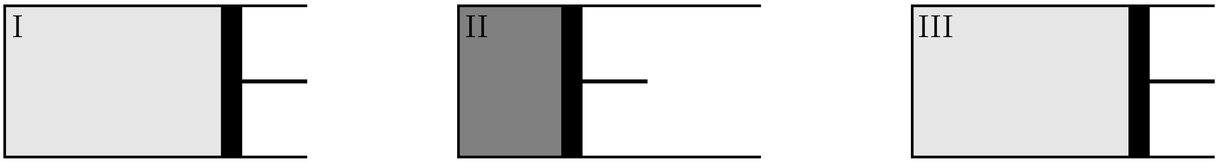
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Thermodynamik
Serie 6

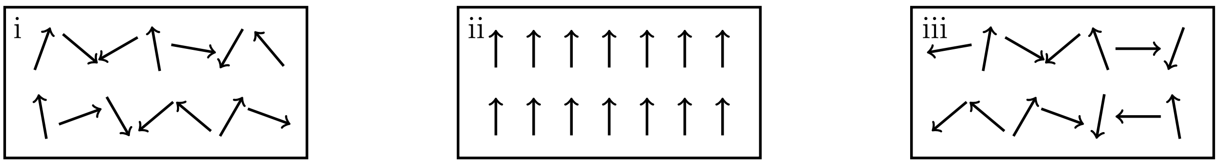
HS 11
Prof. G. Blatter

Aufgabe 6.1 Adiabatische Entmagnetisierung: Der Weg zu Millikelvin

Bei adiabatischen Prozessen ändert sich die Temperatur eines Systems, z.B. kühlt sich ein sich ausdehnendes (ideales) Gas ab. Das analoge Phänomen bei magnetischen Substanzen trägt den Namen magnetokalorischer Effekt: Ein Paramagnet kühlt sich bei der adiabatischen Entmagnetisierung ab. Dadurch können Temperaturen von einigen Millikelvin erreicht werden.



$$T = T_{\text{start}} \xrightarrow{\text{isotherm}} T = T_{\text{start}} \xrightarrow{\text{adiabatisch}} T = T_{\text{end}} < T_{\text{start}}$$



Neben der adiabatischen Zustandsänderung paramagnetischer Stoffe bringt diese Aufgabe auch die Verwendung des Gibbs Potentials (auch "Freie Enthalpie", Skript 5.4) näher. Damit lässt sich die Entropie des Systems auf elegante Art herleiten.

Annahmen: Wie in früheren Übungen sei die Arbeit gegeben durch $\delta w = -H\,dM$ und das Curie Gesetz in der Form $M(T,H) = aH/T$. Ausserdem gelte für die spezifische Wärme (bei $H = 0$)

$$c_H(T, H=0) = T\,\frac{\partial s}{\partial T}\bigg|_H = b/T^2\,,$$

mit positiven, materialabhängigen Konstanten $a, b > 0$.

a) **Gibbs Potential:** Leite für paramagnetische Substanzen das Gibbs Potential $g(T,H)$ aus der inneren Energie $u(s,M)$ her und berechne dessen Differential dg. Welche Maxwell Relation lässt sich aus g ableiten?

b) **Adiabatengleichung**: Benutze das Resultat aus a) um die Entropie $s(T,H)$ des Systems zu berechnen. *Tipp*: Mithilfe der Annahme für die spezifische Wärme $c_H(T,H)$ lässt sich die "Integrationskonstante" bestimmen. Wie ändert sich somit die Temperatur T mit dem Magnetfeld H bei konstanter Entropie s?

c) **Versuchsablauf**: Skizziere den Ablauf für ein ideales Gas (I $\rightarrow$ II $\rightarrow$ III) im $T-v$ Diagramm, bzw. für einen Paramagneten (i $\rightarrow$ ii $\rightarrow$ iii) im $T-H$ Diagramm. Benutze dazu die Entropiegleichungen der jeweiligen Systeme.

d) **Kälterekord**: Wie müssen die Versuchsparameter T, H und die Materialeigenschaften a und b gewählt werden, um die tiefstmögliche Temperatur zu erreichen? Welches sind dabei die limitierenden Faktoren?

Weitere Methoden der Tieftemperaturphysik nutzen Verdampfung oder Mischprozesse:

Kühlmethode	Tiefsttemperatur K
Verdampfungskühlung	$\sim 100\,\mathrm{mK}$
^{3}He-^{4}He-Mischkühlung	$\sim 2\,\mathrm{mK}$
Entmagnetisierung	$\sim 1.5\,\mathrm{mK}$
Kernentmagnetisierung	$\sim 1.5\,\mu\mathrm{K}$
Optische Laserkühlung	$\sim 170\,\mathrm{nK}$

Die tiefsten Temperaturen (einige μK) in Festkörpern werden mit der adiabatischen *Kernentmagnetisierung* erreicht. Dabei werden die magnetischen Momente der Atomkerne (Kupfer) ausgerichtet (anstelle der Momente in der Elektronenschale). Um damit Temperaturen unter einem Millikelvin zu erreichen, sind ein "Bad" bei einigen mK und Magnetfelder im Bereich von einigen Tesla erforderlich. Bei der *optischen Laserkühlung* werden einzelne Ionen in einem optischen Gitter (erzeugt durch Laserinterferenz) gefangen und mittels Laserbestrahlung zur Abstrahlung angeregt.

Aufgabe 6.2 Ausdehnungskoeffizient: Anomalie des Wassers

Der Ausdehnungskoeffizient α bestimmt die Ausdehnung des Mediums bei Erhöhung der Temperatur. Eine interessante Eigenschaft von Wasser ist die Dichteanomalie. Flüssiges Wasser erreicht bei 4°C den dichtesten Zustand:

$$\alpha = -\frac{1}{v}\left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T \gtreqqless 0 \quad \text{für} \quad T \gtreqqless 4°\mathrm{C}\,.$$

Das Vorzeichen des Ausdehnungskoeffizienten α ändert sich also bei dieser Temperatur.

a) **Steigung der Adiabaten**: Anhand des Ausdehnungskoeffizienten können Rückschlüsse über das Vorzeichen der Steigung der Adiabaten im $T-v$ Diagramm gezogen werden. Die Steigung der Adiabaten ist gegeben durch:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial v}\right|_s = -\left.\frac{\partial T}{\partial s}\right|_v \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T \,.$$

Forme diesen Ausdruck um und argumentiere anschliessend mit den Stabilitätsbedingungen (Skript 4.46, S. 36),

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T > 0\,, \qquad\qquad c_v = T\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_v > 0\,,$$

wie die Steigung aussehen muss. Skizziere nun die Form der Adiabaten im $T-v$ Diagramm für Temperaturen über, bei und unter 4°C.

b) **Carnot Prozess mit Wasser**: Weshalb ist es nicht möglich, einen Carnot-Prozess zwischen Wärmebädern bei 2°C und 6°C zu konstruieren? Argumentiere in Worten.

Aufgabe 6.3 Entropie

Mit einem kleinen Ausflug in die statistische Mechanik wollen wir in dieser Aufgabe etwas über die Entropie lernen.

Wir betrachten als Modell einen quadratischen zweidimensionalen Raum. Dieser solle in $L \times L = K$ Kästchen eingeteilt werden. In jedem dieser Kästchen befinden sich n_i Teilchen, bei einer Gesamtteilchenzahl $N = \sum_{i=1}^{K} n_i$.

a) Welche Verteilung $\{n_i\}$ entspricht einer minimalen, welche einer maximalen "Unordnung", d.h. einem maximalen bzw. minimalen Informationsgehalt im System?

b) Zeige, dass für eine gegebene Verteilung $\{n_i\}$ die Entropie des Systems gegeben ist durch

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{K} n_i \log\left(\frac{n_i}{N}\right). \tag{1}$$

Hinweis: Die Entropie ist definiert als $S = k_B \log(\text{Anzahl mögliche Zustände})$. Wieviele Zustände mit fixen $\{n_i\}$ gibt es?

c) Finde die Verteilung $\{n_i\}$ mit der maximalen Entropie aus Gl. (1) bei konstanter Gesamtteilchenzahl N (und die Entropie in diesem Zustand). Was schliesst du daraus?

d) Wir wollen nun das Modell um eine Dynamik erweitern, und zwar auf folgende Weise (Baker-Transformation): Stauche den Raum in y-Richtung und strecke ihn in x-Richtung jeweils um den Faktor 2. Das System hat nun die Abmessungen $(2L) \times (L/2)$. Schneide nun die rechte Hälfte des Systems (rechts von $x = L$) ab und füge sie wieder oben an das System an. Man hat nun wieder ein Quadrat mit Seitenlänge L, jedoch mit um Faktor 2 gestauchten resp. gestreckten Zellen. Gehe nun wieder zur ursprünglichen Form des Systems über indem du den Teilcheninhalt der deformierten Kästchen gleichmässig auf die ursprünglichen Kästchen verteilst (vgl. Abb. 1). Implementiere diese Dynamik auf dem Computer und berechne die Entropie nach jedem Schritt. Starte dabei mit einer Verteilung $n_1 = 1$ und $n_i = 0$ sonst (die n_i sind jetzt eigentlich n_i/N, wobei wir annehmen, dass N gross ist und n_i deshalb kontinuierlich). Wie verändert sich die Entropie? Erreicht sie einen Sättigungswert und falls ja, welchen?

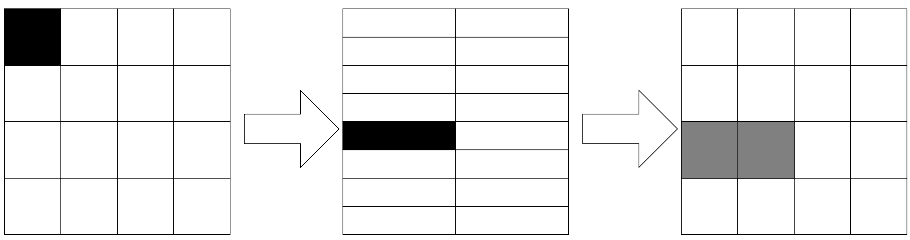


Abbildung 1: Ilustration des ersten Schrittes der Dynamik mittels Baker-Transformation.