Blatt X

`Abgabe: 29.11.2012`

Aufgabe 1 [*Erhaltungsgrössen*]:

(i) Zeige, dass $\partial F/\partial t$ eine Konstante der Bewegung sein muss, wenn die Hamilton-Funktion H und F Erhaltungsgrössen sind.

(ii) Zur Veranschaulichung dieses Ergebnisses betrachten wir die gleichförmige Bewegung eines freien Teilchens der Masse m. Die Hamilton-Funktion bleibt sicher erhalten, und es existiert eine Konstante der Bewegung

$$F = x - \frac{pt}{m}.$$

Zeige durch direkte Berechnung, dass die Erhaltungsgrösse $\partial F/\partial t$ mit $\{H, F\}$ übereinstimmt.

Aufgabe 2 [*Virialsatz*]: Seien $q, p \in \mathbb{R}^f$ die Phasenkoordinaten eines mechanischen Systems mit Hamiltonfunktion $H = T + V$, mit kinetischem Anteil $T = p^2/2$ und einem Potential $V(\alpha q) = \alpha^{-n} V(q)$, homogen vom Grad $-n$.

(i) Zeige, dass $F = p \cdot q = \sum_{i=1}^{f} p_i q^i$ den kanonischen Fluss

$$\Phi^\lambda : (q, p) \mapsto (e^\lambda q, e^{-\lambda} p)$$

erzeugt.

Hinweis: In Kapitel 6.6 im Skript wird eine Beziehung zwischen einer Funktion F und dem durch F erzeugten Fluss hergestellt.

(ii) Leite daraus die Gleichung $\{F, H\} = 2T + nV$ her.

(iii) Beweise, dass für gebundene Bahnen (entlang derer $q(t)$ und $p(t)$ beschränkt sind) folgt

$$2\overline{T} + n\overline{V} = 0,$$

wobei der Mittelwert der Grösse $A(q, p)$ entlang der Bahn $(q(s), p(s))$ durch

$$\overline{A} \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} A\big(q(s), p(s)\big)\, ds$$

definiert ist.

(iv) Zeige, dass für $n = 2$ nur gebundene Bahnen zur Energie $E = 0$ existieren. Zeige weiter, dass für $n \neq 2$ gebundene Bahnen folgende Eigenschaft erfüllen (Virialsatz)

$$\overline{V} = \frac{2}{2-n}E, \qquad \overline{T} = -\frac{n}{2-n}E.$$

Berechne die Werte für harmonische und gravitative Potentiale $V(q)$.

(v) Wir betrachten den Fall $0 < n < 2$. Zeige, dass es nur für negative Energien, $E < 0$, gebundene Bahnen geben kann.

Aufgabe 3 [*Runge-Lenz-Vektor*]: Wir beschreiben das Keplerproblem durch die verallgemeinerten Lagekoordinaten r, φ, wobei die Lagrangefunktion durch

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{GM\mu}{r}$$

gegeben ist.

(i) Bestimme die Hamiltonfunktion des Systems, wobei zu jeder verallgemeinerten Lagekoordinate r (φ), der zugehörige konjugierte Impuls p (p_φ) sei.

(ii) Der Runge-Lenz-Vektor ist durch

$$\boldsymbol{A} = \mu\,\dot{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{L} - GM\mu^2\frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

definiert. Drücke $\boldsymbol{A}$ durch die verallgemeinerten Koordinaten $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ aus.

Hinweis: Der Drehimpulsvektor $\boldsymbol{L}$ steht senkrecht zur Bahnebene ($\boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{e}_z$) und hat die Länge $|\boldsymbol{L}| = \mu r^2\dot{\varphi}$. Arbeite in der Basis $\boldsymbol{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ und $\boldsymbol{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ in zylindrischen Koordinaten, und schreibe $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{e}_r$ sowie $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$.

(iii) Berechne A_x und zeige, dass es eine Erhaltungsgrösse ist, d.h. $\{A_x, H\} = 0$.

(iv) Finde die zu A_x gehörende Symmetrie in Differentialform, d.h. bestimme das Differentialgleichungssystem der Form

$$\frac{dq^i}{d\lambda} = \frac{\partial A_x}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial A_x}{\partial q^i} \tag{1}$$

für den kanonischen Fluss. Verifiziere explizit, dass

$$\frac{d}{d\lambda}H(q(\lambda), p(\lambda))\bigg|_{\lambda=0} = 0.$$

Also lässt die Transformation $(q,p) \mapsto \big(q(\lambda), p(\lambda)\big)$ aus Gleichung (1) die Hamiltonfunktion invariant.