Kontinuumsmechanik
Musterlösung 13

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 13.1 Gravitationswellen in seichtem Wasser

Sei $h(x,y,t)$ die Tiefe des Wassers, also $h(x,y,t) = h_0(x,y) + \zeta(x,y,t)$ mit der Gleichgewichtstiefe $h_0(x,y)$ und der Auslenkung $\zeta(x,y,t)$. Wir betrachten Wellen, welche sich parallel zur Oberfläche ausbreiten. Also ist $v_z \ll v_x, v_y$ und wir schreiben die Eulergleichungen durch Vernachlässigung der Terme in 2. Ordnung in den kleinen Geschwindigkeiten v_x, v_y und der Terme in 1. Ordnung in der noch kleineren Geschwindigkeit v_z als

$$\rho\partial_t v_x = -\partial_x p, \tag{1}$$
$$\rho\partial_t v_y = -\partial_y p, \tag{2}$$
$$g = -\partial_z p. \tag{3}$$

An der Obefläche muss der Druck $p(z=\zeta) = p_0$ gleich dem atmosphärischen Druck sein. Aus Gl. (3) finden wir deshalb

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z). \tag{4}$$

Dies setzen wir in (1) und (2) ein und erhalten

$$\partial_t v_x = -g\partial_x\zeta, \tag{5}$$
$$\partial_t v_y = -g\partial_y\zeta. \tag{6}$$

Wir benötigen noch eine dritte Gleichung, um alle Unbekannten v_x, v_y und ζ zu bestimmen. Sie entspricht der Kontinuitätsgleichung für diesen Fall: Betrachte das Volumen unter einem infinitesimalen Oberflächenelement bei (x,y). In der Zeit dt fliesst folgende Menge Flüssigkeit aus dem Volumen:

$$\begin{aligned} &hv_x|_{x+dx,y}dydt - hv_x|_{x,y}dydt + hv_y|_{x,y+dy}dxdt - hv_y|_{x,y}dxdt \\ &\qquad = \partial_x(hv_x)|_{x,y}dxdydt + \partial_y(hv_y)|_{x,y}dxdydt. \end{aligned} \tag{7}$$

Dies muss der Veränderung des Volumens am Ort (x,y) entsprechen: $\partial_t h(x,y,t)dxdydt$. Also finden wir

$$\partial_t h + \partial_x(hv_x) + \partial_y(hv_y) = 0. \tag{8}$$

Da $h = h_0 + \zeta$ schreiben wir in 1. Ordnung nur

$$\partial_t h + \partial_x(h_0 v_x) + \partial_y(h_0 v_y) = 0. \tag{9}$$

Wir differenzieren nun nach t und erhalten

$$\partial_t^2\zeta + \partial_x(h_0\partial_t v_x) + \partial_y(h_0\partial_t v_y) = 0. \tag{10}$$

Einsetzen von (5) und (6) gibt schliesslich

$$\partial_t^2\zeta - g\partial_x(h_0\partial_x\zeta) - g\partial_y(h_0\partial_y\zeta) = 0. \tag{11}$$

Aufgabe 13.2 Gravitationswelle in Flüssigkeit mit beliebiger Viskosität

Wir betrachten eine monochromatische Welle, welche sich in x-Richtung ausbreitet. Die Oberfläche der Flüssigkeit sei die $x-y$-Ebene, das Problem ist also translationsinvariant in y-Richtung und wir haben $v_y = 0$. Wir suchen Lösungen der (Navier-Stokes-)Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t v_x &= \nu(\partial_x^2 v_x + \partial_z^2 v_x) - \rho^{-1}\partial_x p, && (12)\\ \partial_t v_z &= \nu(\partial_x^2 v_z + \partial_z^2 v_z) - \rho^{-1}\partial_z p - g, && (13)\\ \partial_x v_x + \partial_z v_z &= 0, && (14) \end{aligned}$$

deren Abhängigkeit von x und t von der Form $\exp(ikx - i\omega t)$ ist und die für $z < 0$ abfallen. Wir machen die Ansätze

$$\begin{aligned} v_x &= e^{i(kx-\omega t)} f_x(z), && (15)\\ v_z &= e^{i(kx-\omega t)} f_z(z), && (16)\\ p &= e^{i(kx-\omega t)} f_p(z) - \rho g z, && (17) \end{aligned}$$

und finden nach dem Einsetzen und lösen

$$\begin{aligned} v_x &= e^{i(kx-\omega t)}(Ae^{kz} + Be^{qz}), && (18)\\ v_z &= e^{i(kx-\omega t)}(-iAe^{kz} - i\frac{k}{q}Be^{qz}), && (19)\\ p &= e^{i(kx-\omega t)}\frac{\rho\omega}{k}Ae^{kz} - \rho g z, && (20) \end{aligned}$$

mit $q = \sqrt{k^2 - i\omega/\nu}$.
Die Konstanten A und B bestimmen wir aus den Randbedingungen, welche die Kräftefreiheit der Oberfläche sind, also

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = -p + 2\eta\partial_z v_z &= 0, && (21)\\ \sigma_{xz} = \eta(\partial_z v_x + \partial_x v_z) &= 0. && (22) \end{aligned}$$

Eingesetzt ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2kA + (m + k^2/m)B &= 0, && (23)\\ (i\rho\omega^2/k - i\rho g - 2\eta\omega k)A - (i\rho g k/m + 2\eta\omega k)B &= 0. && (24) \end{aligned}$$

Die Säkulargleichung führt dann auf

$$\sqrt{1 - i\omega/k^2\nu} = (1 - i\omega/2\nu k^2)^2 + g/4\nu^2 k^3, \tag{25}$$

deren Lösung die gesuchte Dispersionsrelation ist.
Wir betrachten nun die Grenzfälle grosser und kleiner Viskosität, also $\nu k^2 \gg \sqrt{gk}$ und $\nu k^2 \ll \sqrt{gk}$. Die Dispersion für $\nu \to 0$ ist $\omega = \pm\sqrt{gk}$. Wir schreiben daher $\omega = \pm\sqrt{gk}(1+\delta)$. Entwicklung in niedrigster Ordnung in $\delta \ll 1$ und $\nu k^2/\sqrt{gk} \ll 1$ gibt

$$\omega = \pm\sqrt{gk} - 2i\nu k^2,\ \nu k^2 \ll \sqrt{gk}. \tag{26}$$

Für $\nu \to \infty$ ist die Lösung $\omega = 0$. Also schreiben wir $\omega = \sqrt{gk}\ \delta$ und entwickeln in niedrigster Ordnung in $\delta \ll 1$ und $\sqrt{gk}/\nu k^2 \ll 1$ und erhalten

$$\omega = -ig/2\nu k,\ \sqrt{gk} \ll \nu k^2. \tag{27}$$

Aufgabe 13.3 Wann erzeugt Wind Wasserwellen?

Wir beschreiben die beiden Fluida, Luft und Wasser, als inkompressible, ideale Flüssigkeiten mit wirbelfreiem Geschwindigkeitsfeld, d.h.

$$\mathbf{v}_{\mathrm{W,L}} = \nabla\phi_{\mathrm{W,L}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \Delta\phi_{\mathrm{W,L}} = 0. \tag{28}$$

Deren Bewegungsgleichungen lauten

$$\partial_t \mathbf{v}_{\mathrm{W,L}} + (\mathbf{v}_{\mathrm{W,L}}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{\mathrm{W,L}} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{W,L}}}\nabla p + \mathbf{g}, \tag{29}$$

mit dem Gravitationsfeld $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. Der Grundzustand ($\rightarrow$ flache, ruhende Oberfläche) ist gegeben durch $\mathbf{v}_{\mathrm{W}} = 0$ und $\mathbf{v}_{\mathrm{L}} = u\mathbf{e}_x$. Betrachten wir nun kleine Abweichung $\mathbf{v}_{\mathrm{W}}$ und $\mathbf{v}_{\mathrm{L}} \rightarrow u\mathbf{e}_x + \mathbf{v}_{\mathrm{L}}$ mit $v_{\mathrm{W,L}} \ll 1$. In linearer Näherung finden wir die Bewegungsgleichungen

$$\partial_t \mathbf{v}_{\mathrm{W}} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{W}}}\nabla p + \mathbf{g}, \tag{30}$$

$$\partial_t \mathbf{v}_{\mathrm{L}} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{L}}}\nabla p + \mathbf{g}. \tag{31}$$

Für Potentialflüsse können diese Gleichungen umgeschrieben werden zu

$$\partial_t \phi_{\mathrm{W}} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{W}}} p_{\mathrm{W}} - gz, \tag{32}$$

$$\partial_t \phi_{\mathrm{L}} + u\partial_x\phi_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{L}}} p_{\mathrm{L}} - gz. \tag{33}$$

Wir bezeichnen die Grenzfläche Wasser-Luft mit $z = \zeta(x)$.[1] Sie beschreibt die Abweichung von der flachen, ruhenden Oberfläche in senkrechter Richtung (im Gleichgewichtszustand gilt $\zeta(x) = 0$ für alle x). Für $z = \zeta$ gilt $p_{\mathrm{W}} = p_{\mathrm{L}}$ und somit finden wir aus (32) und (33) in linearer Ordnung ($\zeta \approx 0$)

$$\partial_t \phi_{\mathrm{W}}|_{z=0} + g\zeta(x) = [\partial_t\phi_{\mathrm{L}}|_{z=0} + u\partial_x\phi_{\mathrm{L}} + g\zeta(x)]\frac{\rho_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{W}}} \tag{34}$$

Für das Geschwindigkeitsfeld in vertikaler (z-) Richtung erhalten wir mit $\mathbf{v}_{\mathrm{W,L}} = \nabla\phi_{\mathrm{W,L}}$ zwei weitere Gleichungen,

$$\partial_z \phi_{\mathrm{L}}|_{z=0} = \frac{d}{dt}\zeta = \partial_t\zeta(x) + u\partial_x\zeta, \tag{35}$$

$$\partial_z \phi_{\mathrm{W}}|_{z=0} = \frac{d}{dt}\zeta = \partial_t\zeta(x). \tag{36}$$

Hierbei wurde benutzt, dass wir mit raumfesten Koordinaten arbeiten und die Oberfläche eine Strömungslinie darstellt.
Dank der Translationsinvarianz in x und Zeit t genügt es, die einzelnen Fourier-Moden zu untersuchen. Dabei ist die Inkompressibilitätsbedingung in Gl.(28) einzubeziehen, daher kommen wir zum Ansatz

$$\zeta(x,t) = ae^{\alpha t}e^{ikx}, \quad \phi_{\mathrm{W,L}}(x,z,t) = a_{\mathrm{W,L}}e^{\alpha t}e^{ikx}e^{\pm kz}. \tag{37}$$

[1] Einfachheitshalber betrachten wir den speziellen y-invarianten Fall. Die Erweiterung auf vollständige 3-dimensionale Situation ist nicht wesentlich schwieriger. Es lässt sich zeigen, dass die instabilsten Wellen parallel zu Strömungsgeschwindigkeitsdifferenz ($u\mathbf{e}_x$) verlaufen.

Dieser beschreibt einen zeitlich exponentiellen Wachstum, falls $Re(\alpha) > 0$, was einer Instabilität der flachen Oberfläche entspricht.
Durch einsetzen von (37) in die Gleichungen (34), (35) und (36) finden wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} g(1-s) & -s(\alpha + iuk) & \alpha \\ \alpha + iuk & k & 0 \\ \alpha & 0 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a_{\mathrm{L}} \\ a_{\mathrm{W}} \end{pmatrix} = 0, \tag{38}$$

mit $s = \rho_{\mathrm{L}}/\rho_{\mathrm{W}}$. Damit diese Gleichung eine nicht-triviale Lösung besitzt, muss die Säkulargleichung erfüllt sein, d.h.

$$s(\alpha + iuk)^2 + \alpha^2 + gk(1-s) = 0. \tag{39}$$

Dies liefert uns für den Parameter α zwei mögliche Werte,

$$\alpha_{1,2} = \frac{-iusk \pm \sqrt{kg(s^2-1) + sk^2u^2}}{1+s}. \tag{40}$$

Für $u^2 > (1-s^2)g/ks$ existiert also ein α mit positivem Realteil. Daher erhalten wir für die Grenzgeschwindigkeit, oberhalb derer der Wind Wasserwellen erzeugt,

$$u_c = \sqrt{\frac{g}{k}\left(\frac{1-(\rho_{\mathrm{L}}/\rho_{\mathrm{W}})^2}{\rho_{\mathrm{L}}/\rho_{\mathrm{W}})}\right)}, \tag{41}$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$ mit λ der Wellenlänge der Strömung.
Bemerkung: Beachte, dass wir die Instabilität im Rahmen der Eulerschen Gleichung, ohne Reibung oder Viskosität, erhalten haben. Die Moden mit kleinster u_c entsprechen $k \to \infty$, also mit infinitesimal kurzer Wellenlänge. Zu beachten ist, dass die Viskosität gerade die kurzwelligen Störungen am stärksten unterdrückt.
Bemerkung 2: Für $u = 0$ und $\rho_L > \rho_W$ (dichtere Flüssigkeit oberhalb der weniger dichten) findet die Rayleigh–Taylor Instabilität statt. Für $u = 0$ und $\rho_L > \rho_W$ realisieren sich die Schwerewellen, deren Spezialfall für $\rho_L = 0$ die in der Vorlesung diskutierten Oberflächenwellen mit Dispersion $c = \omega/k = \mathrm{Im}(\alpha)/k = \sqrt{g/k}$ sind.