

Übung 1. Geladenes Teilchen im äusseren, homogenen Magnetfeld: Landau-Niveaus.

Der Hamiltonoperator eines Teilchens mit Masse m und Ladung q in einem äusseren elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ ist gegeben durch (in Ortsdarstellung und Wahl des Gausschen Einheitensystems):

$$H = \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right]^2 + q\varphi(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

mit dem skalaren Potential $\varphi(\mathbf{x}, t)$ und dem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ so dass:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

wobei φ und \mathbf{A} reell sind.

Im Folgenden wollen wir annehmen, dass $\varphi = 0$ gilt und die magnetische Induktion sei zeitunabhängig, räumlich konstant und zeige entlang der x_3 -Achse: $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Das Vektorpotential \mathbf{A} kann senkrecht zu \mathbf{B} und unabhängig von x_3 gewählt werden, d. h. $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_\perp(x_1, x_2) = (A_1(x_1, x_2), A_2(x_1, x_2), 0)$.

(a) Zeige zunächst, dass dann H aus Gl.(1) die Gestalt

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + H_\perp \quad , \quad H_\perp = \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_\perp - \frac{q}{c} \mathbf{A}_\perp(x_1, x_2) \right]^2$$

annimmt. Hier ist $\nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, 0 \right)$.

(b) Zeige, dass H_\perp mittels den Operatoren $\pi_j = \sqrt{\frac{c}{qB}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{q}{c} A_j(x_1, x_2) \right)$, $j = 1, 2$ auf die Form:

$$H_\perp = \frac{1}{2} \frac{qB}{mc} [\pi_1^2 + \pi_2^2] \quad (4)$$

gebracht werden kann.

(c) Verifiziere nun die Kommutator-Relationen

$$[\pi_1, \pi_2] = i\hbar \quad , \quad [\pi_j, \pi_j] = 0 \quad , \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

An was erinnern Dich diese Relationen?

(d) Da π_1 und π_2 den gleichen Kommutator-Relationen genügen wie der Orts- und Impulsoperator, liegt es nahe wie bei dem in der Vorlesung behandelten eindimensionalen, harmonischen Oszillator die Operatoren

$$a = (2\hbar)^{-1/2} [\pi_1 + i\pi_2] \quad , \quad a^\dagger = (2\hbar)^{-1/2} [\pi_1 - i\pi_2] \quad (6)$$

einzuführen.

Beweise mittels Gl. (5), dass a und a^\dagger dieselben Kommutator-Relationen wie für den harmonischen Oszillator erfüllen.

- (e) Benutze Gl. (6) um zu zeigen, dass H_{\perp} aus Gl. (4) identisch dem Hamiltonoperator des eindimensionalen, harmonischen Oszillators:

$$H_{\perp} = \hbar\omega_0 \left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

mit Frequenz $\omega_0 \equiv \omega_c = \frac{qB}{mc}$ (Zyklotron-Frequenz) ist. Gl. (7) zeigt also, dass ein geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld (für $p_3 = 0$) vollkommen äquivalent zu einem harmonischen Oszillator ist. Was folgt aus Gl. (7) für die Eigenwerte (= Landau-Niveaus) von H_{\perp} ?

Lösung. Der Hamiltonoperator im Feld

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\nabla\varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

ist $H = \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right]^2 + q\varphi(\mathbf{x}, t)$. Wir betrachten den Fall $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z \equiv B\mathbf{e}_3 \equiv (0, 0, B)$. Diese Form von \mathbf{B} kann gewährleistet werden, wenn man wählt $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\perp}(x_1, x_2) = A_1(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + A_2(x_1, x_2)\mathbf{e}_2 = (A_1(x_1, x_2), A_2(x_1, x_2), 0)$, unabhängig von t und x_3 .

(a)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right]^2 = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{e}_1 \frac{\hbar}{i} \nabla_1 + \mathbf{e}_2 \frac{\hbar}{i} \nabla_2 + \mathbf{e}_3 \frac{\hbar}{i} \nabla_3 - \frac{q}{c} (\mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{e}_3 \frac{\hbar}{i} \nabla_3 \right)^2 + \frac{1}{2m} \left[\mathbf{e}_1 \frac{\hbar}{i} \nabla_1 + \mathbf{e}_2 \frac{\hbar}{i} \nabla_2 - \frac{q}{c} (\mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2) \right]^2 + \underbrace{\sim \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 \sim \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1}_0 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + H_{\perp}, \quad H_{\perp} = \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_{\perp} - \frac{q}{c} \mathbf{A}_{\perp}(x_1, x_2) \right]^2, \quad \nabla_{\perp} \equiv \mathbf{e}_1 \nabla_1 + \mathbf{e}_2 \nabla_2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} H_{\perp} &= \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_{\perp} - \frac{q}{c} \mathbf{A}_{\perp}(x_1, x_2) \right]^2 = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{e}_1 \frac{\hbar}{i} \nabla_1 - \frac{q}{c} \mathbf{e}_1 A_1 \right]^2 + \frac{1}{2m} \left[\mathbf{e}_2 \frac{\hbar}{i} \nabla_2 - \frac{q}{c} \mathbf{e}_2 A_2 \right]^2 + \underbrace{\sim \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}_0 \\ &= \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_1 - \frac{q}{c} A_1 \right]^2 + \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_2 - \frac{q}{c} A_2 \right]^2 = \frac{qB}{2mc} [\pi_1^2 + \pi_2^2], \quad \pi_j := \sqrt{\frac{c}{qB}} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_j - \frac{q}{c} A_j \right]. \end{aligned}$$

N.B.: Der Operator π ist proportional zum Geschwindigkeits-Operator: $\pi = \sqrt{\frac{c}{qB}} m\mathbf{v}$, $m\mathbf{v} = \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}$.

(c) Kommutator-Relationen: $[\pi_1, \pi_1] = [\pi_2, \pi_2] = 0$ sind trivial.

$$\begin{aligned} [\pi_1, \pi_2] &= \frac{c}{qB} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_1 - \frac{q}{c} A_1, \frac{\hbar}{i} \nabla_2 - \frac{q}{c} A_2 \right] = \frac{c}{qB} \left\{ \underbrace{\left[\frac{\hbar}{i} \nabla_1, \frac{\hbar}{i} \nabla_2 \right]}_0 + \underbrace{\left[\frac{q}{c} A_1, \frac{q}{c} A_2 \right]}_0 - \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_1, \frac{q}{c} A_2 \right] - \left[\frac{q}{c} A_1, \frac{\hbar}{i} \nabla_2 \right] \right\} \\ &= \frac{i\hbar}{B} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, A_2 \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x_2}, A_1 \right] \right\} = \frac{i\hbar}{B} \left\{ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right\} = \frac{i\hbar}{B} \underbrace{(\nabla \times \mathbf{A})_3}_{B_3 = B} = i\hbar \end{aligned}$$

Die Komponenten vom Geschwindigkeits-Operator in der Ebene (1,2) kommutieren also nicht im Magnetfeld $(0, 0, B)$. Die Kommutator-Relationen sind dieselbe wie für x und p , und der Hamiltonoperator $H_{\perp} = \frac{qB}{2mc} [\pi_1^2 + \pi_2^2]$ ist mathematisch äquivalent zu dem Hamiltonoperator des 1-dim. harmonischen Oszillators.

(d) Definiere $a = (2\hbar)^{-1/2} [\pi_1 + i\pi_2]$, $a^{\dagger} = (2\hbar)^{-1/2} [\pi_1 - i\pi_2]$. Kommutatoren:

$$[a, a] = [a^{\dagger}, a^{\dagger}] = 0 \quad (\text{trivial})$$

$$[a, a^{\dagger}] = (2\hbar)^{-1} [\pi_1 + i\pi_2, \pi_1 - i\pi_2] = (2\hbar)^{-1} \left\{ \underbrace{[\pi_1, \pi_1]}_0 + \underbrace{[\pi_2, \pi_2]}_0 + i \underbrace{[\pi_2, \pi_1]}_{-i\hbar} - i \underbrace{[\pi_1, \pi_2]}_{i\hbar} \right\} = 1.$$

(e)

$$\begin{aligned} H_{\perp} &= \frac{qB}{2mc} [\pi_1^2 + \pi_2^2] = \frac{qB}{2mc} \{(\pi_1 - i\pi_2)(\pi_1 + i\pi_2) - i[\pi_1, \pi_2]\} \\ &= \frac{qB}{2mc} \{2\hbar a^{\dagger} a + \hbar\} = \hbar \frac{qB}{mc} \left(a^{\dagger} a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_c \left(a^{\dagger} a + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von H_{\perp} sind $E_{\perp, n} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n = 0, 1, \dots$ (die Landau-Niveaus).

Übung 2. *Eigenenergien harmonischer Oszillatoren.*

Wir betrachten Hamiltonoperatoren für (modifizierte) d-dimensionale harmonische Oszillatoren in der Schrödinger-Theorie. Bestimme jeweils die Energieeigenwerte vom:

(a) anisotropen harmonischen Oszillator

$$H_a = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^d \omega_i^2 x_i^2$$

(b) geladenen harmonischen Oszillator in einem konstanten äusseren elektrischen Feld der Stärke E entlang der x_1 -Achse

$$H_b = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{x}^2 - qEx_1$$

(c) vom harmonischen Oszillator mit bevorzugter Bewegung entlang der Diagonalen $x_1 = x_2$

$$H_c = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha(x_1 - x_2)^2 \quad (\alpha > 0)$$

Hinweis: Führe jeweils eine angemessene Koordinatentransformation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ durch, so dass sich der Hamiltonian ausgedrückt durch die neuen Koordinaten \mathbf{y} als Summe entkoppelter 1-dimensionaler harmonischer Oszillatoren schreiben lässt. Beachte und zeige auch dass eine unitäre Transformation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ die Form des kinetischen Energieoperators nicht ändert, d.h. $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{y}}^2$. Gegebenenfalls kann es noch hilfreich sein sich zuerst Gedanken zu machen wie die Eigenfunktionen des entsprechenden d-dimensionalen harmonischen Oszillators aussehen, um dann Rückschlüsse auf sein Spektrum zu ziehen. Wir führen zu diesem Zweck noch $\varphi_n^{(\omega)}(x)$ ein als die Wellenfunktion der n-ten Anregung eines 1-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Winkelfrequenz ω und (1-dimensionaler) Ortskoordinate x .

Lösung.

1. Der Hamiltonian H_a ist bereits eine Summe von d entkoppelten harmonischen Oszillatoren. Seine Eigenfunktionen können als Produkte der bereits bekannten Lösungen des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators geschrieben werden (mit der Notation $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$):

$$\varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^d \varphi_{n_k}^{(\omega_k)}(x_k) \quad . \quad (8)$$

Somit ist das Spektrum $E_{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^d \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2}\right)$ mit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$.

2. Das Ziel für diesen und den darauffolgenden Teil (c) ist es durch eine geeignete Koordinatentransformation den Hamiltonian zu entkoppeln. Obwohl es bei beiden Teilen relativ klar ist wie man die Koordinatentransformation durchführen sollte wollen wir kurz die Situation von einem allgemeineren Standpunkt aus beleuchten. Gegeben sei ein Hamiltonian der Form (mit einer reellwertigen symmetrischen und positiv definiten Matrix D und \mathbf{x} soll als Zeilen- und \mathbf{x}^T als Spaltenvektor aufgefasst werden)

$$H^{(x)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T D \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \quad . \quad (9)$$

Da D reell und symmetrisch ist, ist D orthogonal ähnlich zu einer Diagonalmatrix D_0 , welche aufgrund der Positivität von D strikt positive Einträge hat. Somit ist D_0 auch trivial invertierbar. Wir können also

eine reellwertige Matrix S finden, so dass gilt $D = S^T D_0 S$. Definieren wir $\mathbf{y}(\mathbf{x}) := S\mathbf{x} + D_0^{-1}S\mathbf{b}$, so erhalten wir (durch einer Verallgemeinerung der quadratischen Ergänzung)

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T D\mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{y}(\mathbf{x})^T D_0\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\mathbf{b}^T D^{-1}\mathbf{b} \quad (10)$$

Ebenso finden wir, da S orthogonal ist gemäss der Kettenregel $\nabla_{\mathbf{x}} = S^T \nabla_{\mathbf{y}}$ und dann $\nabla_{\mathbf{x}}^2 = \nabla_{\mathbf{y}}^T S S^T \nabla_{\mathbf{y}} = \nabla_{\mathbf{y}}^2$. Der ursprüngliche Hamiltonian $H^{(X)}$ sieht in den neuen Koordinaten also so aus:

$$H^{(Y)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{y}}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T D_0\mathbf{y} + const \quad , \quad (11)$$

mit $const = -\frac{1}{2}\mathbf{b}^T D^{-1}\mathbf{b}$, was lediglich zu einer konstanten Energieverschiebung jedes Eigenwertes führt. Dieser Hamiltonian ist nun eine Summe von Hamiltonians von d eindimensionalen harmonischen Oszillatoren. Wir suchen nun die passende Koordinatentransformation für den Hamiltonian H_b . Wir finden $D_0 = D$ (somit $S = \mathbb{1}_d$) und $\mathbf{b} = -qE\mathbf{e}_1$. Nach Gl. (11) hat H_b das Spektrum

$$E_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{2}\frac{(qE)^2}{m\omega^2} + \sum_{k=1}^d \hbar\omega(n_k + \frac{1}{2}) \quad , \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d. \quad (12)$$

3. Für H_c finden wir $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, und

$$D = \frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{m\omega^2} & -\frac{\alpha}{m\omega^2} & 0 & \dots \\ -\frac{\alpha}{m\omega^2} & 1 + \frac{\alpha}{m\omega^2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (13)$$

Dies ergibt $D_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 \text{diag}(1 + \frac{2\alpha}{m\omega^2}, 1, 1, \dots, 1)$ und als Spektrum findet man dann

$$E_{\mathbf{n}} = \hbar\omega\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\omega^2}}(n_1 + \frac{1}{2}) + \sum_{k=2}^d \hbar\omega(n_k + \frac{1}{2}) \quad , \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d. \quad (14)$$

Übung 3. Allgemeine Unschärferelation. Gegeben seien zwei Observablen, hier beschrieben durch die zwei selbstadjungierten Operatoren A und B . Sei $\delta A := A - \langle A \rangle_{\psi}$ und δB entsprechend. Die mittlere quadratische Abweichung von A von seinem Mittelwert $\langle A \rangle_{\psi}$ im Zustand ψ ist $\langle (\delta A)^2 \rangle_{\psi}$ und analog $\langle (\delta B)^2 \rangle_{\psi}$ für B . In der Vorlesung wurde die folgende Unschärferelation (Ungleichung):

$$\langle (\delta A)^2 \rangle_{\psi}^{1/2} \langle (\delta B)^2 \rangle_{\psi}^{1/2} \geq \frac{1}{2} |\langle i[A, B] \rangle_{\psi}| \quad (15)$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$, hergeleitet. Die zentrale Idee hierbei war es einen Operator L gemäss $L := \alpha\delta A + i\delta B$ zu definieren. Die Unschärferelation ergibt sich dann unmittelbar aus der Bedingung $0 \leq \langle L^\dagger L \rangle_{\psi}$.

- In der Herleitung der Unschärferelation (15) wurde noch verwendet, dass $i[A, B]$ selbstadjungiert ist. Überprüfe dies.
- Was folgt aus (15) für $A = X^\alpha$ (α -Komponente des Ortsoperators) und $B = P^\beta$ (β -Komponente des Impulsoperators).
- In diesem Teil wollen wir untersuchen unter welchen Bedingungen aus dem Ungleichheitszeichen in Gl. (15) ein Gleichheitszeichen wird. Für welche Wellenfunktionen $\psi(x)$ eines eindimensionalen Systems, die $\langle X \rangle = 0$ und $\langle P \rangle = 0$ erfüllen, gilt diese angesprochene Gleichheit in Gl. (15) für die Orts- Impulsunschärfe $\langle (\delta X)^2 \rangle_{\psi}^{1/2} \langle (\delta P)^2 \rangle_{\psi}^{1/2}$? Da die rechte Seite in (15) in diesem Beispiel (wegen $[x, p] = i\hbar$) unabhängig von Ψ ist geht es also hier um die Frage wann genau das Produkt der Schwankungsquadrate minimal ist.

Hinweis: Das Ungleichheitszeichen wird genau dann zu einem Gleichheitszeichen wenn $\langle L^\dagger L \rangle_\psi = 0$ gilt, was $L\psi(x) = 0$ impliziert. Benutze $L = \alpha x + i\frac{\hbar}{2} \frac{d}{dx}$ (Ortsdarstellung) und löse die Differentialgleichung $L\psi(x) = 0$. Entweder kann man die Lösung raten oder durch Separation der Variablen (x, Ψ) systematisch erhalten.

Lösung.

(a) Es gilt

$$(i[A, B])^\dagger = (iAB - iBA)^\dagger = (-iB^\dagger A^\dagger + iA^\dagger B^\dagger) = (iAB - iBA) = i[A, B] \quad (16)$$

(b) Für $A = X^\alpha$, $B = P^\beta$ gilt $[X^\alpha, P^\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$ und dies ergibt das bekannte Resultat.

(c) Minimum der Orts-Impuls-Unschärfe, $\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2}$, für eindimensionale Wellenfunktionen mit $\langle P \rangle_\Psi = \langle X \rangle_\Psi = 0$. Um diese Wellenfunktionen zu finden, betrachten wir den Operator (in der Ortsdarstellung) $L = \alpha X + iP = \alpha x + \hbar \frac{d}{dx}$. Offensichtlich wird die Orts-Impuls-Unschärfe minimiert, wenn $(\alpha x + \hbar \frac{d}{dx}) \Psi(x) = 0$, gilt.

Diese Differentialgleichung kann man lösen:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{\Psi} &= -\frac{\alpha x}{\hbar} dx \quad \Rightarrow \ln \Psi = -\frac{\alpha x^2}{2\hbar} + \text{const} \\ \Psi &= N \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2\hbar}\right). \end{aligned}$$

Das ist nichts anderes als das Gaussische Wellenpaket, mit $\alpha = \frac{\hbar}{2\Delta X^2}$, das wir bereits aus der ersten Serie kennen. Hiermit wurde das Resultat von damals vervollständigt. Wir wussten bereits, dass Gaussische Wellenpakete das minimale Unschärfeprodukt besitzen, nun wissen wir auch noch, dass dies lediglich auf diese speziellen Wellenfunktionen zutrifft. Zum Schluss bemerken wir noch, dass die obige Differentialgleichung zur Bestimmung von Ψ gerade der Bedingung $a\Psi = 0$ entspricht. Ohne die vereinfachende Forderung, dass die Mittelwerte für den Orts- und Impulsoperator verschwinden hätten wir exakt die Bestimmungsgleichung von kohärenten Zuständen, $a\Psi_\alpha = \alpha\Psi_\alpha$ erhalten.