Kontinuumsmechanik
Musterlösung 11

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 11.1 Dissipationsrate

Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\eta}{2}\int_V dV \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \tag{1}$$

Wir schreiben nun

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 + 4\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \tag{2}$$

$$= 2\left(\nabla \wedge \boldsymbol{v}\right)^2 + 4\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - 4v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k \partial x_i} \tag{3}$$

$$= 2\left(\nabla \wedge \boldsymbol{v}\right)^2 + 4\nabla\cdot[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] - 4(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{4}$$

$$= 2\left(\nabla \wedge \boldsymbol{v}\right)^2 + 4\nabla\cdot[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}], \tag{5}$$

wobei wir im letzten Schritt die Inkompressibilität ($\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$) benützt haben. Also wird

$$\frac{dE}{dt} = -\eta\int_V dV \left(\nabla \wedge \boldsymbol{v}\right)^2 + 2\nabla\cdot[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] \tag{6}$$

$$= -\eta\int_V dV \left(\nabla \wedge \boldsymbol{v}\right)^2 - 2\eta\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}]. \tag{7}$$

Die Bedingung des ruhenden Gefässes ($\boldsymbol{v}|_{\partial V} = 0$) liefert uns das gewünschte Resultat.

Aufgabe 11.2 Vortex in viskoser Flüssigkeit

Für $t = 0$, folgt aus $\omega = \nabla \wedge \boldsymbol{v} = \omega_0 \boldsymbol{e}_z \delta^{(2)}(r)$ sofort (in Zylinderkoordinaten) $v_r = v_z = 0$ und $v_\varphi = \omega_0/2\pi r$. Wird eine Rotation ($\nabla\wedge$) auf die Navier-Stokes Gleichung angewandt, so erhalten wir

$$\rho\partial_t\omega + \rho\nabla \wedge [(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] = \eta\Delta\omega. \tag{8}$$

Aufgrund der Symmetrien (Translation entlang z und Rotation um $\boldsymbol{e}_z$) gilt $\omega(r)\|\boldsymbol{e}_z$ und $\boldsymbol{v}(r)\|\boldsymbol{e}_\varphi$. Somit verschwindet $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = 0$ und die Gleichung (8) vereinfacht sich zu

$$\rho\partial_t\omega = \eta\Delta\omega, \tag{9}$$

und lässt sich durch Fouriertransformation lösen

$$-i\nu\rho\omega + \eta k^2\omega = 0 \Longrightarrow \nu = -i\frac{\eta}{\rho}k^2. \tag{10}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann ($k^2 = k_x^2 + k_y^2$)

$$\omega(r,t) = \int A(k_x,k_y)e^{i(k_x x + k_y y) - tk^2\eta/\rho}\frac{dk_x}{2\pi}\frac{dk_y}{2\pi}. \tag{11}$$

Bei $t = 0$ ist $\omega(r) = \omega_0 \delta^{(2)}(r)$, also folgt daraus $A(k_x, k_y) = \omega_0$ und

$$\omega(r,t) = \omega_0 \int \frac{d^2k}{4\pi^2} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - tk^2\eta/\rho} \tag{12}$$
$$= \frac{\omega_0}{4\pi^2} \int \left(e^{-t\eta/\rho(k_x - ix\rho/2t\eta)^2 - x^2\rho/4t\eta} \right) \left(e^{-t\eta/\rho(k_y - iy\rho/2t\eta)^2 - y^2\rho/4t\eta} \right) dk_x dk_y \tag{13}$$
$$= \frac{\omega_0 \rho}{4\pi\eta t} e^{-r^2\rho/4t\eta}. \tag{14}$$

Mit zunehmender Zeit t wird also die Vortizität auf das ganze Volumen verteilt, $\sigma(t) = 2t\eta/\rho$, und zwar desto schneller je grösser die Viskosität und je kleiner die Dichte der Flüssigkeit ist. Indes bleibt die totale Vortizität konstant,

$$\int \omega(r,t) d^2r = \frac{\omega_0 \rho}{2\eta t} \int_0^\infty e^{-r^2\rho/4t\eta} r dr = \omega_0. \tag{15}$$

Aufgabe 11.3 Dimensionelle Abschätzungen

a) Für kleine Re wird die Navier-Stokes Gleichung zu

$$\rho \partial_t v = \eta \Delta v. \tag{16}$$

Damit schätzen wir ab:

$$\rho \frac{u}{\tau} \sim \eta \frac{u}{R^2}. \tag{17}$$

wobei u die Geschwindigkeit des Körpers, R dessen lineare Dimension und τ die gesuchte Zeit ist. Wir finden also

$$\tau \sim \frac{\rho R^2}{\eta}. \tag{18}$$

Beachte, dass dieses Ergebnis von u unabhängig ist!

b) Aus dimensionellen Überlegungen ($[F]$ =kg m/s^2, $[\eta]$ =kg/ms) finden wir $F \sim \eta u R$ im stationären Fall (siehe Vorlesung). Da $\omega \ll \tau^{-1}$, gilt dies auch in unserem Grenzwert eines quasistatisch oszillierenden Körpers. Sei u die typische Geschwindigkeit des Körpers (d.h. u ist die Amplitude). Dann gilt

$$\frac{dE}{dt} = P = Fu \sim \eta R u^2. \tag{19}$$

Die Energie wird mit doppelter Frequenz dissipiert.