Aufgabe 6.1 Love-Wellen

Love-Wellen sind Lösungen der Wellengleichung

$$\partial_t^2 \mathbf{u}_{(B)} - c_{(B)}^2 \Delta \mathbf{u}_{(B)} = 0, \tag{1}$$

mit transversaler Phasengeschwindigkeit $c_{(B)}$. Zusätzlich müssen folgende Randbedingungen erfüllt werden:

i) Kräftefreie Oberfläche bei $z = H$, d.h. $\sigma_{ik} n_k = \sigma_{iz} = 0$

ii) Stetiges Auslenkungsfeld $\mathbf{u}$ (kein Zerreissen des Mediums), insbesondere bei $z = 0$

iii) Die Flächenspannungen erfüllen an der Grenzschicht $z = 0$ 'actio=reactio'

iv) Kein unbegrenztes Anwachsen des Auslenkungsfeldes für $z \to -\infty$

Mit (1) und Randbedingung iv) erhalten wir für $z < 0$

$$\mathbf{u} = C e^{\kappa z} e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_y, \qquad \kappa = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}, \tag{2}$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante C. Ebenso findet man das Auslenkungsfeld in der Oberflächenschicht

$$\mathbf{u}_B = [A_1 e^{i\kappa_B z} + A_2 e^{-i\kappa_B z}] e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_y, \qquad \kappa_B = \sqrt{\omega^2/c_B^2 - k^2}, \tag{3}$$

mit Konstanten $A_{1,2}$. Bemerke, dass beide Deformationsfelder, $\mathbf{u}$ und $\mathbf{u}_B$, eine reine Scherung aufweisen – daher ergibt sich aus Hookeschen Gesetz die einfache Beziehung $\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij}$. Mit der Bedingung i) folgt, dass $\sigma_{B,yz}(z = H) = 0$, also $u_{B,yz}(z = H) = 0$, also $\partial_z u_{B,y}$ bei $z = H$ verschwinden muss; somit

$$\partial_z u_{B,y}(z = H) = i\kappa_B (A_1 e^{i\kappa_B H} - A_2 e^{-i\kappa_B H}) = 0. \tag{4}$$

Weiterhin folgt mit ii) die Beziehung

$$C = A_1 + A_2. \tag{5}$$

Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes kann man die Randbedingung iii)

$$\sigma_{B,iz}(z = 0) = \sigma_{iz}(z = 0), \tag{6}$$

(beachte, dass $\mathbf{n}_B = -\mathbf{n}$) umschreiben in (einzige Bedingung)

$$\mu_B \partial_z u_{B,y}(z = 0) = \mu \partial_z u_y(z = 0), \quad \text{bzw.} \quad \mu_B i\kappa_B (A_1 - A_2) = \mu\kappa C. \tag{7}$$

Zusammenfügen der Gleichungen (4), (5) und (7) ergibt

$$\tan \kappa_B H = \frac{\mu\kappa}{\mu_B \kappa_B}. \tag{8}$$

Nach Voraussetzung gilt $\kappa > 0$ (exponentielles Unterdrücken der Love-Welle mit Entfernung von der Oberfläche). Gleichung (8) besitzt nur reelle Lösungen. Daher muss auch κ_B reell sein – aus Gl.(2) und (3) bekommen wir die Bedingung für Existenz einer Love-Welle,

$$\sqrt{\frac{\mu_B}{\rho_B}} = c_B \leq \frac{\omega}{|k|} < c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{9}$$

Aufgabe 6.2 Spannung einer "Versetzungswand"

Aus der Vorlesung (S.84) ist bekannt, dass der Spannungstensor einer Stufenversetzung mit Versetzungslinie parallel zur z-Achse und Burgersvektor $(b, 0, 0)$ folgende nicht-verschwindenden Komponenten besitzt,

$$\sigma_{xx} = -bBy\frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = bBy\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = bBx\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \tag{10}$$

mit der Konstante $B = \mu/2\pi(1-\sigma)$. Betrachten wir nun unendlich viele, im Abstand d in y-Richtung aneinandergereihte solche Stufenversetzungen ergeben sich die Gesamtspannungen via Superposition der Einzelspannungen, d.h.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{\text{tot}} &= -bB\sum_{n=-\infty}^{\infty}(y-nd)\frac{3x^2+(y-nd)^2}{[x^2+(y-nd)^2]^2},\\
\sigma_{yy}^{\text{tot}} &= bB\sum_{n=-\infty}^{\infty}(y-nd)\frac{x^2-(y-nd)^2}{[x^2+(y-nd)^2]^2},\\
\sigma_{xy}^{\text{tot}} &= bBx\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^2-(y-nd)^2}{[x^2+(y-nd)^2]^2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Wir definieren die zwei Funktionen

$$\begin{aligned}
I(\alpha,\beta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\beta-n}{\alpha^2+(\beta-n)^2},\\
J(\alpha,\beta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+(\beta-n)^2},
\end{aligned} \tag{12}$$

mit $\alpha = x/d$ und $\beta = y/d$. Die Summen (11) lassen sich dann schreiben als

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{\text{tot}} &= \frac{bB}{d}\big[-I(\alpha,\beta)+\alpha\partial_\alpha I(\alpha,\beta)\big],\\
\sigma_{yy}^{\text{tot}} &= -\frac{bB}{d}\big[I(\alpha,\beta)+\alpha\partial_\alpha I(\alpha,\beta)\big],\\
\sigma_{xy}^{\text{tot}} &= -\frac{bB}{d}\alpha\big[J(\alpha,\beta)+\alpha\partial_\alpha J(\alpha,\beta)\big].
\end{aligned} \tag{13}$$

Für die Berechnung von $I(\alpha,\beta)$ und $J(\alpha,\beta)$ nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass α positiv ist. Mit Hilfe der Poissonschen Summenformel (siehe z.Bsp. *http://www.math.ethz.ch/˜felder/mmp/mmp1/*, Sektion 1.4)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} du\, f(u)e^{2\pi iku} \tag{14}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
I(\alpha,\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} du\frac{u}{\alpha^2+u^2} + 2Re\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi ik\beta}\int_{-\infty}^{\infty} du\,\frac{ue^{-2\pi iku}}{\alpha^2+u^2}\\
&= 2\pi\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k\alpha}\sin(2\pi k\beta),
\end{aligned} \tag{15}$$

und

$$
\begin{aligned}
J(\alpha,\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\alpha^2+u^2} + 2Re\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi ik\beta}\int_{-\infty}^{\infty} du\,\frac{e^{-2\pi iku}}{\alpha^2+u^2} \\
&= \frac{\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k\alpha}\cos(2\pi k\beta).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Hierzu wurde die Translationsinvarianz in u sowie der Residuensatz[1] verwendet. Wie schon aus Symmetriegründen ersichtlich verschwindet $I(\alpha,\beta)$ für $y = md$, $m \in \mathbf{Z}$ für alle α und somit auch die ersten beiden Ausdrücke von (13). Für beliebige β finden wir

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{\mathrm{tot}} &= -\frac{2\pi bB}{d}\sum_{k=1}^{\infty}(1+2\pi k\alpha)e^{-2\pi k\alpha}\sin(2\pi k\beta) \approx -\frac{2\pi bB}{d}(1+2\pi\frac{x}{d})e^{-2\pi x/d}\sin(2\pi\frac{y}{d}), \\
\sigma_{yy}^{\mathrm{tot}} &= -\frac{2\pi bB}{d}\sum_{k=1}^{\infty}(1-2\pi k\alpha)e^{-2\pi k\alpha}\sin(2\pi k\beta) \approx -\frac{2\pi bB}{d}(1-2\pi\frac{x}{d})e^{-2\pi x/d}\sin(2\pi\frac{y}{d}).
\end{aligned} \tag{19}
$$

wobei die letzte Gleichung für $\alpha = x/d \gg 1$ gilt. In diesem Bereich können Beiträge von Summanden mit $k > 1$ vernachlässigt werden. Für $\sigma_{xy}^{\mathrm{tot}}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{\mathrm{tot}} &= \frac{4\pi^2 Bbx}{d^2}\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-2\pi k\alpha}\cos(2\pi k\beta) \\
&\approx \frac{4\pi^2 Bbx}{d^2}e^{-2\pi x/d}\cos(2\pi\frac{y}{d}),
\end{aligned} \tag{20}
$$

Im Gegensatz zum algebraischen Spannungsabfall im Falle eines isolierten Stufendefektes (10) nimmt die Spannung einer Versetzungswand exponeniell mit dem Normalenabstand zur Wand ab.

Aufgabe 6.3 Interaktion von 2 Schraubenversetzungen*

Die Tangentenvektore von der 2 parallelen Schraubenversetzungen wählen wir mit gleicher Orientation und wir orientieren das Koordinatensystem so, dass diese in the z-Richtung weisen, $\tau_1 = \tau_2 = \mathbf{e}_z$. Der Verschiebungsvektor verursacht durch einzelne Schraubenversetzung indexiert mit A, die sich auf der Achse der Zyllinderkoordinaten befindet – siehe Abb.(1), ist gegeben durch

$$
\mathbf{u}^A = b^A\frac{\varphi}{2\pi}\mathbf{e}_z, \tag{21}
$$

mit $\mathbf{b}^A = -b^A\mathbf{e}_z$.

[1] Unter der Annahme, dass $k > 0$,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{du}\,\frac{ue^{-2\pi iku}}{\alpha^2+u^2} = -\oint \mathrm{du}\,\underbrace{\frac{ue^{-2\pi iku}}{u-i\alpha}}_{\zeta(u)}\frac{1}{u+i\alpha} = -2\pi i\zeta(-i\alpha) = -i\pi e^{-2\pi k\alpha}, \tag{17}
$$

wobei wir um die untere Hälfte der komplexen Ebene integrieren; das Minuszeichen vor dem Integral $\oint$ stammt von der Umrundungrichtung. Gleichfalls lösen wir auch das zweite Integral

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{du}\,\frac{e^{-2\pi iku}}{\alpha^2+u^2} = -\oint \mathrm{du}\,\underbrace{\frac{e^{-2\pi iku}}{u-i\alpha}}_{\eta(u)}\frac{1}{u+i\alpha} = -2\pi i\eta(-i\alpha) = \frac{\pi}{\alpha}e^{-2\pi k\alpha}. \tag{18}
$$

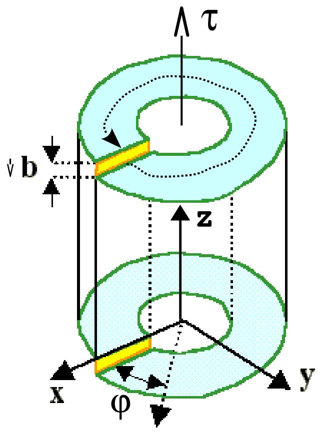

Abbildung 1: Schraubenversetzung mit dem Tangentenvektor τ und dem Burgersvektor $\mathbf{b}$.

In zyllindrischen Koordinaten erhalten wir somit den Deformationstensor $\bar{\bar{u}}_A$ mit einziger nicht-verschwindenden Komponente

$$u^A_{\varphi z} = u^A_{z\varphi} = \frac{b^A}{4\pi r} \tag{22}$$

und weiter mithilfe von hookeschen Gesetz (reine Scherung) bekommen wir

$$\sigma^A_{\varphi z} = \sigma^A_{z\varphi} = \frac{\mu b^A}{2\pi r}, \tag{23}$$

die einzige Spannungstensorkomponente verschieden von Null.
Die Kraft per Länge, die die Schraubenversetzung A auf die Schraubenversetzung B in Distanz r ausübt, lässt sich durch Peach–Köhler Formel berechnen

$$\mathbf{f}_{A \text{ auf } B} = \epsilon_{ikl}\tau^B_k \sigma^A_{lm} b^B_m \mathbf{e}_i = -\epsilon_{iz\varphi}\sigma^A_{\varphi z} b^B \mathbf{e}_i = \frac{\mu b^A b^B}{2\pi r}\mathbf{e}_r. \tag{24}$$

Zwei Schraubenversetzungen mit gleichen Vorzeichen von b stossen sich also ab, mit entgegengesetzten Vorzeichen ziehen sich an.

Alternative Lösung
Diese Aufgabe lässt sich auch direkt (ohne die Peach–Köhler Formel zu nutzen) lösen. Dazu transformieren wir den Deformationstensor von einer Schraubenverzerrung in kartesische Koordinaten,

$$u^A_{zy} = u^A_{yz} = \frac{b^A}{4\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u^A_{zx} = u^A_{xz} = -\frac{b^A}{4\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

In diesem Moment gehen wir in komplexe Ebene, was unsere Rechnung wesentlich überschaubarer macht. Wir werden mit komplexer Koordinate $w = x + iy$ arbeiten. Weiter nützen wir eine Hilfsquantität, $\tilde{u} = u_{xz} + iu_{yz}$, die in dieser Aufgabe die gesamte Information über den Deformationstensor trägt. Füer eine Schraubenverzerrung ist diese einfach

$$\tilde{u}^A = u^A_{xz} + iu^A_{yz} = \frac{b^A}{4\pi}\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{b^A}{4\pi}\frac{1}{w}. \tag{25}$$

Wir superponieren nun den Deformationstensor der Versetzung B dazu, und erhalten

$$\tilde{u}^{tot} = \frac{b^A}{4\pi}\frac{1}{w} + \frac{b^B}{4\pi}\frac{1}{w-r},$$

wo r der Abstand der Verzerrungen ist und wir nehmen an, dass dieser rein reell ist (die Symmetrie der Aufgabe ermöglicht es, ihn so zu wählen).
Nun berechnen wir die Deformationsenergie per Länge,

$$\begin{aligned}
\frac{E}{L} &= \frac{1}{2}\int\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\sigma_{ik}^{tot}u_{ik}^{tot} \overset{\text{Hooke}}{=} \mu\int\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\left(u_{ik}^{tot}\right)^2 = 2\mu\int\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\left[\left(u_{xz}^{tot}\right)^2+\left(u_{yz}^{tot}\right)^2\right] \\
&= 2\mu\int \mathrm{d}w\,\left|\tilde{u}^{tot}\right|^2 \\
&= 2\mu\int \mathrm{d}w\,\left(\frac{b^A}{4\pi}\right)^2\frac{1}{|w|^2} && \text{(Energie der Versetzung A)} \\
&\quad +2\mu\int \mathrm{d}w\,\left(\frac{b^B}{4\pi}\right)^2\frac{1}{|w-r|^2} && \text{(Energie der Versetzung B)} \\
&\quad +2\mu\int \mathrm{d}w\,\frac{b^Ab^B}{16\pi^2}\underbrace{\left[\frac{1}{w(w^*-r)}+\frac{1}{w^*(w-r)}\right]}_{\frac{w^*(w-r)+w(w^*-r)}{ww^*(w^*-r)(w-r)}=\frac{2|w|^2-(w+w^*)r}{|w|^2(|w|^2+r^2-(w+w^*)r)}} && \text{(Interaktionsenergie)}
\end{aligned}$$

Die Interaktionsenergie berechnen wir explizit in Polarkoordinaten (ρ,φ),[2]

$$\begin{aligned}
\frac{E_{int}}{L} &= \frac{\mu b^Ab^B}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\,\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\frac{\rho-r\cos\varphi}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\varphi}}_{\frac{\pi}{\rho}(1-\mathrm{sign}(r-\rho))} \\
&= \frac{\mu b^Ab^B}{2\pi}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho},
\end{aligned}$$

was logarithmisch divergiert. Die Kraft per Länge ist allerdings Ableitung davon durch Distanz r, somit konvergent,

$$f = -\frac{\mathrm{d}\,(E/L)}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}\,(E_{int}/L)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mu b^Ab^B}{2\pi r}. \tag{29}$$

[2] Das Integral über φ lässt sich bestimmen (auch) ohne die Integration durchzuführen. Wir verwenden dazu die 2D Elektrostatik und wir schauen uns das Potential ϕ eines homogen geladenen Kreises mit Radius ρ und mit Gesamtladung gleich 1. Aus der Symetrie und dem Gaussschen Satz wissen wir, dass die Kraft ausserhalb des Kreises nicht zu unterscheiden ist mit der Kraft einer Punktladung im Zentrum des Kreises. Innerhalb des Kreises muss die Kraft aus dergleichen Gründen verschwinden. Wenn wir dann noch die Randbedingungen in Unendlichkeit mit $\phi(r\to\infty)=0$ fixieren, bekommen wir als Lösung die Greensche Funktion für 2-dimensionale Poisson-Gleichung ausserhalb des Kreises und Konstante gleich dem Potential am Kreis innerhalb davon,

$$\phi(r,\rho) = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi} = \begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln r & r\geq\rho, \\ \frac{1}{2\pi}\ln\rho & r<\rho.\end{cases} \tag{26}$$

Leiten wir $\phi(r,\rho)$ nach ρ ab, bekommen wir bis auf Multiplikationsfaktor genau das Integral, das zu bestimmen ist,

$$\partial_\rho\phi(r,\rho) = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(2\pi)^2}\frac{\rho-r\cos\varphi}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}. \tag{27}$$

Dessen Wert erhalten wir leicht mithilfe Gl.(26),

$$\partial_\rho\phi(r,\rho) = \begin{cases}0 & r\geq\rho, \\ \frac{1}{2\pi\rho} & r<\rho.\end{cases} \tag{28}$$