Zeeman-Effekt (Theorie ohne Spin)

Aufspaltung der Energieniveaus (Terme) eines Atoms im äusseren Magnetfeld $B\vec{e}_3$

$$H = H_0 + \mu_B B M_3$$

mit

H_0 : ungestörtes Atom, rotationssymmetrisch

$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc}$ (Bohrsches Magneton)

$\vec{L} = \hbar \vec{M}$ Bahndrehimpuls

Jedem Term E_0 entspricht Eigenraum; dieser trägt eine i.A. irreduzible Darstellung $\mathcal{D}_j$ der $SO(3)$.

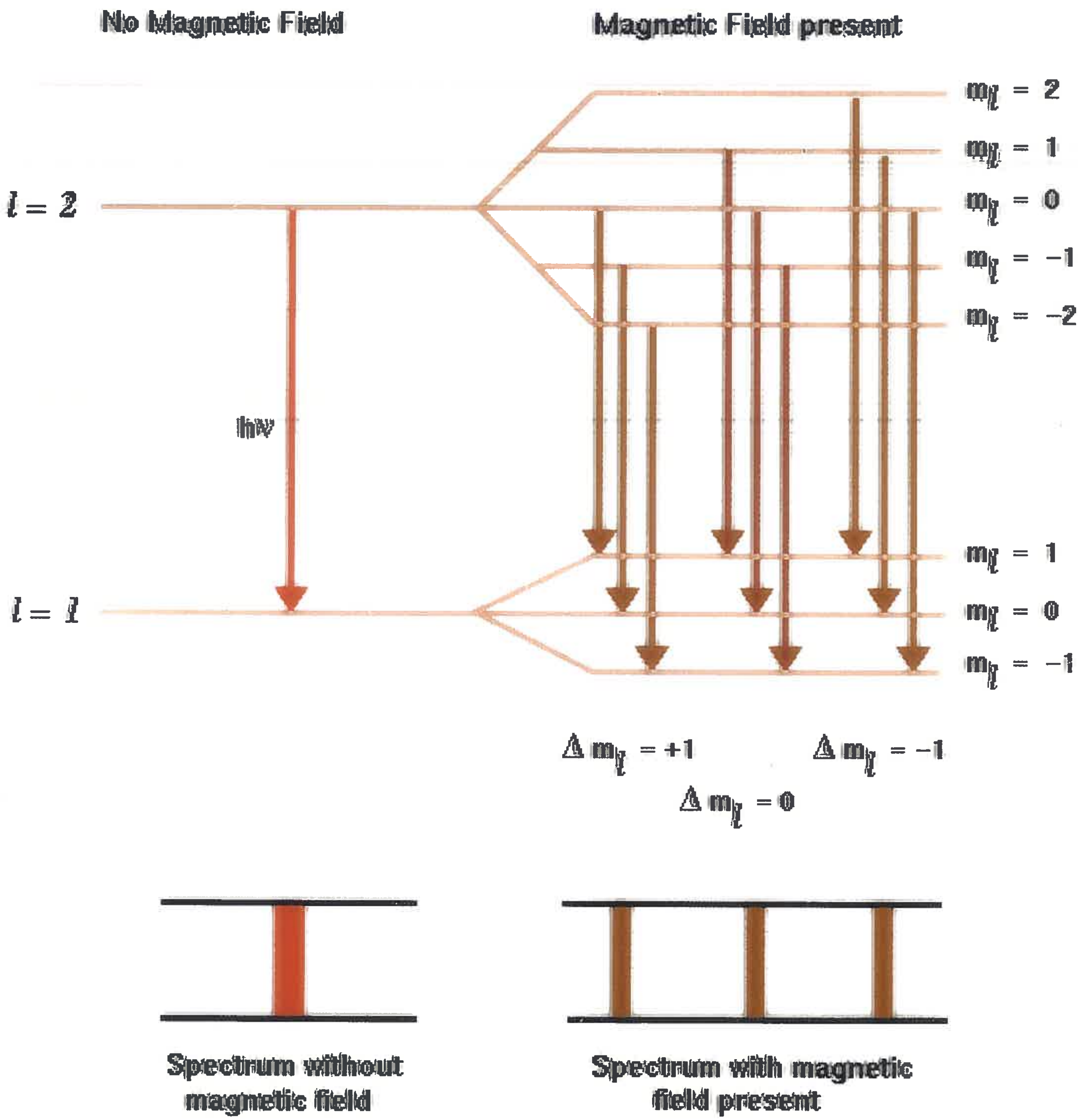
→ Aufspaltung: $E_0 \to E_0 + \mu_B B m = E_{0m}$
$(m = -j, \dots, j)$

Folgerung:

- j ganzzahlig
- Aufspaltung universell: $\Delta E_{0m} = \mu_B B$ (unabh. vom Term)

Beobachtung: Nein (anomaler Zeeman-Effekt)

Normaler Zeeman-Effekt



$\mathcal{H}$ Hilbertraum mit Darstellung $U(V)$ der $SU(2) \ni V$. <u>Def</u>:

$$\vec{W} = \sum_j W_j \vec{e}_j$$

ist <u>Vektoroperator</u>, falls

$$U(V)(\vec{W}\cdot\vec{e})\,U(V)^{-1} = \vec{W}\cdot R\vec{e}$$

(alle $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$, $V \in SU(2)$) mit $R = R(V)$, d.h.

$$U(V)\,W_j\,U(V)^{-1} = \sum_{i=1}^{3} R_{ij}\,W_i$$

<u>Beispiele</u>: $\vec{x}, \vec{p}, \vec{L}, \vec{S}$

Satz von Wigner-Eckart (Spezialfall)

$\mathcal{H}$ trage eine irreduzible Darstellung von $SU(2)$ mit Drehimpulsoperator $\vec{M}$. Dann ist jeder weitere Vektoroperator $\vec{W}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ proportional zu $\vec{M}$:

$$\vec{W} = \kappa \vec{M}$$

für ein $\kappa \in \mathbb{R}$.

Anomaler Zeeman-Effekt

- Aufspaltung eines Terms im $\vec{B}$-Feld

$$\Delta E_m = g \mu_B B m \qquad (m = -j, \dots j)$$

mit

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

- Übergänge genügen den Auswahlregeln

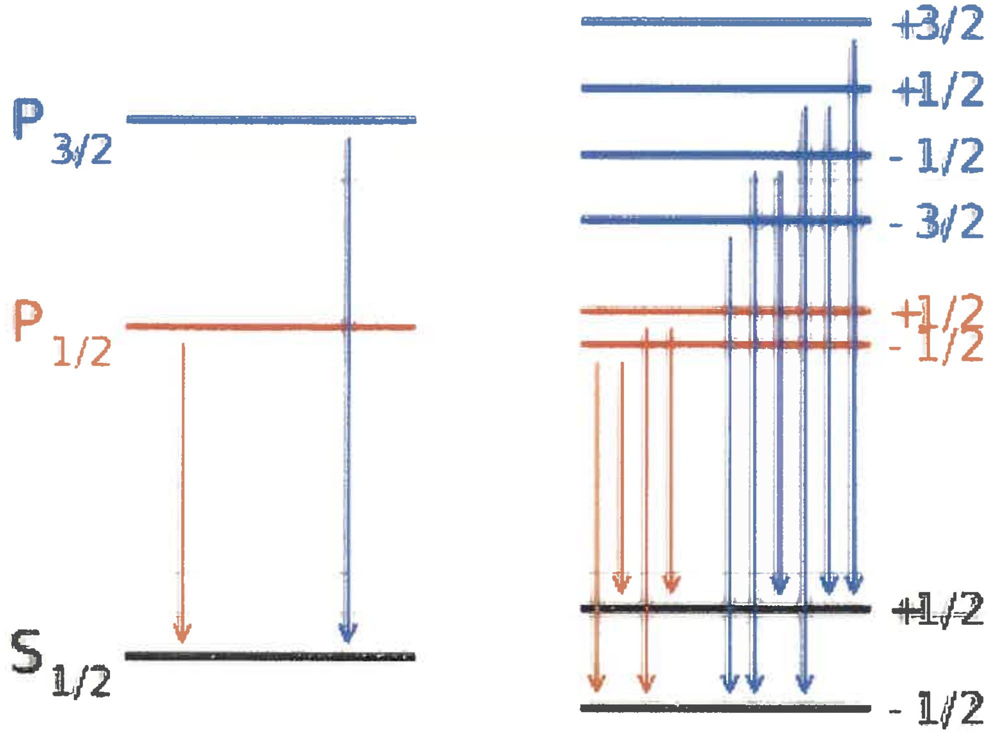
$$j \to j+1, \dots |j-1| \,, \qquad m \to m, \; m \pm 1$$

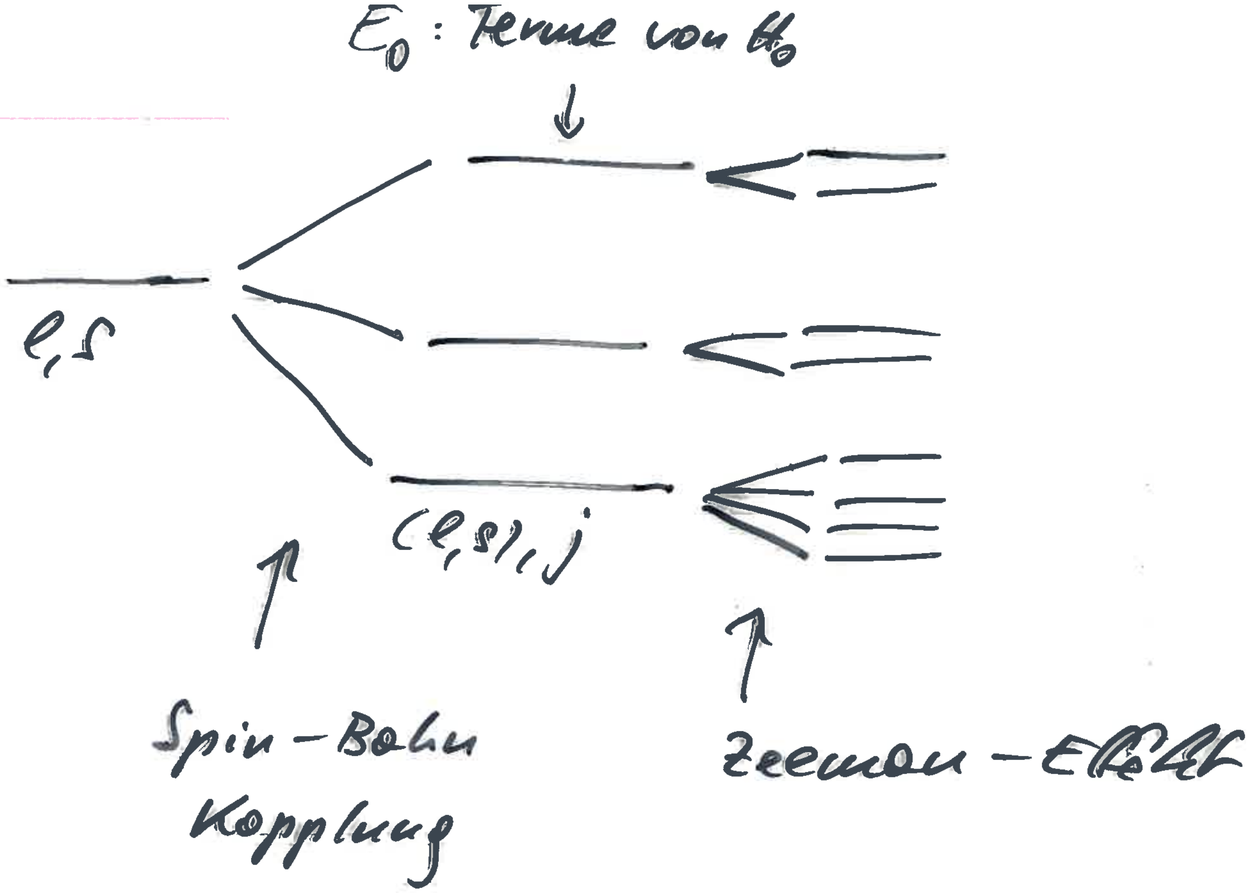
Bemerkung $\qquad (\vec{J} = \vec{L} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S})$

- j aus $l+s, \; l+s-1, \dots |l-s|$
- Für $s=0$ $(j=l)$ ist $g=1$

  " $l=0$ $(j=s)$ " $g=2$

Anomaler Zeeman-Effekt





Hamilton-Operator: $H = H_0 + H_1$

- H_0 rotationssymm. (inkl. Spin-Bahn Kopp.)

$$[H_0, \vec{J}] = 0 \quad \text{exakt.}$$

$$[H_0, \vec{L}^2] = 0 \quad , \quad [H_0, \vec{S}^2] = 0 \quad \text{annähernd}$$

(nur falls H_0 unter separaten Drehungen in Orts- und Spin-Raum invariant ist)

- $H_1 = \mu_B \vec{B} \cdot (\vec{L} + g_0 \vec{S}) = \mu_B \vec{B} \cdot (\vec{J} + (g_0 - 1)\vec{S})$

g_0: gyromagnetischer Faktor des e^-.

- Bahn koppelt an $\vec{B}$-Feld :

$$H_{1B} = \mu_B \vec{B} \cdot \vec{L} \qquad (\hbar = 1)$$

- Spin koppelt an $\vec{B}$-Feld

$$H_{1S} = - \vec{B} \cdot \vec{\mu}$$

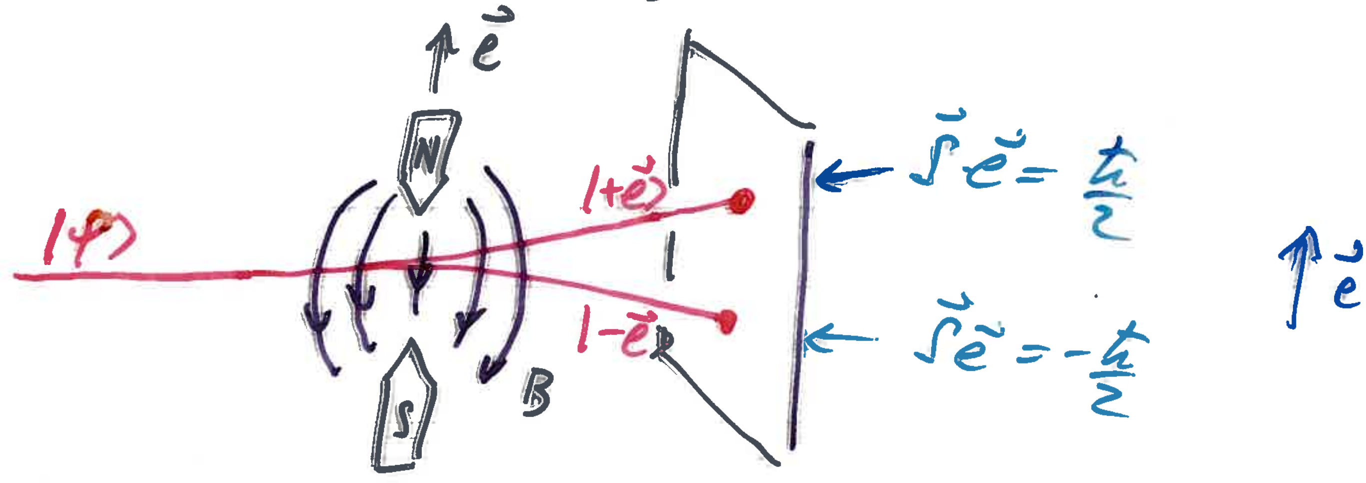
über das magnetische Moment

$$\vec{\mu} = - g_0 \mu_B \vec{S}$$

(werden sehen : $g_0 = 2$), also

$$H_{1S} = g_0 \mu_B \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Stern-Gerlach Anordnung



liefert eine Messung des Spins in Richtung $\vec{e}$

$$\vec{S}\cdot\vec{e} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{e}$$

QM-Observable $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren $|\pm\vec{e}\rangle$ von $\vec{\sigma}\cdot\vec{e}$: Zustände, in denen der Messwert $(\pm\hbar/2)$ mit Sicherheit angenommen wird.

<u>Bsp</u>: • $\vec{e} = \vec{e}_3$: $\quad |\vec{e}_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\vec{e}_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

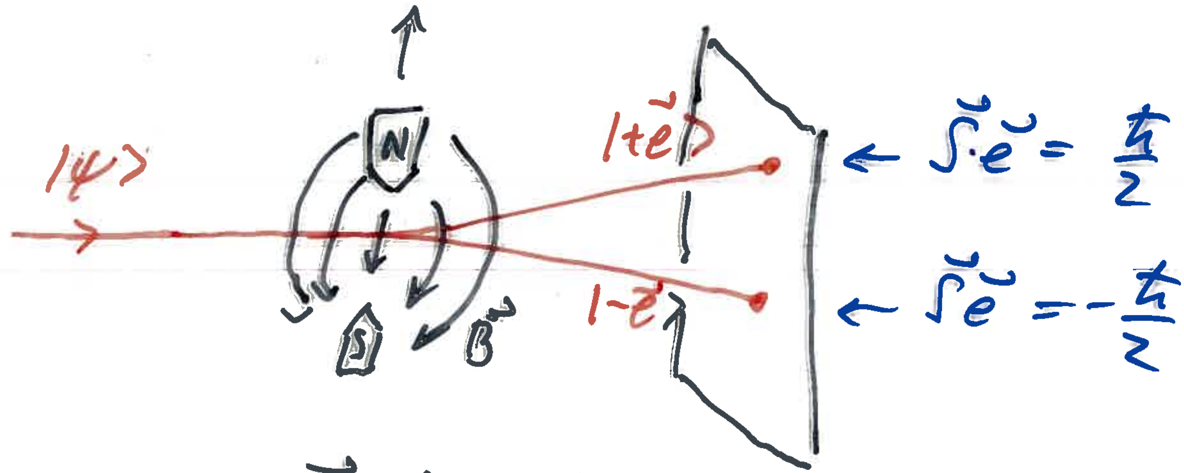
• $\vec{e} = \vec{e}_1$: $\quad |\vec{e}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\vec{e}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{e}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3\rangle + |-\vec{e}_3\rangle), \quad |-\vec{e}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3\rangle)$$

sind <u>kohärente Superpositionen</u> von $|\vec{e}_3\rangle, |-\vec{e}_3\rangle$.

Spin $\frac{1}{2}$ - Teilchen, Spinkomponente in Rtg $\vec{e}$

- gemessen mit Stern-Gerlach-Analysator (Achse $\vec{e}$)



- Operator: $\vec{S}\cdot\vec{e} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{e}$
(Eigenwerte $\pm\hbar/2$, Eigenvektoren $|\pm\vec{e}\rangle$)
$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{e})|\pm\vec{e}\rangle = (\pm 1)|\pm\vec{e}\rangle$$
- entsprechende Ereignisse: Projektoren
$$P_\pm = |\pm\vec{e}\rangle\langle\pm\vec{e}|$$
- Teilchen im Zustand $|\psi\rangle$: Messergebnis mit W'keit
$$w_\pm = \langle\psi|P_\pm|\psi\rangle = |\langle\pm\vec{e}|\psi\rangle|^2 \qquad (*)$$

Jedes Paar $\{|+\vec{e}\rangle, |-\vec{e}\rangle\}$ bildet o.n. Basis für $\mathbb{C}^2$,

$$|\vec{e}'\rangle = c_+|+\vec{e}\rangle + c_-|-\vec{e}\rangle \quad , \quad c_\pm = \langle\pm\vec{e}|\vec{e}'\rangle$$

(kohärente Superposition)

Allgemeines QM-System

- (Reine) Zustände

$$|\psi\rangle \quad \longleftrightarrow \quad P = |\psi\rangle\langle\psi|$$

(bis auf Phase) Projektor, Dim = 1

Dem klassischen Begriff der statistischen Mischung entsprechend

- Gemischte Zustände

Dichtematrizen, d.h. Operatoren P mit

$$P = P^*, \quad P \geq 0, \quad \mathrm{tr}\, P = 1$$

Spektraldarstellung:

$$P = \sum_k w_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

mit $w_k \geq 0$, $\sum_k w_k = 1$

→ Interpretation:
P ist die (inkohärente) Mischung der reinen Zustände $|\varphi_k\rangle$ mit W'keiten w_k.

Gemischter Zustand

$$P = \sum_k w_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

- Präparation von P: Präpariere $|\varphi_k\rangle$ mit W'keit w_k

- Erwartungswert von A im Zustand P

$$\langle A\rangle_P = \sum_k w_k \langle\varphi_k|A|\varphi_k\rangle$$

$$= \mathrm{tr}(PA)$$

Insbesondere: ja/nein-Observable (Ereignis
$(A = A^2)$: Wkeit des Eintretens

$$W = \mathrm{tr}(PA).$$

- Dynamik: $|\varphi_k\rangle \mapsto |\varphi_k(t)\rangle$ mit

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi_k(t)\rangle = H |\varphi_k(t)\rangle$$

$$\rightarrow \quad i\hbar \frac{d}{dt} P = \sum_k w_k \left(H|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| - |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| H \right)$$

$$= [H, P]$$ (Liouville-von Neumann

Beispiel: Spin $\frac{1}{2}$:

Vollständig gemischter Zustand

$$P = \frac{1}{2}\,|\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3| + \frac{1}{2}\,|-\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3| = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}$$

ist verschieden von jedem reinen Zustand $|\psi\rangle$.

Denn: Messung des Spins in Rtg $\vec{e}$

- In P:

$+\frac{\hbar}{2}$ mit W'keit $\frac{1}{2}\,|\langle\vec{e}\,|\vec{e}_3\rangle|^2 + \frac{1}{2}\,|\langle\vec{e}\,|-\vec{e}_3\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

$-\frac{\hbar}{2}$ " $= \frac{1}{2}$

unabhängig von $\vec{e}$

- In $|\psi\rangle$

$+\frac{\hbar}{2}$ mit W'keit $|\langle\vec{e}\,|\psi\rangle|^2$

$-\frac{\hbar}{2}$ " $|\langle-\vec{e}\,|\psi\rangle|^2$

abhängig von $\vec{e}$