Kontinuumsmechanik
Musterlösung 9

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 9.1 Stagnationspunkt

Wir betrachten eine kleine Umgebung des Stagnationspunktes, in welcher wir die Grenzfläche als Ebene approximieren. Wir wählen die einfallende Strömung als entlang der z-Achse gerichtet und entwickeln das Potential φ in der Umgebung des Stagnationspunktes (den wir als den Nullpunkt wählen) bis zweiter Ordnung, d.h. als

$$\varphi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx. \tag{1}$$

Den konstanten Term in φ haben wir o.B.d.A. Null gesetzt. Die Koeffizienten werden werden bestimmt durch die Tatsache, dass $\Delta\varphi = 0$ gelten und die Randbedingungen $v_z = \partial\varphi/\partial z = 0$ für $z = 0$ und alle x, y sowie $v_x = \partial\varphi/\partial x = v_y = \partial\varphi/\partial y = 0$ am Stagnationspunkt, d.h. für $x = y = z = 0$. Wir finden also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\varphi &= A + B + C = 0, && (2)\\
\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=y=z=0} &= a = 0, && (3)\\
\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{x=y=z=0} &= b = 0, && (4)\\
\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} &= c + Ey + Fx = 0, \quad \forall x, y, && (5)
\end{aligned}$$

wobei aus der letzten Gleichung $c = E = F = 0$ folgt. Wir haben also

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2 + Dxy. \tag{6}$$

Durch eine Rotation in der $x-y$-Ebene können wir D in A und B absorbieren. Ausserdem liefert uns die Rotationssymmetrie um die z-Achse noch $A = B$, d.h.

$$\varphi = A(x^2 + y^2 - 2z^2). \tag{7}$$

Vgl. den zweidimensionalen Fall im Skript!
Wir berechnen nun noch die Strömungslinien. Diese sind gegeben durch $dx/v_x = dz/v_z$ (identisch für y), d.h. durch

$$\frac{dx}{2Ax} = \frac{dz}{-4Az}, \tag{8}$$

und wir finden, dass entlang der Strömungslinien gilt

$$x^2 z = \text{const.} \tag{9}$$

Aufgabe 9.2 Strömung um Barriere

Die konforme Abbildung, welche den Einheitskreis auf das Intervall $[-2, 2]$ abbildet, ist gegeben durch

$$\xi = z + \frac{1}{z}. \tag{10}$$

Das zur uniformen Strömung in x-Richtung gehörende Potential ist $w'(\xi) = \xi$. Deshalb ist das Potential $w(z)$ einer kreisförmigen (=zylinderförmigen) Barriere gegeben durch

$$w(z) = w'(\xi(z)) = z + \frac{1}{z}. \tag{11}$$

Wir wollen dies mit dem Resultat aus der letzten Serie vergleichen und berechnen daher

$$\varphi(x, y) = \Re(w) = x + \frac{x}{x^2 + y^2}. \tag{12}$$

Dies ist identisch mit dem vorherigen Resultat bis auf ein anderes Vorzeichen (da sich hier die Flüssigkeit und nicht der Zylinder bewegt) und den linearen Term (da die Strömung im Unendlichen nicht verschwindet).
Als nächstes wollen wir die Strömung um eine stehende Barriere berechnen. Die Abbildung, welche das Intervall $[-2i, 2i]$ auf den Einheitskreis abbildet, ist gegeben durch

$$\xi = \frac{z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{z^2 + 4}. \tag{13}$$

Setzt man die Abbildungen (10) und (13) zusammen, so erhält man

$$w(z) = \pm\sqrt{z^2 + 4}, \tag{14}$$

wobei wir hier das Vorzeichen so wählen müssen, dass die Strömung im Unendlichen gleich bleibt, d.h. $w(z) = \sqrt{z^2 + 4}$ falls $\Re(z) > 0$ und $w(z) = -\sqrt{z^2 + 4}$ falls $\Re(z) < 0$. Daraus finden wir

$$\varphi(x, y) = \Re(w) = \mathrm{sign}(x)\sqrt{\frac{x^2 - y^2 + 4}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2}}, \tag{15}$$

und

$$\begin{aligned} v_x &= \mathrm{sign}(x)\frac{x}{2\varphi(x, y)}\left(1 + \frac{x^2 + y^2 + 4}{\sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2}}\right), && (16)\\ v_y &= -\mathrm{sign}(x)\frac{y}{2\varphi(x, y)}\left(1 - \frac{x^2 + y^2 - 4}{\sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2}}\right). && (17) \end{aligned}$$

Aufgabe 9.3 Oszillation

Das Potential der Strömung einer idealen Flüssigkeit um eine sich bewegende Kugel ist gegeben durch

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \tag{18}$$

wobei R der Radius und $\mathbf{u}$ die Geschwindigkeit der Kugel ist. Infolgedessen ist der induzierte Massetensor gegeben durch (siehe Seite 128 im Skript)

$$m_{ik} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3\delta_{ik}, \tag{19}$$

mit ρ der Dichte der Flüssigkeit, und der Widerstand ist

$$\mathbf{F} = -\frac{2}{3}\pi\rho R^3\frac{d\mathbf{u}}{dt}. \tag{20}$$

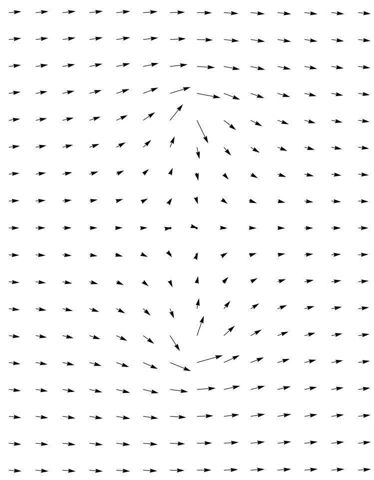

Abbildung 1: Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit um eine stehende Barriere.

Die Bewegungsgleichung wird deshalb zu (siehe Seite 131 im Skript)

$$\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_0 + \frac{\rho}{2})\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}, \tag{21}$$

wobei ρ_0 die Dichte der Kugel und $\mathbf{f}$ die externe Kraft ist. Der Koeffizient der Beschleunigung ist also die effektive Masse der Kugel in der Flüssigkeit und besteht aus der tatsächlichen Masse der Kugel und der Hälfte der Masse der verdrängten Flüssigkeit.
Wird die Kugel durch eine oszillierende Flüssigkeit bewegt, so wird die Bewegungsgleichung zu (siehe Seite 132 im Skript)

$$\mathbf{u} = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0}\mathbf{v}. \tag{22}$$

Für $\rho_0 > \rho$ ist die Kugel langsamer als die Flüssigkeit, für $\rho_0 < \rho$ ist sie schneller.