ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kontinuumsmechanik
Musterlösung 7

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 7.1 Schraubenversetzungen

Wir nehmen an, dass der Halbraum $x \geq 0$ gefüllt (und der Halbraum $x < 0$ leer) sei. Die Schraubenversetzung verlaufe entlang $\boldsymbol{\tau} = (0,0,1)$ mit $(x_0, y_0, 0) = (d, 0, 0)$, und $\boldsymbol{b} = (0,0,b)$. Ist die Versetzung gegeben durch

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x-d}\right), \tag{1}$$

erhalten wir als Deformationstensor in karthesischen Koordinaten

$$u_{zx} = -\frac{b}{4\pi}\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \qquad u_{zy} = \frac{b}{4\pi}\frac{(x-d)}{(x-d)^2+y^2}. \tag{2}$$

Mit dem Hookschen Gesetz folgt sofort das erzeugte Spannungsfeld,

$$\sigma_{zx} = -\mu\frac{b}{2\pi}\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \qquad \sigma_{zy} = \mu\frac{b}{2\pi}\frac{(x-d)}{(x-d)^2+y^2}. \tag{3}$$

Dieses Spannungsfeld erzeugt eine nicht-verschwindende Kraft der Form

$$\sigma_{zx} n_x = -\mu\frac{b}{2\pi}\frac{y}{d^2+y^2} \tag{4}$$

auf der Oberfläche $x = 0$. Somit beschreibt das Verschiebungsfeld (1) **nicht** die gewünschten Eigenschaft einer kräftefreien Oberfläche. Setzen wir jedoch eine *virtuelle* Spiegelversetzung (in Analogie zur Spiegelladung) in den Raum $x < 0$ [mit $\boldsymbol{\tau}' = (0,0,1)$, $(x_0', y_0', 0) = (-d, 0, 0)$, und $\boldsymbol{b}' = (0,0,-b)$], erhalten wir

$$u_z = \frac{b}{2\pi}\Big[\arctan\big(\frac{y}{x-d}\big) - \arctan\big(\frac{y}{x+d}\big)\Big]. \tag{5}$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass die Oberfläche $x = 0$ kräftefrei wird, da σ_{zx} verschwindet. Der Ausdruck (5) beschreibt korrekt das Verschiebungsfeld einer Schraubenversetzung in einem Halbraum.
Da sich die Schraubenversetzung und ihr (durch die Oberfläche erzwungenes) Spiegelbild gegenseitig anziehen, wirkt eine attraktive Kraft der Stärke

$$f = \mu\frac{b^2}{2\pi(2d)}, \tag{6}$$

und somit zieht die freie Oberfläche die Versetzung mit derselben Kraft f an. Die Kraft kann auch aus der Ableitung der Gesamtenergie des Halbraumes ($x > 0$) bestimmt werden.

Aufgabe 7.2 Inkompressibler Stern

Die Gleichgewichtsbedingung in einer inkompressiblen Flüssigkeit lautet

$$\boldsymbol{\nabla} p = \rho \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

Da wir es mit einem rotationssymmetrischen Problem zu tun haben, wird diese Gleichung vereinfacht zu

$$\partial_r p(r) = -\rho g(r). \tag{8}$$

Wegen $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{g} \propto \rho$ und einer konstanten Dichte ρ finden wir leicht (siehe Serie 2) $g(r) = g_0 r/R$, mit $g_0 = (4\pi/3)G\rho R$. Deshalb gilt

$$\partial_r p(r) = -\rho g_0 r/R \quad \Rightarrow \quad p(r) = -\frac{\rho g_0 r^2}{2R} + \text{const.} \tag{9}$$

Auf der Oberfläche gilt $p(R) = 0$, also

$$p(r) = \frac{\rho g_0 R}{2}(1 - r^2/R^2) = \frac{2\pi}{3} G\rho^2 (R^2 - r^2). \tag{10}$$

Aufgabe 7.3 Rotierende Flüssigkeit

Im Gleichgewicht gilt $\boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{F}$. Wir wählen die z-Achse so, dass für die totale Volumenkraft aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft gilt

$$\boldsymbol{F} = -\rho g \boldsymbol{e}_z + \rho\omega^2 r \boldsymbol{e}_r. \tag{11}$$

Für $p = p(r,z)$ folgt somit $\boldsymbol{e}_r \partial_r p + \boldsymbol{e}_z \partial_z p = -\rho g \boldsymbol{e}_z + \rho\omega^2 r \boldsymbol{e}_r$ und damit komponentenweise

$$\partial_z p = -\rho g, \qquad \partial_r p = \rho\omega^2 r. \tag{12}$$

Diese Gleichungen können wir integrieren und erhalten

$$p(r,z) = \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 - \rho g z + \text{const.} \tag{13}$$

Auf der Oberfläche gilt $p = p_0 = \text{const.}$ und damit

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0(\omega, R, h) \tag{14}$$

Die Form der Oberfläche ist eine Parabel und unabhängig von ρ. Das Minimum z_0 der Parabel wird durch die anfängliche Füllhöhe h des Zylinders (ohne Rotation), dessen Radius R und der Kreisfrequenz bestimmt. Integriert man das Volumen der Flüssigkeit erhält man die Bestimmungsgleichung

$$2\pi\left(\frac{\omega^2}{2g}\frac{R^4}{4} + z_0 \frac{R^2}{2}\right) = \pi R^2 h. \tag{15}$$

Somit gilt

$$z_0(\omega, R, h) = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \tag{16}$$

Bemerkung: Diese Beschreibung bricht zusammen, wenn $\omega > (4gh/R^2)^{1/2}$ ist, da dann der Boden des Gefässes relevant wird.