

Exercise 2.1 Algebraische Bestimmung von Eigenwerten hermitescher Operatoren

- (a) Aus
- $A\psi = A_1\psi = a\psi$
- und
- $\psi^*\psi = 1$
- folgt

$$\begin{aligned}\phi^{(i)*}\phi^{(i)} &= \psi^*\theta_1^*\theta_1\psi \\ &= \psi^*(A_1 - a^{(1)})\psi \\ &= (a - a^{(1)}).\end{aligned}$$

Da $\phi^{(i)*}\phi^{(i)} \geq 0$ folgt $a \geq a^{(1)}$, i.e., A besitzt keinen Eigenwert kleiner als a .

- (b) Wir wenden ganz einfach die Definitionen an und zeigen

$$\begin{aligned}A_{j+1}\theta_j &= (\theta_j\theta_j^* + a^{(j)})\theta_j \\ &= \theta_j(\theta_j^*\theta_j + a^{(j)}) \\ &= \theta_j A_j.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Relation gelingt es uns unmittelbar die geforderte rekursive Beziehung herzuleiten.

$$\begin{aligned}\phi^{(n)*}\phi^{(n)} &= \psi^*\theta_1^*\dots\theta_{n-1}^*\theta_n^*\theta_n\theta_{n-1}\dots\theta_1\psi \\ &= \psi^*\theta_1^*\dots\theta_{n-1}^*(A_n - a^{(n)})\theta_{n-1}\dots\theta_1 \\ &= \psi^*\theta_1^*\dots\theta_{n-1}^*\theta_{n-1}\dots\theta_1(A_1 - a^{(n)})\psi \\ &= (a - a^{(j)})\phi^{(n-1)*}\phi^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Aus $\phi^{(n)*}\phi^{(n)} \geq 0$ folgt unmittelbar die Ungleichung

$$(a - a^{(n)})(a - a^{(n-1)})\dots(a - a^{(1)}) \geq 0.$$

Es folgt dass ein Eigenwert a entweder einen der Werte $a^{(j)}$ annehmen muss oder größer sein muss als jedes der $a^{(j)}$. Ist die Folge der $a^{(j)}$ unbeschränkt, so muss a zwangsläufig einen der Werte $a^{(j)}$ annehmen. Ist die Folge nach oben beschränkt durch eine Zahl c , so kann a einen der Werte $a^{(j)}$ annehmen, oder einen Wert der nicht kleiner ist als c aber ansonsten keiner Bedingung unterliegt.

- (c) Die Behauptung dass alle
- θ_j
- einen nichttrivialen Kern lässt sich wie folgt beweisen.
- A_j
- ist nach Konstruktion hermitesch und somit diagonalisierbar. Es gibt also eine unitäre Matrix
- V
- so dass
- $D = VA_jV^*$
- , wobei
- D
- eine Diagonalmatrix ist. Wir schreiben

$$D = VA_jV^* = V\theta_j^*\theta_jV^* + a^{(j)}V\mathbb{1}V^* = V\theta_j^*\theta_jV^* + a^{(j)}\mathbb{1}.$$

Da sowohl D als auch die Einheitsmatrix diagonal ist folgt, dass ebenso $V\theta_j^*\theta_jV^*$ diagonal (und immernoch positiv) ist. Nehmen wir nun an dass $\theta_j^*\theta_j$ nur Eigenwerte $t_i > 0$ besitzt, und damit einen trivialen Kern. Wir zeigen, dass dann die Zerlegung nicht optimal im Sinne des Algorithmus ist: Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

Wir finden nun immer eine Zerlegung die besser (optimaler) ist: sei o.B.d.A. t_1 der kleinste Eigenwert von $\theta^*\theta$, dann ist

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & t_2 - t_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n - t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a + t_n \end{pmatrix}$$

eine neue Zerlegung die optimal ist im Sinne des Algorithmus; ein größeres a ist nicht möglich, da sonst $\theta^*\theta$ nicht mehr positiv sein kann. Damit ist klar, dass für eine optimale Zerlegung θ immer einen nichttrivialen Kern haben muß.

Sei also $\xi \in \ker \theta_j, \xi \neq 0$. Wir können nun folgern dass $a^{(j)}$ Eigenwert von A_j ist, nämlich

$$(A_j - a^{(j)})\xi = \theta_j^*\theta_j\xi = 0.$$

Mit $\psi^{(j)} = \theta_1^*\theta_2^*\dots\theta_{j-1}^*\xi$ folgt dann mit Hilfe von (b), dass

$$A\psi^{(j)} = \theta_1^*\theta_2^*\dots\theta_{j-1}^*A_j\xi = a^{(j)}\psi^{(j)}.$$

- (d) Wie auf dem Aufgabenblatt angegeben wählen wir $\theta = (Q + iP)/\sqrt{2}$. Damit folgt unmittelbar $\theta^*\theta = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) - \frac{1}{2}$, also in obiger Notation $a^{(1)} = \frac{1}{2}$.

Wir zeigen zunächst durch Induktion, dass

$$(\theta^{n*})(\theta)^n = N(N-1)\dots(N-n+1), \quad N := \theta^*\theta.$$

Für $n = 1$ folgt die Behauptung direkt aus der Definition von N . Wir machen ein paar Bemerkungen welche wir im Induktionsschritt gebrauchen werden. Aus der Vertauschungsregel $[Q, P] = i$ folgt $[\theta, \theta^*] = 1$; ebenso folgt $[N, \theta] = -\theta$, also $N\theta = \theta(N-1)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\theta^{n*})(\theta)^n &= \theta^*(\theta^{n-1*})(\theta^{n-1})\theta \\ &= \theta^*N(N-1)\dots(N-(n-1)+1)\theta \\ &= \theta^*\theta(N-1)(N-2)\dots(N-n+1) \\ &= N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1). \end{aligned}$$

□

Nun definieren wir $\phi^{(n)} = \theta^n\psi$ mit $N\psi = \lambda\psi$, und berechnen

$$\begin{aligned} \phi^{(n)*}\phi^{(n)} &= (\theta^N\psi)^*\theta^N\psi \\ &= \psi^*(\theta^{n*}\theta^n\psi) \\ &= \psi^*N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)\psi \\ &= \psi^*\psi\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1) \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1) \geq 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Hieraus können wir die Eigenwerte für N direkt ablesen ($\lambda \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Mit $a^{(1)} = \frac{1}{2}$ folgt dann, dass die Eigenwerte von $\frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$ gerade $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ lauten.

Exercise 2.2 Elektron im homogenen magnetischen Feld

- (a) Ausgehend von dem Gleichgewicht zwischen Zentrifugal- und Lorentzkraft,

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e}{c}vB,$$

können wir unmittelbar die Zyklotronfrequenz ω_c bestimmen

$$\omega_c := \frac{v}{r} = \frac{eB}{mc}. \quad (1)$$

Aus der klassischen Mechanik wissen wir, dass die Energie eines rotierenden Körpers bestimmt ist durch

$$E = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L\omega}{2}.$$

Einsetzen der Bohrschen Quantisierungsbedingung

$$L = mvr = k\hbar, k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

zusammen mit (1) ergibt

$$E_k = \frac{k\hbar\omega_c}{2}.$$

Wir sehen dass die Vorhersage um einen Faktor $\frac{1}{2}$ daneben liegt.

Um die Entartung zumindest näherungsweise zu bestimmen, versuchen wir einen äußerst groben Ansatz und berechnen wieviele Kreise mit dem Zyklotronradius in die Fläche A passen. Aus (1) und (2) folgt

$$r_c^2 = \frac{k\hbar c}{eB} = \frac{k\hbar c}{2\pi eB}.$$

Und somit

$$n_k = \frac{S}{\pi r^2} = \frac{2\pi eBS}{\pi k\hbar c} = \frac{BS}{\phi_0 k} = \frac{\phi_B}{\phi_0} \frac{1}{k}.$$

Wir sehen dass wir einen seltsamen Ausdruck erhalten der nicht für alle Werte von k eine natürliche Zahl ist und somit als Wert für die Entartung im allgemeinen keinen Sinn ergibt. Man könnte noch versuchen die Situation zu retten indem man ganz im Geiste des Ansatzes den erhaltenen Wert von n_k zur nächst kleineren Zahl abrundet. Wie wir aber am korrekten Resultat sehen können, ist die Entartung in Wirklichkeit für alle k identisch. Bei der korrekten Berechnung mit Mitteln der modernen Quantenmechanik kann man sehen, dass die Wellenfunktion einen von der Energie unabhängigen Freiheitsgrad hat, welcher gerade für diese Entartung zuständig ist. Dies lässt sich mit unserem sehr groben Model nicht erklären. Nur für $k = 1$ erhalten wir den richtigen Wert. Als letztes sei noch angemerkt, dass die endliche Entartung der Landau-Niveaus alleine durch die räumliche Einschränkung zustande kommt; im freien Raum sind alle Landau-Niveaus unendlich entartet.

- (b) Mit dem Vektorpotential wie angegeben zeigt das Magnetfeld in z-Richtung. Wir ignorieren wie gehabt die Bewegung des Elektrons in z-Richtung.

$$\{\pi_x, \pi_y\} = \sum_i \frac{d\pi_x}{dq_i} \frac{d\pi_y}{dp_i} - \frac{d\pi_x}{dp_i} \frac{d\pi_y}{dq_i} = \frac{eB}{2c} + \frac{eB}{2c} = \frac{eB}{c}.$$

Und damit

$$H = \frac{1}{2m}(\pi_x^2 + \pi_y^2).$$

H hat also klar die Form eines harmonischen Oszillators. Um jedoch die Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung anwenden zu können, müssen wir noch eine Transformation

durchführen um auf (kanonisch konjugierte) Koordinaten und Impulse im Sinne von Bohr und Sommerfeld zu kommen. Wie definieren

$$Q := \frac{c}{eB} \pi_y.$$

Damit ist die Normierungsbedingung der Poissonklammer erfüllt. Man kann nun auch nachrechnen, dass die neuen Variablen tatsächlich kanonisch konjugiert sind. Wir können die Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned} nh = \oint \pi_x dQ &= \oint \pi_x \frac{dQ}{d\pi_y} d\pi_y \\ &= \frac{c}{eB} \oint \pi_x d\pi_y \\ &= \frac{c}{eB} \pi 2mH. \end{aligned}$$

Und damit

$$H = \hbar \omega_c n.$$

Exercise 2.3 Vertauschungsrelationen zwischen Koordinaten und Impulsen

- (a) Unter Berücksichtigung dass es sich bei ψ_i und ψ_f um Eigenfunktionen von H handelt schreiben wir

$$\begin{aligned}(\psi_f, [A, H]\psi_i) &= (\psi_f, (AH - HA)\psi_i) \\ &= (E_i - E_f)(\psi_f, A\psi_i) \\ &= \hbar\omega A_{fi}.\end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned}(\psi_f, [A, H]\psi_i) &= i\hbar \frac{d}{dt}(\psi_f, A\psi_i) \\ &= i\hbar(\psi_f, \frac{d}{dt}(A)\psi_i),\end{aligned}$$

und damit

$$[A, H] = i\hbar \frac{dA}{dt}$$

- (c) Der Hamilton-Operator lautet natürlich

$$H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q); \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}.$$

Wir schreiben daher

$$\begin{aligned}[q, H] &= i\hbar\dot{q} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(q\dot{q}^2 - \dot{q}^2q) &= i\hbar\dot{q} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(q\dot{q} - \dot{q}q)\dot{q} + \frac{1}{2}m\dot{q}(q\dot{q} - \dot{q}q) &= i\hbar\dot{q}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$m(q\dot{q} - \dot{q}q) = (qp - pq) = i\hbar.$$