

Aufgabe 12.1 Hamilton-Jacobi

Ein geladenes Teilchen bewegt sich in einer Ebene unter dem Einfluss eines zentralen Potentials $k r^2/2$, und eines konstanten magnetischen Feldes B senkrecht zur Ebene, so dass das Vektorpotential \vec{A} gegeben ist durch

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x}. \quad (1)$$

- a.) Berechne den Lagrangian von diesem System in polaren Koordinaten.
- b.) Berechne die kanonischen Impulse p_r und p_θ und finde den Hamiltonian.
- c.) Stelle die Hamilton-Jacobi-Gleichungen auf.

Aufgabe 12.2 Das Zwillings-Paradox

Zwei zwanzigjährige Zwillinge leben auf der Erde und entscheiden sich das folgende Experiment durchzuführen. Der eine Zwilling fliegt mit einem Raumschiff auf geradem Wege zu einem Punkt der $d = 5\sqrt{7}/2$ Lichtjahre von der Erde entfernt ist und zurück, während der andere Zwilling auf der Erde wartet. (Ein Lichtjahr ist die Distanz, die Licht in einem Jahr zurücklegt.) Nimm an, dass sich das Raumschiff mit einer Geschwindigkeit $v = \sqrt{7}/4 \cdot c$ bewegt und die Beschleunigungen instantan sind, wobei c die Lichtgeschwindigkeit sei.

- (a) Zeichne ein Ort-Zeit Diagramm (im Referenzsystem der Erde) der Pfade der beiden Zwillinge.
- (b) Wie alt sind die Zwillinge jeweils, nachdem die Reise beendet ist?
- (c) Betrachte nun das Experiment aus Sicht des Zwillings im Raumschiff. Wie weit hat sich die Erde bezüglich des Referenzsystems des Raumschiffs bewegt? Und wie schnell? Vergleiche das Ergebnis mit (b).
- (d) Wodurch wird die Symmetrie des Problems gebrochen? (Aus Sicht des Zwillings im Raumschiff bewegt sich nur der Zwilling auf der Erde — wieso altert dieser also nicht langsamer?)