Kontinuumsmechanik
Musterlösung 5

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 5.1 Elastische Wellen im hexagonalen Kristall

Die Phasengeschwindigkeit ist gegeben durch $c = \frac{\omega}{k}$, wobei ω eine Lösung der Gleichung

$$\left| C_{iklm} k_k k_l - \rho_0 \omega^2 \delta_{im} \right| = 0, \tag{1}$$

ist. Wir müssen daher die Eigenwerte der 3×3-Matrix $A_{im} = C_{iklm} k_k k_l$ bestimmen. Im hexagonalen Kristall haben wir (siehe Serie 2, Aufgabe 2)

$$\begin{aligned} &C_{xxxx} = C_{yyyy} = a,\ C_{xyxy} = b,\ C_{xxyy} = a - 2b, \\ &C_{xxzz} = C_{yyzz} = c,\ C_{xzxz} = C_{yzyz} = d,\ C_{zzzz} = f. \end{aligned} \tag{2}$$

Daraus ergeben sich die Matrixelemente

$$\begin{cases} A_{xx} = a k_x^2 + b k_y^2 + d k_z^2 \\ A_{yy} = b k_x^2 + a k_y^2 + d k_z^2 \\ A_{zz} = d(k_x^2 + k_y^2) + f k_z^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A_{xy} = (a-b) k_x k_y \\ A_{xz} = (c+d) k_x k_z \\ A_{yz} = (c+d) k_y k_z \end{cases}. \tag{3}$$

a) $\underline{\vec{k} = (0, 0, k)}$: Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} k^2. \tag{4}$$

Daher ist

$$\rho_0 \omega_t^2 = k^2 d, \quad \rho \omega_l^2 = k^2 f, \tag{5}$$

und

$$c_t = \sqrt{\frac{d}{\rho_0}}, \quad c_l = \sqrt{\frac{f}{\rho_0}}. \tag{6}$$

b) $\underline{\vec{k} = (k \cos\varphi, k \sin\varphi, 0)}$: Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} a \cos^2\varphi + b \sin^2\varphi & (a-b)\cos\varphi \sin\varphi & 0 \\ (a-b)\cos\varphi\sin\varphi & b\cos^2\varphi + a \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} k^2. \tag{7}$$

Eine Lösung von Gl. (1) ist hier durch $\rho_0 \omega_t^2 = d \cdot k^2$ gegeben, also ist $c_t = \sqrt{d/\rho_0}$. Um die anderen beiden Lösungen zu bekommen, muss die Determinante der verbleibenden 2×2-Matrix berechnet werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} a k^2 \cos^2\varphi - b k^2 \sin^2\varphi - \rho_0\omega^2 & k^2(a-b)\cos\varphi\sin\varphi \\ k^2(a-b)\cos\varphi\sin\varphi & b k^2 \cos^2\varphi + a k^2 \sin^2\varphi - \rho_0\omega^2 \end{vmatrix} \\ &= (\rho_0\omega^2)^2 - \rho_0\omega^2 k^2 (a+b) + k^4 ab \\ &= (\rho_0\omega^2 - k^2 a)(\rho_0\omega^2 - k^2 b). \end{aligned} \tag{8}$$

Daraus folgt

$$c_1 = \sqrt{a/\rho_0}, \quad c_2 = \sqrt{b/\rho_0}.$$

Bemerkung: Die Wellen für c_1 und c_2 sind gemischt transversale und longitudinale Wellen ausser für spezielle Winkel, $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, ...$, wo die Wellen mit c_1 longitudinal und diejenigen mit c_2 transversal sind.

Aufgabe 5.2 Torsionswellen eines Zylinders

Für eine Torsion ist die elastische (potentielle) Energie

$$E_{\text{el}} = \int dz \frac{C}{2}\Big(\frac{d\varphi}{dz}\Big)^2 \tag{9}$$

mit Torsionssteifigkeit $C = \mu(\pi R^4/2)$, vgl. Skript s. 43. Die kinetische Energie ist

$$E_{\text{kin}} = \int dz \frac{I}{2}\Big(\frac{d\varphi}{dt}\Big)^2 \tag{10}$$

mit dem Trägheitselement pro Längeneinheit $I = \rho(\pi R^4/2)$. Variation der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \int dt\, dz \Big[\frac{I}{2}\Big(\frac{d\varphi}{dt}\Big)^2 - \frac{C}{2}\Big(\frac{d\varphi}{dz}\Big)^2\Big] \tag{11}$$

liefert die Bewegungsgleichung $C(\partial^2\varphi/\partial z^2) - I(\partial^2\varphi/\partial t^2) = 0$, bzw.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{\text{shear}}^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{12}$$

wobei $c_{\text{shear}} = \sqrt{\mu/\rho}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Stab mit der Dichte ρ ist. Diese Gleichung gilt ganz allgemein für Scherwellen, d.h. für Wellen bei denen das *Volumen* in keinem Teil des Materials verändert wird. Seismologen finden solche Wellen z.B. im Inneren der Erde.

Alternative Lösung: Das Drehmoment in einem runden Stab ist gegeben durch (Skript S. 44)

$$M(z) = \frac{\pi\mu R^4}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{13}$$

Der Drehimpuls einer rotierenden Scheibe der Dicke dz ist gegeben durch

$$dL = dz\rho\omega \int_0^R 2\pi r dr\, r^2 = \frac{\pi\rho R^4}{2}\omega dz. \tag{14}$$

Also gilt für das Drehmoment auf diesselbe

$$dM = \partial_t dL = dz\frac{\pi\rho R^4}{2}\partial_t\omega = dz\frac{\pi\rho R^4}{2}\partial_t^2\varphi, \tag{15}$$

und somit

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\pi\rho R^4}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{16}$$

Mit Gl. (13) folgt nun ebenfalls die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{\text{shear}}^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{17}$$

Aufgabe 5.3 Reflexion an Grenzschicht

a) An der Grenzschicht zwischen den zwei Medien (Dichten ρ und ρ') gelten, neben den bekannten Bedingungen dass die Frequenz aller reflektierten und transmittierten Wellen gleich der der einfallenden Welle und, für senkrechten Einfall, auch die transmittierten und reflektierten Wellen senkrecht zur Grenzfläche propagieren, zusätzlich, wegen Actio=Reactio,

$$\mathbf{P} = -\mathbf{P}', \tag{18}$$

und, da die Auslenkung senkrecht zur Grenfläche ($x = 0$) stetig sein muss,

$$u_x = u'_x. \tag{19}$$

Aus (18) folgt mit $\mathbf{n} = -\mathbf{n'} = (1, 0, 0)$ sofort

$$\sigma_{ix} = \sigma'_{ix}, \ \forall i. \tag{20}$$

b) Da die senkrecht einfallende Welle als longitudinal polarisiert angenommen wird, ist keine Richtung senkrecht zur Einfallsachse ausgezeichnet. Aus Symmetriegründen kommen deshalb nur longitudinal polarisierte reflektierte und transmittierte Wellen in Frage.

c) Wir machen also den Ansatz für die Welle im ungestrichenen Medium,

$$\mathbf{u} = A_0 \mathbf{n}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{x} - \omega t)} + A_l \mathbf{n}_l e^{i(\mathbf{k}_l \mathbf{x} - \omega t)}, \tag{21}$$

sowie im gestrichenen Medium

$$\mathbf{u'} = B_l \mathbf{n}'_l e^{i(\mathbf{k}'_l \mathbf{x} - \omega t)}. \tag{22}$$

Hier ist

$$(1, 0, 0) = \mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_l = \mathbf{n}'_l, \tag{23}$$

und es gelten

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{n}_0 k_0, \quad \mathbf{k}_l = \mathbf{n}_l k_l, \quad \mathbf{k}'_l = \mathbf{n}'_l k'_l, \tag{24}$$

sowie

$$k_0 = \frac{\omega}{c_l}, \quad k_l = k_0, \quad k'_l = \frac{\omega}{c'_l} = k_0 \frac{c_l}{c'_l} = k_0 r, \tag{25}$$

mit $c_l / c'_l = \sqrt{\rho'/\rho} \equiv n$.

Daraus findet man schnell

$$\begin{aligned} u_{xx} &= i(k_0 A_0 + k_l A_l), \\ u_{xy} &= 0, \\ u_{ll} &= u_{xx}, \end{aligned} \tag{26}$$

(die anderen Elemente von u_{ij} sind nicht von Interesse), sowie

$$\begin{aligned} u'_{xx} &= i k'_l B_l, \\ u'_{xy} &= 0, \\ u'_{ll} &= u'_{xx}. \end{aligned} \tag{27}$$

Aus dem Hookeschen Gesetz,

$$\sigma_{ij} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2) u_{ll}\delta_{ik}, \tag{28}$$

finden wir schnell die einzigen benötigten Komponenten von $\hat{\sigma}$ und $\hat{\sigma}'$,

$$\sigma_{xx} = \rho c_l^2 u_{xx}, \tag{29}$$

$$\sigma'_{xx} = \rho'(c_l')^2 u'_{xx}. \tag{30}$$

Eingesetzt in die (20) gibt das die Gleichung

$$(A_0 + A_l)/n = B_l. \tag{31}$$

Gl. (19) führt auf

$$(A_0 - A_l) = B_l. \tag{32}$$

Als Resultat bleibt also

$$R = A_l/A_0 = \frac{n-1}{n+1}, \tag{33}$$

$$T = B_l/A_0 = \frac{2}{n+1}. \tag{34}$$

Wir können nun überprüfen, ob der Energiestrom erhalten ist. Die Energiestromdichte **S** ist definiert als

$$S_i = \frac{\rho}{2} v^2 v_j - \sigma_{ij} v_i, \tag{35}$$

und reduziert sich in unserem Fall auf

$$S_x = (\frac{\rho}{2} v^2 - \sigma_{xx}) v_x. \tag{36}$$

Wir nehmen den Realteil der Ansätze (21) und (22), setzen ein, und finden nach Mittelung über eine Periode der Schwingung für den Energiestrom

$$S_x = \frac{1}{2}\rho c_l^2 k_0 \omega (A_0^2 - A_l^2) = 2\rho c_l \omega^2 A_0^2 \frac{n}{(n+1)^2}. \tag{37}$$

Analog finden wir

$$S'_x = \frac{1}{2}\rho' c_l' k_l' \omega B_l^2 = \frac{1}{2} c_l' \omega^2 A_0^2 \frac{4}{(n+1)^2} = 2\rho c_l \omega^2 A_0^2 \frac{n}{(n+1)^2}. \tag{38}$$

Die Energiestromdichte ist also erhalten.