Aufgabe 8.1 Dynamik von zwei linearen Wirbelfäden

Lineare Wirbelfäden sind translationsinvariant entlang ihrer Achse (in welche wir die z-Achse legen). Daher kann das Problem als rein zwei-dimensional behandelt werden. Die Wirbelfäden $\mathbf{\Omega}_1$ und $\mathbf{\Omega}_2$ durchstossen die $(z = 0)$ - Ebene bei $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. In dieser Ebene erzeugen sie das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{\Omega}_1 \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} + \frac{\mathbf{\Omega}_2 \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2}. \tag{1}$$

Mit dem Abstandsvektor $\mathbf{d} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ lässt sich das Geschwindigkeitsfeld beim Wirbel 1 bzw. 2 schreiben als

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{\Omega}_2 \wedge \mathbf{d}}{2\pi|\mathbf{d}|^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{\mathbf{\Omega}_1 \wedge \mathbf{d}}{2\pi|\mathbf{d}|^2}. \tag{2}$$

Da sich ein Wirbel mit der Flüssigkeit mitbewegt, folgt aus Gleichung (2), dass bei einem entgegengesetzt orientierten Wirbelpaar die Geschwindigkeiten gleich sind,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \perp \mathbf{d}, \tag{3}$$

und die Wirbelbewegungen auf zwei parallelen Geraden mit Abstand $\mathbf{d}$ verlaufen. Die Geschwindigkeiten eines gleich orientierten Paares hingegen sind entgegengesetzt gleich. Dies führt zu Trajektoren auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius $|\mathbf{d}|/2$.

Aufgabe 8.2 Potentialströmung um unendlich langen Zylinder

Wir arbeiten in Zylinderkoordinaten (r, θ, z) und wählen den Ursprung des Koordinatensystems auf der Zylinderachse. Aufgrund der Translationsinvarianz entlang dieser Achse wird das Resultat nicht von z abhängen. Das Potential des Geschwindigkeitsfeldes einer inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt die Laplace-Gleichung,

$$\Delta\phi = 0. \tag{4}$$

Zusätzlich fordern wir folgende Randbedingungen: die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \nabla\phi$ der Flüssigkeit verschwindet im Unendlichen und ist gleich der Normalkomponente der Geschwindigkeit des Zylinders auf dessen Oberfläche, d.h.,

$$\phi(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) = 0,\ r \to \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{v}|_{r=R} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \tag{5}$$

mit der Oberflächennormalen $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Beachte, dass diese Randbedingungen bezüglich der raumfesten Koordinaten $\mathbf{x}$ angegeben sind. Analog zum Problem der umströmten Kugel (siehe Vorlesung) wählen wir für ϕ den einfachsten Ansatz, welcher z-unabhänging ist und im Unendlichen verschwindet,

$$\phi(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{r}. \tag{6}$$

Der konstante Vektor $\mathbf{A}$ wird bestimmt durch die zweite Randbedingung (5),

$$\mathbf{v}|_{r=R} \cdot \mathbf{n} = \nabla\phi|_{r=R} \cdot \mathbf{n} = \partial_r\Big(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{r}\Big)|_{r=R} = -\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{R^2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \tag{7}$$

Somit gilt $\mathbf{A} = -R^2\mathbf{u}$ und wir finden für das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) = \frac{R^2}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}]. \tag{8}$$

Der Druck erfüllt die Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\partial_t\phi = f(t). \tag{9}$$

Da sich der Ursprung des Koordinatensystems mit Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ bezüglich des raumfesten Systems bewegt ($\phi = \phi(\mathbf{x} - \mathbf{u}t, \mathbf{u})$), gilt

$$\partial_t\phi = \nabla_{\mathbf{u}}\phi \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi. \tag{10}$$

Diese Grösse sowie die Geschwindigkeit der Flüssigkeit verschwinden im Unendlichen. Daher können wir die rechte Seite von (9) gleich dem Druck p_0 im Unendlichen setzen. Bei $r = R$ hat (10) folgende Form,

$$\partial_t\phi|_{r=R} = -R\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} - 2u^2\cos^2\theta + u^2, \tag{11}$$

wobei θ den Winkel zwischen $\mathbf{n}$ und $\mathbf{u}$ bezeichnet. Für den Druck auf der Zylinderoberfläche finden wir

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2(4\cos^2\theta - 3) + \rho R\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}. \tag{12}$$

Aufgabe 8.3 Auffüllen eines sphärischen Lochs

Wir wählen den Koordinatenursprung in der Lochmitte. Auf Grund der Rotationssymmetrie hat das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit die Form $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r)\mathbf{e}_r$. Die Eulergleichung lautet somit

$$\partial_t v + v\partial_r v = -\frac{1}{\rho}\partial_r p, \tag{13}$$

wobei p den lokalen Druck und ρ die konstante Dichte der Flüssigkeit bezeichnen. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt unter Benutzung der Rotationssymmetrie und des Satzes von Stokes

$$4\pi\rho r^2 v = \int_{\partial B_r} \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{B_r} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v})\, dV = -\int_{B_r} \partial_t\rho\, dV \equiv F(t) \quad \Rightarrow \quad r^2 v = f(t), \tag{14}$$

mit $f(t) = F(t)/4\pi\rho$. Einsetzen von (14) in (13) und integrieren über r vom momentanen Lochradius $r = R(t) \leq a$ bis $r = \infty$ ergibt

$$-\frac{\partial_t f(t)}{R} + \frac{1}{2}V^2 = \frac{p_0}{\rho}, \tag{15}$$

mit Geschwindigkeit an der Lochoberfläche $V(t) = dR(t)/dt$ und Druck im Unendlichen p_0. Dabei wurde benutzt, dass die Geschwindigkeit im Unendlichen und der Druck an der Lochoberfläche verschwinden. Mit $f(t) = R(t)^2V(t)$ (Gleichung (14)) kann die f-Abhängigkeit in Gleichung (15) eliminiert werden,

$$-\frac{3V^2}{2} - \frac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR} = \frac{p_0}{\rho}. \tag{16}$$

Mit der Anfangsbedingung $V = 0$ bei $R = a$ (Flüssigkeit an Oberfläche anfangs in Ruhe) folgt durch Integration

$$V = \frac{dR}{dt} = -\left[\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)\right]^{1/2}. \tag{17}$$

Somit erhalten wir für die Auffüllzeit

$$\tau = \int_0^a dR \left[\frac{2p_0}{3\rho} \big(\frac{a^3}{R^3} - 1 \big) \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{3\pi a^2 \rho}{2p_0}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \propto \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}. \tag{18}$$

Beim letzten Schritt wurde das Integral $\int_0^a dR(a^3/R^3 - 1)^{-1/2}$ in eine Beta-Funktion $B(x, y) = \int_0^1 dt\, t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ mit $x = 5/6$, $y = 1/2$ umgeschrieben und die Identitäten $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y)$ und $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ benutzt.