Quantenmechanik I
Serie 1

Aufgabe 1.1 Hohlraumstrahlung

In der Geburtsstunde der Quantenmechanik gelang es Max Planck eine Vorhersage für die Energiedichte von thermischer elektro-magnetischer Strahlung zu machen. Wir wollen dies nun nachvollziehen.

a) Betrachte einen metallischen kubischen Hohlraum mit Kantenlänge L. Welche Werte des Wellenvektors $\vec{k}$ sind im Inneren erlaubt? Berechne die Anzahl Moden pro Volumen $g(\omega)$ im Frequenzraum.

b) Betrachte nun jede Mode als System mit einem Freiheitsgrad, das Zustände mit Energien $E \in [0, \infty)$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in einem Zustand mit Energie E befindet ist proportional zum Bolzmann-Faktor $e^{-\beta E}$ mit $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$.

   i. Berechne den Erwartungswert der Energie $\bar{E}_{\text{klass.}}$ für den klassischen Fall mit kontinuierlichem Energiespektrum.

$$\bar{E}_{\text{klass.}} = \frac{\int_0^\infty \mathrm{d}E\, E\, e^{-\beta E}}{\int_0^\infty \mathrm{d}E\, e^{-\beta E}} \tag{1}$$

   ii. Berechne den Erwartungswert der Energie $\bar{E}_{\text{quant.}}(\omega)$ für den quantisierten Fall, wo nur Energien $E_n = n\hbar\omega$, $n \in \mathbb{N}$ erlaubt sind. Betrachte die Grenzfälle hoher und tiefer Temperatur T.

$$\bar{E}_{\text{quant.}}(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^\infty E_n\, e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-\beta E_n}} \tag{2}$$

c) Berechne die Energiedichte

$$\frac{U}{L^3} = \int_0^\infty d\omega\, g(\omega)\, \bar{E}_{\text{quant.}}(\omega) \tag{3}$$

für den quantisierten Fall und zeige, dass im klassischen Fall das Ergebnis divergent ist. Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\, x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Aufgabe 1.2 Compton Streuung

Betrachte die elastische Streuung eines Photons mit Energie $h\nu_1$ und Impuls $\vec{p_1}$ an einem Elektron in Ruhe, dessen Energie mc^2 beträgt. Es bezeichne $h\nu_2$ und $\vec{p_2}$ Energie und Impuls des gestreuten Photons und das Elektron hat nach der Kollision Energie $c\sqrt{m^2c^2 + |\vec{p}|^2}$ mit Impuls $\vec{p}$. Zeige, dass

$$\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos\theta), \tag{4}$$

wobei θ den Streuwinkel angibt, d.h. den Winkel zwischen $\vec{p_1}$ und $\vec{p_2}$.

Aufgabe 1.3 Inäquivalenz von Normen

Bekannterweise sind Normen auf endlich-dimensionalen Räumen äquivalent, d.h. für zwei beliebige Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem endlich-dimensionalen Raum X existieren zwei Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass

$$\forall_{x\in X}:\ C_1\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\,\|x\|_1\,. \tag{5}$$

In unendlich-dimensionalen Räumen gilt diese Äquivalenz nicht mehr. Betrachte dazu den Raum $L^1([0,1], \mathrm{d}x)$, die beiden Normen

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x)| \qquad \text{und} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|\,, \tag{6}$$

sowie die Folge von Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ 2 - nx & 1/n < x \leq 2/n \\ 0 & 2/n < x \leq 1 \end{cases}, \qquad n = \{2, 3, 4, \ldots\}. \tag{7}$$

Berechne die zwei Normen von f_n für beliebige n.

a) Betrachte den Limes $n \to \infty$ und lege dar, wieso in diesem Fall die Normen nicht äquivalent sind.

b) Beweise die Äquivalenz der Normen im endlich-dimensionalen Fall. Welcher Schritt scheitert im unendlich-dimensionalen? Hinweis: Es ist ausreichend sich auf den Raum $\mathbb{R}^n$ zu beschränken und die Äquivalenz einer beliebigen Norm $\|.\|_*$ zur $\|.\|_1$-Norm zu zeigen.