## Exercise 5.1 Orthogonale Projektionen

Für alle $\psi \in \mathcal{M}$ existiert definitionsgemäss ein $\phi \in \mathcal{D}(P)$, so dass $\psi = P\phi$. Daher gilt:

$$P\psi = P^2\phi = P\phi = \psi \tag{1}$$

und somit folgt, dass

$$P|_{\mathcal{M}} = \mathbb{I}|_{\mathcal{M}}\,. \tag{2}$$

Seien nun $\xi \in \mathcal{M}^\perp$ beliebig und $P\eta \in \mathcal{M}$ für $\eta \in \mathcal{H}$ beliebig. Daraus folgt nun sofort, dass

$$0 = \langle \xi, P\eta \rangle = \langle P\xi, \eta \rangle, \tag{3}$$

und somit gilt, dass $P\xi = 0$, weil $\eta \in \mathcal{H}$ beliebig gewählt werden konnte. Dies zeigt, dass

$$P|_{\mathcal{M}^\perp} = 0|_{\mathcal{M}^\perp}\,. \tag{4}$$

## Exercise 5.2 Gemischte Zustände

a) Sei $\{e_1, e_2\}$ eine beliebige orthonormale Basis in $\mathbb{C}^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(P_u A) &= \sum_{j=1,2} \langle e_j, P_u A e_j \rangle \\
&= \sum_{j=1,2} \langle e_j, \langle u, A e_j \rangle u \rangle \\
&= \sum_{j=1,2} \langle u, A e_j \rangle \langle e_j, u \rangle \\
&= \langle Au, u \rangle.
\end{aligned} \tag{5}$$

b) Der allgemeine Zustand $\omega$ ist ein lineares Funktional auf $M_2(\mathbb{C})$. Wie man durch Nachrechnen leicht bestätigt, definiert die Abbildung $\iota : (M_2(\mathbb{C}), \langle .,. \rangle_{M_2(\mathbb{C})}) \to (\mathbb{C}^4, \langle .,. \rangle_{\mathbb{C}^4})$ definiert über

$$\iota : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto \iota(A) := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

einen unitären Vektorraum-Isomorphismus, falls

$$\langle A, B \rangle_{M_2(\mathbb{C})} := \mathrm{tr}\,(A^* B) \tag{7}$$

für alle $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. In der linearen Algebra lernt man, dass für jedes lineare Funktional $l_{\mathbb{C}^4} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ ein Vektor $y \in \mathbb{C}^4$ existiert, so dass

$$l_{\mathbb{C}^4}(u) = \langle y, u \rangle_{\mathbb{C}^4} \tag{8}$$

für alle $u \in \mathbb{C}^4$. Demnach existiert für jedes lineare Funktional $l_{M_2(\mathbb{C})}$ ein Vektor $z \in \mathbb{C}^4$ resp. eine Matrix $Z := \iota^{-1}(z)$ in $M_2(\mathbb{C})$, so dass

$$l_{M_2(\mathbb{C})}(A) = \langle z, \iota(A) \rangle_{\mathbb{C}^4} = \mathrm{tr}\,(\iota^{-1}(z)^* A) = \mathrm{tr}\,(Z^* A) = \langle Z, A \rangle_{M_2(\mathbb{C})} \tag{9}$$

für alle $A \in M_2(\mathbb{C})$. Sei nun $\rho \in M_2(\mathbb{C})$ diejenige Matrix, die das Zustands-Funktional $\omega$ gemäss

$$\omega(A) = \mathrm{tr}\,(\rho^* A) \tag{10}$$

($A \in M_2(\mathbb{C})$) beschreibt. Da das Zustands-Funktional $\omega$ nicht nur linear, sondern auch positiv und normiert ist, lassen sich die folgenden Eigenschaften der Matrix $\rho$ ableiten:

- $\omega(A) \in \mathbb{R}, \forall A$: Aus $\omega(A) = \overline{\omega(A)}$ folgt

$$\begin{aligned} \langle \rho, A\rangle_{M_2(\mathbb{C})} = \mathrm{tr}\,(\rho^* A) &= \langle \iota(\rho), \iota(A)\rangle_{\mathbb{C}^4} = \overline{\langle \iota(A), \iota(\rho)\rangle_{\mathbb{C}^4}} = \langle \iota(A), \iota(\rho)\rangle_{\mathbb{C}^4} \\ &= \mathrm{tr}\, A^*\rho = \mathrm{tr}\,(\rho A^*) = \mathrm{tr}\,(\rho A) = \langle \rho^*, A\rangle_{M_2(\mathbb{C})} \end{aligned} \tag{11}$$

  Da die selbstadjungierten Matrizen eine Basis in $M_2(\mathbb{C})$ bilden (betrachte bspw. $\mathbb{I}_2$ zusammen mit den drei Pauli-Matrizen), folgt: $\rho = \rho^*$.

- $\omega(A) \geq 0, \forall A \geq 0$: Wegen $\rho = \rho^*$, ist $\rho$ orthogonal diagonalisierbar. Es existieren also orthonormale Vektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega(A) = \mathrm{tr}\,((\lambda_1 P_{u_1} + \lambda_2 P_{u_2})A) \\ &= \lambda_1 \mathrm{tr}\,(P_{u_1}A) + \lambda_2 \mathrm{tr}\,(P_{u_2}A) \\ &= \lambda_1 \langle u_1, Au_1\rangle + \lambda_2 \langle u_2, Au_2\rangle, \end{aligned} \tag{12}$$

  wobei wir in der letzten Gleichung die Teilaufgabe 5.2.a) benützt haben. Da dies insbesondere für Operatoren $A$ gilt, die bzgl. der Basis $\{u_1, u_2\}$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

  oder

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

  haben, folgt, dass $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ respektive, dass $\rho \geq 0$.

- $\omega(\mathbb{I}) = 1$: Aus unseren bisherigen Resultaten folgt unmittelbar, dass

$$1 = \omega(\mathbb{I}) = \mathrm{tr}\,(\rho\mathbb{I}) = \lambda_1 + \lambda_2, \tag{15}$$

  wobei $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die reellen Eigenwerte der selbstadjungierten Matrix $\rho$ bezeichnen.

Zusammenfassung: $\rho$ ist eine konvexe Linearkombination von orthogonalen Projektoren. Es existieren also orthonormale Vektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^2$ und eine reelle Zahl $\lambda \in [0, 1]$, so dass

$$\omega(A) = \lambda\langle u_1, Au_1\rangle + (1-\lambda)\langle u_2, Au_2\rangle \tag{16}$$

für alle $A \in M_2(\mathbb{C})$, was zu zeigen war. Die das Zustands-Funktional $\omega$ beschreibende Matrix $\rho$ heisst *Dichtematrix*.

### Exercise 5.3 Verschränkung

a) Die Behauptung folgt unmittelbar aus der separaten Berechnung der linken und rechten Seite von Gleichung (7) auf dem Übungsblatt:

$$\begin{aligned} \langle f\rangle_{\delta_{x_1}\delta_{x_2}} &= \int_{\Gamma_1\times\Gamma_2} dy_1 dy_2\, \delta(y_1 - x_1)\delta(y_2 - x_2) f(y_1) \\ &= f(x_1) \end{aligned} \tag{17}$$

für alle $(x_1, x_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$, während

$$\begin{aligned} \langle f\rangle_{\delta_{x_1}} &= \int_{\Gamma_1} dy_1\, \delta(y_1 - x_1) f(y_1) \\ &= f(x_1) \end{aligned} \tag{18}$$

für alle $x_1 \in \Gamma_1$. Analoges gilt offensichtlich für die Restriktion auf das Teilsystem $\Gamma_2$ anstelle von $\Gamma_1$.

b) Zu zeigen ist, dass

$$[\omega_\Psi(Z) = \langle \Psi, M\Psi\rangle, \forall M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{H}_1 : \omega_\Psi(A \otimes \mathbb{I}) = \omega_\phi(A) = \langle \phi, A\phi\rangle, \forall A \in \mathcal{A}_1]$$
$$\Leftrightarrow \exists \chi \in \mathcal{H}_2 : \Psi = \phi \otimes \chi \quad (19)$$

"$\Leftarrow$": Gemäss der Definition des Skalarprodukts auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ gilt

$$\begin{aligned} \omega_\Psi(A \otimes \mathbb{I}) &= \langle \phi \otimes \chi, A \otimes \mathbb{I}\,\phi \otimes \chi\rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} \\ &= \langle \phi, A\phi\rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \chi, \chi\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \langle \phi, A\phi\rangle_{\mathcal{H}_1} = \omega_\phi(A) \end{aligned} \quad (20)$$

"$\Rightarrow$": Wähle eine Basis $\{\alpha_k\}_k \subset \mathcal{H}_1$, so dass $\alpha_0 = \phi$ und eine Basis $\{\beta_k\}_k \subset \mathcal{H}_2$ beliebig. Des weiteren sei $A = P_{\alpha_k}$ für $k \neq 0$. Dann gilt:

$$\langle \Psi, P_{\alpha_k} \otimes \mathbb{I}\,\Psi\rangle = \langle \phi, P_{\alpha_k}\phi\rangle = \langle \alpha_0, P_{\alpha_k}\alpha_0\rangle. \quad (21)$$

Mit $\mathbb{I} = \sum_l P_{\beta_k}$ folgt

$$\sum_l \langle \Psi, P_{\alpha_k} \otimes P_{\beta_l}\,\Psi\rangle = \sum_l \langle \Psi, \langle \alpha_k \otimes \beta_l, \Psi\rangle \alpha_k \otimes \beta_l\rangle = 0, \quad (22)$$

respektive

$$\sum_l |\langle \alpha_k \otimes \beta_l, \Psi\rangle|^2 = 0. \quad (23)$$

Da alle Summanden positiv semidefinit sind, erhalten wir

$$\langle \alpha_k \otimes \beta_l, \Psi\rangle = 0 \quad (24)$$

für $k \neq 0$ und alle $l$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{m,n} \langle \alpha_m \otimes \beta_n, \Psi\rangle \alpha_m \otimes \beta_n \\ &= \sum_n \langle \alpha_0 \otimes \beta_n, \Psi\rangle \alpha_0 \otimes \beta_n \\ &= \alpha_0 \otimes \left( \sum_n \langle \alpha_0 \otimes \beta_n, \Psi\rangle \beta_n \right) \\ &= \phi \otimes \chi, \end{aligned} \quad (25)$$

falls

$$\chi := \sum_n \langle \alpha_0 \otimes \beta_n, \Psi\rangle \beta_n. \quad (26)$$

### Exercise 5.4 Der harmonische Oszillator

a) Da $p$ und $q$ selbstadjungiert sind, folgt direkt, dass

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \kappa q - \frac{i}{\kappa} p \right). \quad (27)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(a^*)$. Wir zeigen vorerst, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(q) \cap \mathcal{D}(p)$. Zu diesem Zweck fixieren wir eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Gemäss der Definition des Definitionsbereich eines Operators;

$$\mathcal{D}(A) := \{\psi \in \mathcal{H} | \|A\psi\|_{\mathcal{H}} < \infty\} \quad (28)$$

(siehe Vorlesung); müssen wir zeigen, dass $\|pf\| < \infty$ und $\|qf\| < \infty$. In der MMP zeigt man, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}, dx)$, so dass $\|f\|_{L^2} < \infty$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Demnach gilt es zu zeigen, dass $p: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $q: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dass dem so ist, kann direkt aus der Definition des Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ abgelesen werden:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty \,|\, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta \partial_x^\alpha f(x)| < \infty,\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0\}. \tag{29}$$

Der Schritt von $\|pf\| < \infty$, $\|qf\| < \infty$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach $\|af\| < \infty$ und $\|a^* f\| < \infty$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist Konsequenz der Anwendung der Dreiecksungleichung.

b) Die Vertauschungsrelation $[a, a^*] = 1$ ist eine direkte Konsequenz der Heisenbergschen Vertauschungsrelation $[p, q] = -i\hbar$. Aus den Ausdrücken für $a$, $a^*$ erhält man $p = p(a, a^*)$ und $q = q(a, a^*)$. Dies führt auf

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(a^*a + \frac{1}{2}[a, a^*]\right) = \hbar\omega\left(a^*a + \frac{1}{2}\right). \tag{30}$$

c) Da $a^*$ die Adjungierte zu $a$ ist, gilt

$$\langle\psi, N\psi\rangle = \|a\psi\|^2 \geq 0 \tag{31}$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Daraus schliessen wir, dass $\sigma(N) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \lambda \geq 0\}$. Aus $[a, a^*] = 1$ folgert man

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^*] = a^*, \tag{32}$$

respektive

$$(N+1)a = aN, \quad (N-1)a^* = a^*N. \tag{33}$$

Aus der letzten Identität schliessen wir: Sei $\psi \in \mathcal{H}$ ein Eigenvektor von $N$ mit Eigenwert $n$. Dann ist $a\psi$ ein Eigenvektor von $N$ mit Eigenwert $(n-1)$ und $a^*\psi$ ist ein Eigenvektor von $N$ mit Eigenwert $(n+1)$. Sei $n$ ein $N$-Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $\psi_n$. Aus

$$\begin{aligned} a &: \mathrm{Eig}(N, j) \to \mathrm{Eig}(N, j-1) \\ a^* &: \mathrm{Eig}(N, j) \to \mathrm{Eig}(N, j+1). \end{aligned} \tag{34}$$

folgern wir, dass

$$Na^k\psi_n = (n-k)a^k\psi_n \tag{35}$$

Die Gleichung ist nur dann verträglich mit der Positivität des Spektrums von $N$, wenn $a^k\psi_n = 0 \in \mathcal{H}$ für $n-k < 0$. Es existiert also ein Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ ($\Omega \neq 0$) mit der Eigenschaft $a\Omega = 0 \in \mathcal{H}$ und $\Omega = a^l\Psi_n$ ($l \in \mathbb{N}_0$ und $l \leq n$).

d) Aus

$$\|a\psi_n\|^2 = \langle a\psi_n, a\psi_n\rangle = \langle\psi_n, N\psi_n\rangle = n \tag{36}$$

folgt

$$\|a^k\psi_n\| = \sqrt{n}\sqrt{n-1} \cdot ... \cdot \sqrt{n-k+1}, \tag{37}$$

so dass

$$a\Omega = a^{l+1}\Psi_n = 0 \Leftrightarrow \|a^{l+1}\Psi_n\| = 0$$

nur dann möglich ist, falls $n \in \mathbb{N}_0$. Sei nun $m \in \mathbb{N}_0$ ein Eigenwert des Operators $N$ mit Eigenvektor $\psi_m$. Dann sind die normierten Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{m(m-1)...(m-s+1)}}a^s\psi_m \tag{38}$$

($s = 1, 2, ..., m$) Eigenvektoren zu den Eigenwerten $m-1, m-2, ..., 0$, während die normierten Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{(m+1)(m+2)...(m+t+1)}}(a^*)^t\psi_m \tag{39}$$

($t = 1, 2, ...$) Eigenvektoren zu den Eigenwerten $m+1, m+2, ...$ sind. Alternativ könnten wir alle Eigenvektoren direkt aus dem Vakuum erzeugen:

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n\,\Omega \tag{40}$$

ist der normierte Eigenvektor des Zähloperators zum Eigenwert $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. der normierte Eigenvektor des Hamiltonoperators

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \tag{41}$$

zum Eigenwert

$$\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{42}$$

e) In der Schrödingersche Darstellung lautet $a\Omega = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\Omega = 0 \tag{43}$$

mit der Lösung

$$\Omega = c\,e^{-\xi^2/2} \tag{44}$$

($c \in \mathbb{R}$ konstant). Alle höheren Eigenfunktionen folgen dann mit Hilfe der Iteration

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\right)^n\,\Omega. \tag{45}$$

f) Für $n = 0$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung. Für die Behandlung des Falls $n = 1$ schreiben wir den Erzeugungsoperator in der Form

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\xi^2/2}\left(-\frac{d}{d\xi}\right)e^{-\xi^2/2} \tag{46}$$

(als Operatorgleichung) und beobachten, dass dann

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, u_1\rangle &= \langle f, a^* u_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle f, e^{\xi^2/2}\left(-\frac{d}{d\xi}\right)e^{-\xi^2/2}u_0\rangle \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\langle f, \xi e^{-\xi^2/2}\rangle, \end{aligned} \tag{47}$$

was die Behauptung für $n = 1$ beweist. Somit kommen wir zum Übergang $n \Rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, u_{n+1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}\langle f, (a^*)^{n+1}u_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}\langle f, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\xi^2/2}\left(-\frac{d}{d\xi}\right)e^{-\xi^2/2}\right)^{n+1} e^{-\xi^2/2}\rangle \end{aligned} \tag{48}$$

Da $(a^*)^{n+1}e^{-\xi^2/2}$ ein Polynom von Grad $n+1$ mal $e^{-\xi^2/2}$ ist, folgt daraus die Behauptung: wir schliessen, dass

$$\langle f, \xi^{n+1}e^{-\xi^2/2}\rangle = 0,$$

da

$$\langle f, \xi^k e^{-\xi^2/2}\rangle = 0$$

für alle $k = 0, ..., n$ nach Induktionsvoraussetzung.

g) Wir betrachten

$$F(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-izx} \tag{49}$$

Für $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ ist dies eine ganze Funktion in $z \in \mathbb{C}$: Dies zeigt man bspw. mit Hilfe der Cauchy-Riemann Gleichungen:

$$F(z) = F(r + is) = u(r + is) + iv(r + is) \tag{50}$$

$(i, s \in \mathbb{R})$, ist genau dann analytisch , falls

$$\partial_r u = \partial_s v \tag{51}$$
$$\partial_s u = -\partial_r v, \tag{52}$$

und falls $\partial_r u, \partial_s u, \partial_r v, \partial_s v$ stetig sind. Dies muss nun überprüft werden: In der MMP zeigt man (Korollar des Satzes von Fubini), dass wir die partiellen Ableitungen $\partial_r, \partial_s$ ins Integral in der Definition von $F(z)$ reinziehen dürfen, wenn der Integrand stetig differenzierbar ist, was hier gegeben ist (Produkt von Schwartzraum-Funktionen). Die Cauchy-Riemann Gleichungen gelten, weil $e^z$ schon analytisch ist, was man durch Nachrechnen überprüft. Aufgrund der Analytizität von $F(z)$ existiert eine überall konvergente Potenzreihen-Darstellung für $F(z)$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z = 0)}{k!}\, z^k,$$

wobei

$$F^{(n)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i)^n \int_{\mathbb{R}} dx\, x^n\, f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-izx}$$

die $n$-te Ableitung von $F$ bezeichnet. Gemäss Behauptung 2 gilt, dass $\langle u_n, f \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Identität $F^{(n)}(z = 0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ impliziert. Somit folgt, dass

$$0 = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-izx}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, da alle Koeffizienten in der Potenzreihen-Darstellung von $F(z)$ verschwinden. Dies impliziert, dass

$$f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

fast überall (d.h. bis auf eine Menge mit Mass Null), weil die auf $L^2(\mathbb{R}, dx)$ ausgedehnte Fourier Transformation linear und bijektiv und schlussendlich, dass $f(x) = 0$ fast überall, was zu zeigen war ($L^2(\mathbb{R}, dx)$ ist streng genommen nur dann ein Hilbertraum, falls Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden, identifiziert werden).

### Exercise 5.5 Debye-Waller Faktor

a) Sei $\hat{\psi}(p)$ die Impulsraum-Darstellung einer Wellenfunktion $\psi$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(V_{p_0}\hat{\psi})(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(x) \\ &= \hat{\psi}(p - p_0).\end{aligned} \tag{53}$$

b) Wie in der Vorlesung gezeigt gilt ganz allgemein: Sei $A$ eine beliebige Observable und $P_\Delta^{(A)}$ der zu $\Delta \subset \mathbb{R}$ gehörende Spektrale Projektor von $A$. Dann gilt:

$$W_\Delta^{(A)} = \omega(P_\Delta^{(A)}), \tag{54}$$

wobei $W_\Delta^{(A)}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass man bei einer Messung von $A$ einen Wert in $\Delta$ misst, falls der Systemzustand durch $\omega$ beschrieben ist. Die Anwendung dieses allgemein gültigen Prinzips für die vorliegende Situation ergibt

$$W_{E_g}^{(H)} = \langle V_{p_0} u_0, P_{E_g}^{(H)} V_{p_0} u_0 \rangle \tag{55}$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ($E_g$ bezeichnet die Grundzustandsenergie). Unter der Annahme, dass $\dim(\mathrm{Eig}(H, E_g)) = 1$ und der Benützung von

$$P_{E_g}^{(H)} \psi = P_{u_0} \psi = \langle u_0, \psi \rangle u_0 \tag{56}$$

lässt sich der vorangegangene Ausdruck für $W_{E_g}^{(H)}$ weiter umformen:

$$W_{E_g}^{(H)} = |\langle u_0, V_{p_0} u_0 \rangle|^2. \tag{57}$$

c) Die Anwendung der Formel (22) auf dem Blatt ergibt

$$V_{p_0} = e^{i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} a^*} e^{i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} a} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}. \tag{58}$$

Dieser neue Ausdruck für $V_{p_0}$ erlaubt unter der Berücksichtigung von

$$e^{i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} a} u_0 = u_0 \tag{59}$$

(benutze die Entwicklung der Exponentialfunktion zusammen mit $a u_0 = 0$) die folgende Umformung, die zum gesuchten Resultat führt:

$$\begin{aligned} W_{E_g}^{(H)} &= |\langle u_0, V_{p_0} u_0 \rangle|^2 \\ &= |\langle u_0, e^{i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} a^*} e^{i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} a} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} u_0 \rangle|^2 \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} |\langle u_0, e^{i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} a^*} u_0 \rangle|^2 \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} |\langle e^{i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} a} u_0, u_0 \rangle|^2 \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}}. \end{aligned} \tag{60}$$