tag{L.3}$$

mit $\omega_\phi = \omega\sin(\phi)$. Man überzeugt sich schnell, dass der Ansatz $\zeta = ae^{i\beta t}$ zwei mögliche Frequenzen

$$\beta = -\omega_\phi \pm \sqrt{\omega_\phi^2 + g/l} \tag{L.4}$$

zulässt. Mit den Anfangsbedingungen $\zeta(0) = \zeta_0$ und $\dot{\zeta}(0) = 0$ finden wir nach einigen Rechenschritten

$$\zeta = \zeta_0 e^{-i\omega_\phi t}\Big[\cos(\sqrt{\omega_\phi^2 + g/l}\ \ t) + i\frac{\omega_\phi}{\sqrt{\omega_\phi^2 + g/l}}\sin(\sqrt{\omega_\phi^2 + g/l}\ \ t)\Big]. \tag{L.5}$$

In guter Näherung kann der Sinus-Term vernachlässigt werden und die Lösung wird

$$\zeta = \zeta_0 e^{-i\omega_\phi t} \cos(\sqrt{\omega_\phi^2 + g/l}\ t). \tag{L.6}$$

Daraus lässt sich sofort die Schwingperiode (ii)

$$\tau = 2\pi/\sqrt{\omega_\phi^2 + g/l} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{L.7}$$

und die Rotationsperiode (iii)

$$T = 2\pi/\omega_\phi \tag{L.8}$$

des Pendels ablesen. Im Gegensatz zu τ hängt die Rotationsperiode weder von der Länge des Pendels noch von der Erdbeschleunigung g (und somit von der Erdmasse) ab.

Übung 3. ***Raketen***

Raketen werden durch den Impuls der ausgestossenen Gase angetrieben. Da diese Gase Reaktionsprodukte des Treibstoffes sind, ist die Masse der Rakete nicht konstant, sondern nimmt im selben Mass ab, wie der Treibstoff verbraucht wird.

(i) Wie modifiziert sich die Bewegungsgleichung $\dot{v}(t) = -g$ für eine Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes) senkrecht nach oben geschossen wird und dabei Gase mit einer Geschwindigkeit v_{Gas} (relativ zur Rakete) ausstösst.

(ii) Integriere diese Gleichung und bestimme damit v als Funktion der Zeit t, wobei der Massenverlust proportional zur Zeit sein soll.

(iii) Für eine gegebene Austrittsgeschwindigkeit v_{Gas}, bestimme ein Kriterium welches entscheidet, ob die Rakete überhaupt abheben wird.

Lösung.

(i) Mit dem Verlust der Masse wird die Bewegungsgleichung zu

$$m(t)\dot{v}(t) = -gm(t) - v_{\mathrm{Gas}}\dot{m}(t) \tag{L.9}$$

(ii) Die Masse der Rakete vor dem Start sei m_0, und der Treibstoffausstoss sei gegeben durch $\dot{m}(t) = -m_0/\tau$. Somit hat die Rakete bei $t = \tau_G < \tau$ den gesamten Treibstoff verbraucht.
Die Differentialgleichung wird nun

$$\dot{v} = -g + \frac{v_{\mathrm{Gas}}}{\tau - t} \tag{L.10}$$

Wir finden für $v(0) = 0$, mittels einfacher Integration

$$v(t) = v_{\mathrm{Gas}} \log\left(\frac{\tau}{\tau - t}\right) - gt \tag{L.11}$$

(iii) Damit die Rakete abhebt muss $\dot{v}(0) > 0$ gelten. Dies erfordert, dass

$$\frac{v_{\mathrm{Gas}}}{\tau} > g \tag{L.12}$$

Die typische Rate $1/\tau$, bei welcher die Rakete ihre Masse verliert, ist somit unabhängig von der Masse der Rakete.