

**Aufgabe 11.1 Boltzmann  $H$ -Funktion im Gleichgewicht**

Die Maxwell-Boltzmann Verteilung ist die stationäre Lösung der Boltzmann Transportgleichung in der Abwesenheit eines äusseren Treibers ( $\mathbf{F} = 0$ ):

$$f_0 = n \left( \frac{1}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2}{2m k_B T} \right).$$

Das Ziel der Aufgabe ist es, die aus dieser Verteilung resultierenden Eigenschaften auszurechnen.

- a) **Gauss'sche Integrale:** (mathematische Vorbereitung) Zeige, dass die Lösung des Gauss-Integrals gerade  $\int dx e^{-x^2/c^2} = c\sqrt{\pi}$  ist. *Tipp:* Vergleiche die Integration in zwei Dimensionen mit kartesischen und Polarkoordinaten:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)/c^2} = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-r^2/c^2}.$$

Berechne anschliessend die allgemeine Lösung für Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} dx x^{2n} e^{-\alpha x^2} \quad \text{oder} \quad \int_0^{\infty} dx x^{2n+1} e^{-\alpha x^2}.$$

*Tipp:* Man leite nach  $\alpha$  ab, bzw. substituiere  $y = x^2$ .

- b) **Resultierende Eigenschaften:** Verifiziere die im Skript angegebenen mittleren Werte für Impuls, Energie und Geschwindigkeit (für  $\varepsilon$  und  $v$ , setze  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ ):

$$\langle \mathbf{p} \rangle \stackrel{!}{=} \mathbf{p}_0, \quad \langle \varepsilon \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \stackrel{!}{=} \frac{3}{2} k_B T, \quad \bar{v} = \left\langle \frac{|p|}{m} \right\rangle \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}.$$

- c) **Boltzmann  $H$ -Funktion im Gleichgewicht:** Im Skript (S.104 ff.) haben wir die Boltzmann  $H$ -Funktion definiert als

$$H(t) = \int d^3p f \ln f.$$

Berechne den Wert dieser Funktion im Gleichgewicht,  $H_0 = \int d^3p f_0 \ln f_0$ .

- d) **Entropie aus der Boltzmann  $H$ -Funktion:** Durch Multiplikation mit  $-k_B V$  erhält man aus der  $H$ -Funktion die Entropie  $S$ . Zeige, dass die auf diesem Weg definierte Entropie  $S = -k_B V H_0$  extensiv ist und vergleiche sie mit der früheren Definition (3.21) aus dem Skript.

## Aufgabe 11.2 Wärme- und Ladungstransport im Elektronengas

In dieser Aufgabe wollen wir die Betrachtung des Wärmetransports im klassischen Gas (vgl. Skript) auf elektrisch geladene Teilchen (z.B. Elektronen) erweitern, wodurch zusätzlich zum thermischen ein Ladungstransport entsteht.

Für fermionische Teilchen ist die Gleichgewichtsverteilung gegeben durch die Fermiverteilung (welche das Pauli Ausschluss-Prinzip berücksichtigt):

$$f_0(\mathbf{v}) = \left( e^{[\varepsilon(\mathbf{v}) - \mu]/k_B T} + 1 \right)^{-1},$$

wobei  $\mu$  das chemische Potential und  $\varepsilon(\mathbf{v}) = m\mathbf{v}^2/2$  die Energie bei Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bezeichnen. Wir erhalten die lokale Fermiverteilung  $f_{\ell 0}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  indem wir in  $f_0$  die Temperatur und das chemische Potential als orts- aber nicht zeitabhängig ansetzen,  $T = T(\mathbf{r})$  und  $\mu = \mu(\mathbf{r})$ .

### a) Linearisierte Boltzmann Transportgleichung im Relaxationszeitansatz

Finde eine Lösung der linearisierten BTG im Relaxationsansatz (d.h. finde  $g$ ) für die obenstehende lokale Fermiverteilung unter der Annahme, dass das angelegte elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und der Temperaturgradient statisch sind:

$$[\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + (\mathbf{F}/m) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}] f_{\ell 0} = -\frac{f - f_{\ell 0}}{\tau} \equiv -\frac{g}{\tau},$$

*Tipp:* Berechne zunächst die Ableitungen  $\partial_{\varepsilon} f_{\ell 0}$ ,  $\partial_{\mu} f_{\ell 0}$  und  $\partial_T f_{\ell 0}$ . Die letzten beiden lassen sich durch  $\partial_{\varepsilon} f_{\ell 0}$  ausdrücken. Fasse damit die verbleibenden Terme von  $g$  zusammen.

### b) Wärmestrom und elektrischer Strom

Formuliere Ausdrücke für die Wärmestromdichte  $\mathbf{j}_Q$  und die elektrische Stromdichte  $\mathbf{j}_E$  als Integral über die Verteilfunktion  $f$  und schreibe diese anschliessend für  $f_{\ell 0}$  und  $g$  um.

*Tipp:* Die Teilchenstromdichte lässt sich als Integral über  $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$  ausdrücken:

$$\mathbf{j}_{\text{Teilchen}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3k \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}).$$

Mithilfe des 1. HS,  $\delta Q = dU - \mu dN$  lässt sich die Wärmestromdichte schreiben als

$$\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{\text{Energie}}(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}) \mathbf{j}_{\text{Teilchen}}(\mathbf{r}),$$

wobei die Energieflussdichte gegeben ist durch

$$\mathbf{j}_{\text{Energie}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3k \varepsilon(\mathbf{v}) \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

Argumentiere, dass die Beiträge von  $f_{\ell 0}$  zu den Strömen verschwinden müssen.

### c) Transportmatrix

Da ein Gradient im elektrischen Potential die gleiche Wirkung hat wie ein Gradient im chemischen Potential, können wir diese zusammenfassen zum (Gradient im) elektrochemischen Potential,  $\mathcal{E} = \mathbf{E} + \nabla\mu/e$ . Damit können wir den Zusammenhang zwischen Gradienten und resultierenden Strömen mithilfe der *Transportmatrix* notieren:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_E \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{11} & \hat{\mathbf{L}}_{12} \\ \hat{\mathbf{L}}_{21} & \hat{\mathbf{L}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ -(\nabla T)/T \end{pmatrix}.$$

Bestimme die (matrixwertigen) Koeffizienten  $\hat{\mathbf{L}}_{kl}$  durch Vergleich mit den Resultaten von b) und zeige explizit, dass  $\hat{\mathbf{L}}_{12} = \hat{\mathbf{L}}_{21}$  gilt (Onsager-Casimir Beziehung).

Zeige anschliessend, dass man diese Koeffizienten zusammenfassend schreiben kann als

$$\hat{\mathbf{L}}_{11} = e^2 \hat{\mathbf{I}}^{(0)}, \quad \hat{\mathbf{L}}_{12} = \hat{\mathbf{L}}_{21} = -e \hat{\mathbf{I}}^{(1)}, \quad \hat{\mathbf{L}}_{22} = \hat{\mathbf{I}}^{(2)},$$

mit  $\hat{\mathbf{I}}$  Diagonalmatrizen mit Einträgen der Form

$$\hat{\mathbf{I}}_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{ij} \int d\varepsilon \left( -\frac{\partial f_{\ell 0}}{\partial \varepsilon} \right) \sigma(\varepsilon) (\varepsilon - \mu)^\alpha,$$

wobei  $\sigma(\varepsilon)$  eine noch zu bestimmende Funktion ist. In Festkörpern entspricht die Verteilfunktion nahezu einer Stufenfunktion, folglich gilt für die Ableitung  $\partial_\varepsilon f_{\ell 0} \sim \delta(\varepsilon - \mu)$  und wir können den Integranden von  $\hat{\mathbf{I}}$  um  $\varepsilon = \mu$  entwickeln. Bestimme die Einträge der Transportmatrix zur Ordnung  $\mathcal{O}(T^2)$ .

- d) **Wiedemann-Franz Gesetz:** Zeige, dass das *Wiedemann-Franz Gesetz* für das Verhältnis von thermischer und elektrischer Leitfähigkeit gilt, d.h., dass

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{\pi^3 k_B^2}{3e^2} T.$$

*Hinweis:* Die Leitfähigkeiten sind definiert durch  $\mathbf{j}_E = \sigma \mathbf{E}$  und  $\mathbf{j}_Q = -\varkappa \nabla T|_{\mathbf{j}_E=0}$ . Der elektrische Strom muss gleich Null gesetzt werden, weil wir an der thermischen Leitfähigkeit im *stationären* Fall interessiert sind, wo keine Teilchen fließen.

**Sprechstunde:** Montag, 6. 12. 2010, 13:30 - 14:30 Uhr  
Roland Willa (HIT K 23.3)