ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kontinuumsmechanik
Musterlösung 12

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 12.1 Schwimmen in einer viskosen Flüssigkeit

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Bewegung der Person entlang der x-Achse verläuft. Die Position des Bootes (der Person) bezeichnen wir mit $x_{B(P)}$. Gesucht ist die Distanz $d = x_B^f - x_B^i$, wobei die Indizes i und f für den Anfangs- und den Endpunkt stehen. Auf das Boot (Masse M) wirkt die Reibungskraft des Wassers sowie die Kraft, welche von der Person auf das Boot übertragen wird. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$M\ddot{x}_B = F_{\mathrm{Fl}} + F_{\mathrm{PB}}. \tag{1}$$

Für eine kleine Reynoldszahl ist die Kraft linear abhängig von der Geschwindikeit, $F_{\mathrm{Fl}} \propto \eta R \dot{x}_B$. Wegen 'actio=reactio' gilt die folgende Bewegungsgleichung für die Person (Masse m),

$$m\ddot{x}_P = -F_{\mathrm{PB}}. \tag{2}$$

Daher kann man Gleichung (1) schreiben als

$$M\ddot{x}_B = -\kappa \dot{x}_B - m\ddot{x}_P, \tag{3}$$

mit Reibungskoeffizienten κ. Da sowohl das Boot als auch die Person im Anfangs- und im Endzustand in Ruhe sind, erhalten wir durch Integration über t von t_i nach t_f und Division durch κ,

$$d = x_B|_i^f = -\frac{m}{\kappa}\dot{x}_P|_i^f - \frac{M}{\kappa}\dot{x}_B|_i^f = 0. \tag{4}$$

Daraus kann man schliessen, dass es unmöglich ist, in einer viskosen Flüssigkeit (bei kleiner Reynoldszahl) nur durch eine Verlagerung des Schwerpunktes vorwärtszukommen.

Aufgabe 12.2 Regentropfen bei kleiner Reynoldszahl

Bei einer kleinen Reynoldszahl erfährt eine Kugel mit Radius R und Geschwindigkeit u eine Reibungskraft, welche durch die Stoke'sche Formel $F = 6\pi\eta_{\mathrm{L}} R u$ gegeben ist. Im Gravtiationsfeld der Erde erfüllt die Kugel folgende Bewegungsgleichung,

$$m\ddot{z} = mg - 6\pi\eta_{\mathrm{L}} R\dot{z}, \tag{5}$$

mit der Kugelmasse $m = 4\pi R^3 \rho_{\mathrm{W}}/3$. Im stationären Fall $\ddot{z} = 0$ findet man folgende Beziehung zwischen dem Radius R und der Fallgeschwindigkeit $u = \dot{z}$,

$$u = \frac{2g\rho_{\mathrm{W}}}{9\eta_{\mathrm{L}}} R^2. \tag{6}$$

Obige Herleitung gilt allerdings nur für kleine Reynoldszahlen, d.h. $Re \ll 1$. Mit Gleichung (6) erhalten wir

$$Re = \frac{uR}{\nu_{\mathrm{L}}} = \frac{2g\rho_{\mathrm{W}}}{9\eta_{\mathrm{L}}\nu_{\mathrm{L}}} R^3, \tag{7}$$

wobei wir den Radius als Objektgrösse genommen haben. Für eine grobe Abschätzung der Gültigkeit von (6) suchen wir denjenigen Radius, für welchen gilt $Re = 1$. Dies ergibt den Maximalradius

$$R_{\max} = \left(\frac{9\eta_{\mathrm{L}}\nu_{\mathrm{L}}}{2g\rho_{\mathrm{W}}}\right)^{1/3} \approx 0.05\mathrm{mm}. \tag{8}$$

Mit (6) finden wir für die zugehörige Fallgeschwindigkeit

$$u \approx 32 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}. \tag{9}$$

Das Stoke'sche Gesetz darf also nur für Tropfen mit $R < R_{\mathrm{max}}$ angewendet werden. Ein gewöhnlicher Regentropfen ist jedoch grösser ($R \approx$ einige Millimeter) und die Beziehung (6) zwischen Radius und Fallgeschwindigkeit ist keine gute Näherung.

Aufgabe 12.3 Widerstand beim Verdrängen einer viskosen Flüssigkeit

Wir arbeiten in Zylinderkoordinaten und wählen den Ursprung im Zentrum der unteren Platte. Aus der Rotationssymmetrie folgt, dass der Fluss keinerlei θ-Abhängigkeit besitzt. Zusätzlich kann die z-Komponente im Gegensatz zur radialen Komponente vernachlässigt werden, $v_z \ll v_r$, da die Flüssigkeitsschicht sehr dünn ist und die Flüssigkeit daher nach aussen fliesst. Mit dem gleichen Argument kann man schliessen, dass $\partial_r v_r \ll \partial_z v_r$. Die Flüssigkeit erfüllt also die folgenden Bewegungsgleichungen (Navier-Stokes) sowie die Kontinuitätsgleichung

$$\eta \partial_z^2 v_r = \partial_r p, \quad \partial_z p = 0, \tag{10}$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r v_r) + \partial_z v_z = 0. \tag{11}$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} v_r(z=0) &= 0, & v_z(z=0) &= 0, \\ v_r(z=h) &= 0, & v_z(z=h) &= -u, \\ p(r=R) &= p_0, \end{aligned} \tag{12}$$

mit h der Distanz zwischen den beiden Platten und p_0 dem äusseren Druck. Mit Gleichung (10) folgt

$$v_r = \frac{1}{2\eta} \partial_r p z(z-h). \tag{13}$$

Setzen wir dieses Resultat ein in die Kontinuitätsgleichung und integrieren wir über z, so können wir das Verhalten des Druckes mit der Plattengeschwindigkeit u in Verbindung bringen,

$$0 = \frac{1}{r} \partial_r \int_0^h dz \, r v_r - u = -\frac{h^3}{12\eta r} \partial_r (r \partial_r p) - u. \tag{14}$$

Mit der Randbedingung (12) finden wir den folgenden Druckverlauf zwischen den beiden Platten,

$$p(r) = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3}(R^2 - r^2). \tag{15}$$

Die Widerstandskraft, welche durch die Flüssigkeit hervorgerufen wird, ist gegeben durch die Differenz

$$F = \int_{\mathrm{Disk}} dS \, p - \int_{\mathrm{Disk}} dS \, p_0 = 3\pi \eta u \frac{R^4}{2h^3}. \tag{16}$$

Aufgabe 12.4 Widerstand einer Gasblase

Bei hohen Reynoldzahlen kann man, abgesehen von einer dünnen Oberflächenschicht, die Bewegung einer Flüssigkeit als idealen Fluss betrachten. Die Vernachlässigung der Viskosität des Gases hat zur Folge, dass nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Grenze Flüssigkeit-Gas verschwinden muss. Daher entsteht praktisch keine

Oberfächenschicht und wir können als Geschwindigkeitsfeld überall den Potentialfluss einer idealen Flüssigkeit um eine Kugel nehmen (siehe Skript S.115),

$$\mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{u}], \tag{17}$$

wobei wir angenommen haben, dass sich die Kugel mit u in die negative x-Richtung bewegt. Bei dieser Näherung vernachlässigen wir also die Oberflächenschicht sowie den schmalen, turbulenten Nachstrom (wake). Die Energiedissipation vereinfachen wir zunächst mit $\partial_i v_j = -\partial_i \partial_j \phi = \partial_j v_i$,

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{\text{kin}} &= -\frac{\eta}{2}\int dV \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 \\
&= -2\eta \int dV \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \\
&= -2\eta \int dV \left[\partial_j \left(v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - v_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\right] \\
&= -2\eta \int dS\ n_j \left(v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + 2\eta \int dV\, v_i \partial_i \underbrace{(\partial_j^2 \phi)}_{=0} \\
&= -\eta \int d\mathbf{S}\cdot\nabla(\mathbf{v}^2).
\end{aligned} \tag{18}$$

Mit Gleichung (17) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{\text{kin}} &= -\eta \int \nabla v^2 \cdot d\mathbf{S} \\
&= -2\pi\eta \int_0^\pi (\partial_r v^2)_{r=R} R^2 \sin\theta d\theta \\
&= 3\pi\eta u^2 R \int_0^\pi (3\cos^2\theta + 1)\sin\theta d\theta \\
&= 12\pi\eta R u^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Die Dissipation wird von der Widerstandskraft hervorgerufen, d.h. $\dot{E}_{\text{kin}} = F_{\text{drag}} \cdot u$. Daher erhalten wir

$$F_{\text{drag}} = 12\pi\eta R u. \tag{20}$$