Quantenmechanik I. Übung 5.

HS 10 *Abgabe:* Di 2. November 2010

1. Teilchen im Potentialtopf

Ein Teilchen befindet sich im Eigenzustand tiefster Energie (Grundzustand) eines eindimensionalen, ∞-tiefen Potentialtopfs der Breite $a/2$. Zu einer bestimmten Zeit werde die rechte Wand plötzlich von $x = a/2$ nach $x = a$ verschoben.

i) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass danach das Teilchen im ersten angeregten Zustand, bzw. im Grundzustand des Potentialtopfs der Breite a ist.

Hinweis: Der Zustand ist unmittelbar nach der Verschiebung noch derselbe.

ii) Bleibt der Erwartungswert der Energie des Teilchens bei der plötzlichen Änderung erhalten? Berechne auch das Schwankungsquadrat der Energie.

2. Transfer- und Streumatrix

Ein Teilchen der Energie $E = k^2$, ($\hbar = 2m = 1$) trifft in einer Dimension auf einen Streuer im Intervall $[a, b]$, gegeben durch ein Potential V und einem Vektorpotential A mit

$$V(x) = 0\ ,\ A(x) = 0 \quad \text{für } x \le a \text{ oder } x \ge b. \tag{1}$$

Es wird durch Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$\big(-\mathrm{i}\frac{d}{dx} - A(x)\big)^2 \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)\ , \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

beschrieben.

Bemerkung: Die Einführung des Vektorpotentials ändert zwar das Problem nicht, da es in Dimension 1 weggeeicht werden kann ($A(x) = \chi'(x)$); es sorgt aber im Folgenden für die passende Allgemeinheit, s. Teilaufgabe (vi)).

i) Zeige: Lösungen erfüllen die Stromerhaltung $j'(x) = 0$, wobei

$$j(x) = 2\,\mathrm{Im}\big(\overline{\psi(x)}(\psi'(x) + \mathrm{i}A(x)\psi(x)\big)\ .$$

Bemerkung: Dies ist die Stromerhaltung (2.16), verallgemeinert auf $A \neq 0$ und spezialisiert auf den stationären Fall und auf Dimension 1.

ii) Die Lösungen sind ausserhalb des Intervalls von der Form

$$\psi(x) = \begin{cases} a_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\ , & (x \le a) \\ a'_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a'_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\ , & (x \ge b)\ . \end{cases}$$

Man überlege sich, dass $a_\pm$ durch $a'_\pm$ linear bestimmt sind:

$$\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = T(E) \begin{pmatrix} a'_+ \\ a'_- \end{pmatrix}\ , \tag{3}$$

($T = T(E)$ heisst *Transfermatrix*); man zeige, dass

$$T^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Hinweis: Verwende (i).

iii) Eine von links einfallende Welle ist von der Form

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} , & (x \le a) \\ t\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} , & (x \ge b) , \end{cases} \tag{5}$$

mit Reflexions- r bzw. Transmissionsamplitude t. Ebenso für eine Welle von rechts:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} t'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} , & (x \le a) \\ r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} , & (x \ge b) . \end{cases} \tag{6}$$

Die *Streumatrix* ist definiert als

$$S(E) = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass $S = S(E)$ unitär ist, d.h. dass die Spalten orthonormiert sind:

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 = |r'|^2 + |t'|^2 , \qquad \bar{r}t' + \bar{t}r' = 0 . \tag{7}$$

(insbesondere $R + T = 1$ für $R = |r|^2$, $T = |t|^2$, vgl. Übung 4.2). *Hinweis:* Wie bei (ii).

iv) Bestimme den Zusammenhang zwischen den Einträgen der Matrizen S und T (in beide Richtungen). *Hinweis:*

$$\begin{pmatrix} a_- \\ a'_+ \end{pmatrix} = S(E) \begin{pmatrix} a_+ \\ a'_- \end{pmatrix} . \tag{8}$$

v) Betrachte zwei Streuer wie in (1), unterschieden durch die Indizes 1 und 2. Der erste liege links vom zweiten: $b_1 < a_2$. Drücke die Streumatrix des zusammengesetzten Streuers (Potentiale $V_1 + V_2, A_1 + A_2$) durch die der einzelnen aus.

vi) Sei nun $A(x) \equiv 0$. Zeige, dass $\det T = 1$, bzw. S symmetrisch ist. *Hinweis:* Mit $\psi(x)$ ist auch $\overline{\psi(x)}$ eine Lösung von (2).

3. Strom und Impuls

Sei $\hbar = 2m = 1$. Ein Teilchen auf der Geraden hat

$$j(x) = 2\,\mathrm{Im}\,\overline{\psi(x)}\psi'(x)$$

als Erwartungswert des Stroms bei x. Es handelt sich um eine lokale Eigenschaft von $\psi(x)$, im Unterschied zu jenem des Impulses $p = k$.

Zeige folgende, etwas überraschende Tatsache: Es gibt Superpositionen

$$\psi(x) = a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x} + a_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 x}, \quad (k_1, k_2 > 0)$$

von Wellen, die nach rechts laufen, für die der Strom bei $x = 0$ (zur betrachteten Zeit) nach links läuft: $j(0) < 0$.

Bemerkung: (ausserhalb der Aufgabe) Die Superposition ist zwar nicht normierbar, aber es gibt analoge, normierte Wellenpakete.