Blatt IX

Abgabe: 22.11.2012

Aufgabe 1 [*Legendretransformation*]: Sei $f(x)$ eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f''(x) > 0$ (strikt konvex) oder $f''(x) < 0$ (strikt konkav). Die Legendretransformation von $f(x)$ ist durch

$$(\mathcal{L}f)(y) = y\,\xi(y) - f(\xi(y))$$

definiert, wobei $\xi(y) = (f')^{-1}(y)$, d.h. $y = f'(\xi(y))$.

(i) Berechne die Legendretransformierte für die Funktionen

$$f_1(x) = e^x \ , \qquad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{a^2}{4} \ .$$

(ii) Zeige, dass für eine strikt konvexe Funktion f die Legendretransformierte die Eigenschaft

$$(\mathcal{L}f)''(y) > 0$$

besitzt, wobei hier die beiden Ableitungen bezüglich y genommen werden.

(iii) Wegen (ii) kann man also die Legendretransformierte von $\mathcal{L}f$ bilden. Zeige, dass für eine strikt konvexe Funktion die Legendretransformation eine Involution ist, d.h. dass $\mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$. (Bemerkung: Dies gilt ebenso für eine strikt konkave Funktion.)

Aufgabe 2 [*Harmonischer Oszillator*]: Der harmonische Oszillator beschreibt ein Teilchen der Masse $m = 1$, das sich in einer Dimension unter dem Einfluss des Potentials $V(q) = \frac{1}{2}q^2$ bewegt.

(i) Bestimme die Lagrangefunktion des Systems und leite daraus die Hamiltonfunktion ab.

(ii) Falls p den zu q konjugierten Impuls bezeichnet, zeige, dass die Transformation

$$q = \sqrt{2P}\sin Q\,, \qquad p = \sqrt{2P}\cos Q$$

eine kanonische Transformation definiert.

(iii) Bestimme die Hamiltonfunktion als Funktion von P und Q. Finde $Q(t)$ und $P(t)$.

Aufgabe 3 [*Zeitabhängige kanonische Transformationen*]: Für ein Hamiltonsches System sind die Bewegungsgleichungen

$$\sum_{k=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial x_i}\,, \tag{1}$$

wobei x die $2f$ Phasenraumkoordinaten bezeichnet, und $H(x,t)$ die Hamiltonfunktion ist. Wir betrachten eine zeitabhängige kanonische Transformation

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2f}, t)\,,$$

d.h. eine Transformation, für die die partiellen Ableitungen $A_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}$ eine symplektische Abbildung definiert, also

$$\sum_{ik} A_{ij}\, \varepsilon_{ik}\, A_{kl} = \epsilon_{jl}\ . \tag{2}$$

Zeige, dass die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten $\bar{x}$ wiederum kanonisch sind,

$$\sum_{k=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \dot{\bar{x}}_k = \frac{\partial K}{\partial \bar{x}_i}\,, \tag{3}$$

wobei allerdings die Hamiltonfunktion $K(\bar{x},t)$ angepasst werden muss.

Hinweise: (i) Zeige, ausgehend von (1), dass

$$\sum_{k=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \dot{\bar{x}}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}_i} + f_i(\bar{x},t)\,,$$

wobei $\bar{H}(\bar{x},t) = H(x,t)$ und $f_i(\bar{x},t)$ zu bestimmen ist.

(ii) Verifiziere, dass f_i die Integrabilitätsbedingung $\partial f_i/\partial \bar{x}_j = \partial f_j/\partial \bar{x}_i$ erfüllt. Dies garantiert, dass eine Funktion g exisitiert, für die $f_i = \partial g/\partial \bar{x}_i$. (Benutze hierfür, dass die partielle zeitliche Ableitung von Gl. (2) verschwindet.)