Allgemeine Mechanik
Übungsblatt 6.

HS 2013
Prof. R. Renner

Übung 1. *Stabilität von Gleichgewichtslagen*

Zeige, dass eine Gleichgewichtslage $\mathbf{x}_0$ eines geladenen Teilchens (Ladung e, Masse m) in einem äusseren, *zeitlich konstanten* elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, d.h. $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, im Vakuum instabil ist.

Hinweise:

(i) Es gilt $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, wobei das elektrische Potential ϕ die Poisson Gleichung $\Delta\phi = 0$ erfüllt.

(ii) Schreibe die linearisierte Bewegungsgleichung um den Punkt $\mathbf{x}_0$ in der Form $\dot{\mathbf{z}} = A\,\mathbf{z}$ (vgl. Kapitel 4.1 Skript).

(iii) Die Hesse-Matrix des Potentials $H_{ij}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ ist diagonalisierbar. Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren von A in Abhängigkeit vom Eigenspektrum der Hesse-Matrix.

(iv) Sei M eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\{\lambda_k\}$ und Eigenvektoren $\{\xi_k\}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -M & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Zeige: Dann sind die Eigenwerte von A gerade $\mu_k^{\pm} = \pm i\sqrt{\lambda_k}$ und die dazugehörigen Eigenvektoren $\{(\xi_k, \mu_k^{\pm}\xi_k)\}$.

(v) Zum Beweis der Instabilität nehme vereinfachend an, dass die Hesse-Matrix des Potentials ungleich Null ist. Dies entspricht der Annahme, dass die Störung der Gleichgewichtslage in führender Ordnung linear ist.

Übung 2. *Koordinatenunabhängingkeit der Euler-Lagrange Gleichungen*

Sei $\gamma(t) = \{(t, \mathbf{q}) : \mathbf{q} = \mathbf{q}(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ eine Kurve in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Weiter sei $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ die Funktion von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für welche das Funktional $\Phi = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$ die Länge der Kurve angibt.

(a) Welche Form nimmt das Funktional Φ in kartesischen Koordinaten an? Welche in Polarkoordinaten?

(b) Gib die Euler-Lagrange Gleichungen in beiden Koordinatensystemen an.

(c) Löse die Differentialgleichungen in beiden Koordinatensystemen und zeige, dass die Lösungen gleich sind.

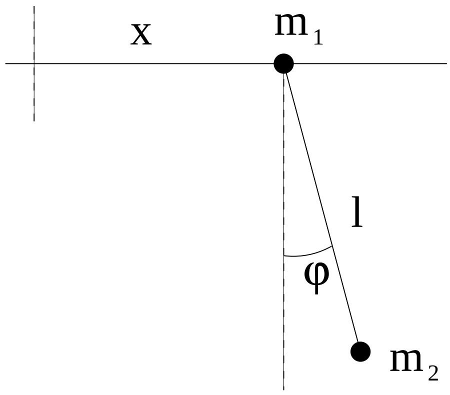

Abbildung 1: Ebenes Pendel

Übung 3. ***Lagrangefunktion im homogenen Schwerefeld***

Abbildung 1. zeigt ein ebenes Pendel mit Masse m_2 im homogenen Schwerefeld, wobei sich der Aufhängungspunkt (der selbst die Masse m_1 besitzt) entlang einer horizontalen Geraden bewegen kann.

(a) Finde die Lagrangefunktion.

Hinweis. Drücke die kartesischen Koordinaten der Masse m_2 durch die x-Koordinate der Masse m_1 und den Winkel φ aus.

(b) Bestimme die Bewegungsgleichung und linearisiere sie.

(c) Bestimme die Lösung der linearisierten Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit der allgemeinen Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Interpretiere die Lösung.