Quantenmechanik II. Übung 2.

FS14 *Abgabe:* Di 11. März 2014

1. Zeitumkehr und Spin

Von der Zeitumkehr T wird verlangt, dass Ort und Impuls gemäss $T : (\vec{x}, \vec{p}) \mapsto (\vec{x}, -\vec{p})$ transformieren, und damit $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p} \mapsto -\vec{L}$; aus Analogie ebenso der Spin, $\vec{S} \mapsto -\vec{S}$. Allgemein gilt für den (antiunitären) Zeitumkehroperator U_T, dass $U_T^2 = c_T \mathbb{1}$ mit $c_T = \pm 1$ (vgl. Skript S. 66).

i) In der Theorie ohne Spin, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, ist (bis auf eine beliebige Phase) $U_T = K$, die komplexe Konjugation $(K\psi)(\vec{x}) = \overline{\psi(\vec{x})}$, womit $c_T = +1$. Finde den Zeitumkehroperator für ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$. Insbesondere muss $U_T^* \vec{S} U_T = -\vec{S}$ gelten. Zeige $c_T = -1$.

Hinweis: Verifiziere, dass

$$U_T = \sigma_2 K \equiv (\mathbb{1} \otimes \sigma_2) K$$

den Anforderungen genügt, wobei K nun die komplexe Konjugation auf $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ ist.

ii) Sei H ein Operator, z.B. der Hamiltonoperator eines abstrakten Systems für welches $c_T = -1$ ist. Zeige: Falls H invariant unter Zeitumkehr ist, $U_T^* H U_T = H$, dann ist die Entartung aller Eigenräume von H geradzahlig (Kramers-Entartung).

Hinweis: Zeige, dass mit $|\psi\rangle$ auch $U_T|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von H zum selben Eigenwert ist. Berechne $\langle \psi | U_T \psi \rangle$.

2. Spin-Präzession

Betrachte die Bewegung eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens in einem möglicherweise zeitabhängigen, magnetischen Feld $\vec{B}(t)$, wobei die räumliche Bewegung des Teilchens wegzulassen ist. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch die Energie $-\vec{B} \cdot \vec{\mu}$ des magnetischen Moments $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$, ($\gamma > 0$), das zum Spin $\vec{S}$ gehört:

$$H(t) = -\gamma \vec{B}(t) \cdot \vec{S} \, , \qquad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \, . \tag{1}$$

i) Reine Zustände $|\psi\rangle$ können als Projektoren aufgefasst werden: $P = |\psi\rangle\langle\psi|$. Zeige: Für einen Zustand $|\vec{e}\rangle$, dessen Spin in Richtung $\vec{e}$, ($|\vec{e}| = 1$) weist, vgl. (7.77), ist

$$P = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{e}) \, . \tag{2}$$

Zeige ferner: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spin in Richtung $\vec{e}_1$ beobachtet wird, wenn er zuvor in Richtung $\vec{e}_2$ wies, beträgt

$$|\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \, , \tag{3}$$

wobei $\theta = \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Hinweis: Wie drückt sich die linke Seite durch P_1, P_2 aus?

ii) Betrachte die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \ ,$$

für den Zustand $|\psi(t)\rangle \in \mathbb{C}^2$, wobei $\cdot = d/dt$. Zeige: Die Bewegungsgleichung für den entsprechenden Projektor $P = P(t)$ lautet

$$\dot{P} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, P] \ . \tag{4}$$

iii) Der Spinzustand zur Zeit $t = 0$ sei entlang der Richtung $\vec{e}(0)$ ausgerichtet: $|\psi(0)\rangle = |\vec{e}(0)\rangle$. Zeige, dass die Lösung der Gleichung (4) bei Hamiltonoperator (1) gegeben ist durch (2), wobei $\vec{e} = \vec{e}(t)$ die Lösung von

$$\dot{\vec{e}}(t) = \gamma\vec{e}(t) \wedge \vec{B}(t) \tag{5}$$

ist. Beachte: Dies ist die klassische Gleichung für einen Drehimpuls $\vec{S}$ in einem Feld $\vec{B}$, das auf $\vec{\mu}$ wirkt:

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = \gamma\vec{S} \wedge \vec{B} \ .$$

iv) Sei nun $\vec{B}(t) = B\vec{e}_3$ zeitlich konstant. Bestimme die Lösung für $\vec{e}(t)$, sowie die Wahrscheinlichkeit $P_\downarrow(t)$, den Spin nach unten gerichtet zu finden, wenn S_3 zum Zeitpunkt t gemessen wird.

Hinweis: Verwende

$$R(\vec{e}, \varphi)\vec{x} = (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e} + (\vec{x} - (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}))\cos\varphi + (\vec{e} \wedge \vec{x})\sin\varphi$$

und (3).

v) Spinresonanz liegt der Spin-Tomographie zu Grunde. Das Magnetfeld

$$\vec{B}(t) = B_0\vec{e}_3 + B_1(\vec{e}_1 \cos\omega t + \vec{e}_2 \sin\omega t) \tag{6}$$

bestehe aus einem zeitunabhängigen Feld B_0 in 3-Richtung und einem mit der Frequenz ω rotierenden Feld B_1 in der (12)-Ebene. Sei $\vec{e}(0) = \vec{e}_3$. Bestimme die Wahrscheinlichkeit $P_\downarrow(t)$, beobachte deren Oszillationen (Rabi-Oszillationen) und berechne deren Frequenz. Zeige, dass in Abhängigkeit von ω eine Resonanz auftritt.

Hinweis: Löse (5) durch Transformation auf ein Koordinatensystem, das mit Frequenz ω um die 3-Achse rotiert. Darin erscheint $\vec{B}$ als zeitunabhängig. Gleichung (3) kann ohne Rücktransformation verwendet werden (wieso?).