Kontinuumsmechanik
Musterlösung 4

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 4.1 Form eines gebogenen, gedehnten Stabes

Wir wählen den Koordinatenursprung im linken Scharnier, so dass die x-Achse mit der Achse des nicht-deformierten Stabes übereinstimmt. Die Biegung verlaufe in der xz-Ebene. Die Form des Stabes ist dann gegeben durch die Kurve $Z(x)$. Aufgrund des Symmetriepunktes in der Stabmitte ($x = L/2$) beschränken wir uns auf das Auffinden der Lösung $Z(x)$ im Interval $x \in [0, L/2]$. Die Lösung für $x \in [L/2, L]$ erhält man dann durch die Substitution $x \to L - x$.
Die freie Energie eines Stabes unter einer externen Spannung T in einem externen Potential $V(x, z)$ ist gegeben durch (siehe Skript S.39)

$$F = \int dx \, \big[\frac{EI}{2}(\partial_x^2 Z)^2 + \frac{T}{2}(\partial_x Z)^2 + V(x,z)\big], \tag{1}$$

mit dem Young'schen Elastizitätsmodul E und dem Flächentrgheitsmoment I. Eine Variation bezüglich z liefert uns die Gleichgewichtsbedingung

$$EI\partial_x^4 Z - T\partial_x^2 Z - F = 0, \tag{2}$$

wobei $F = -\partial_z V$ die externe Kraft darstellt, welche in unserem Fall gegeben ist durch $F = f\delta(x - L/2)$. Die Befestigung des Stabendes in einem Scharnier verhindert eine vertikale Verschiebung und führt zu einem verschwindenden Drehmoment im Befestigungspunkt. Dies liefert die Randbedingungen

$$Z(0) = 0, \quad \partial_x^2 Z(0) = 0. \tag{3}$$

Zusätzlich folgt aus der Stetigkeit von $\partial_x Z(x)$ die Bedingung $\partial_x Z(L/2) = 0$.
Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Summe der homogenen Lösung

$$Z_{\text{hom}}(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}, \quad \lambda^2 = \frac{T}{EI}, \tag{4}$$

und einer partikulären Lösung,

$$Z_{\text{part}}(x) = ax + b. \tag{5}$$

Die Konstanten A, B, a und b werden durch die Randbedingungen festgelegt. Die partikuläre Lösung (5) erhält man, indem man sich auf das Interval $x \in [0, L/2)$ einschränkt; die Volumenkraft $F = f\delta(x - L/2)$ spielt dann die Rolle einer Randbedingung zu der Differentialgleichung $EI\partial_x^4 Z - T\partial_x^2 Z = 0$. Diese punktuell angreifenden Kraft muss dabei wie folgt behandelt werden; wir integrieren um eine ϵ-Kugel um den Angriffspunkt und betrachten danach den Limes $\epsilon \to 0$,

$$f = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{L/2-\epsilon}^{L/2+\epsilon} dx\, f\delta(x - L/2) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{L/2-\epsilon}^{L/2+\epsilon} dx\, T\partial_x^2 Z_{\text{part}}(x) = 2T\partial_x Z_{\text{part}}(L/2). \tag{6}$$

Dies liefert uns den Wert $a = f/2T$. Mit den restlichen Randbedingungen finden wir, dass die Form des Stabes auf $x \in [0, L/2]$ durch die Kurve

$$Z(x) = \frac{f}{2T}\left[x - \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda\cosh(\lambda L/2)}\right] \tag{7}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 4.2 Punkt-Defekt im isotropen Medium

a) Für das durch einen Punkt-Defekt erzeugte Auslenkungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 4\pi c \delta(\mathbf{r}). \tag{8}$$

Dies entspricht der Gleichung des elektrischen Feldes einer Punktladung in der Elektrostatik. Mit Hilfe des Satzes von Gauss und unter Ausnutzung der Rotationssmmetrie ergibt sich

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{c}{r^2}\mathbf{e}_r = -c\nabla\left(\frac{1}{r}\right). \tag{9}$$

Damit erhält man für den Deformationstensor bei $r > 0$

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -c\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) = c\left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5}\right). \tag{10}$$

Den Spannungstensor findet man via dem Hookeschem Gesetz

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{u} = 2\mu u_{ij}. \tag{11}$$

wobei benutzt wurde, dass $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ für $r > 0$.

b) Ein isotroper, homogener Körper im Gleichgewicht erfüllt die Gleichung (siehe Skript S.15)

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\mathbf{F}, \tag{12}$$

wobei $\mathbf{F}$ die Volumenkraft darstellt. Mit (8) und der Gleichung $\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$ finden wir

$$\mathbf{F} = -4\pi c(\lambda + 2\mu)\nabla\delta(\mathbf{r}), \tag{13}$$

da in unserem Fall gilt $\nabla \wedge \mathbf{u} = 0$. Die relative Volumenänderung bei einer Deformation ist gegeben durch die Spur des Deformationstensors. Somit erhält man die gesamte Volumenänderung ΔV via Integration über das Körpervolumen V,

$$\Delta V = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u})\, dV = 4\pi c. \tag{14}$$

c) Die Volumenkraft $\mathbf{F}$ trägt den Term $-\int_V (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})\, dV$ zum Energiefunktional $\mathcal{F}[\mathbf{u}]$ bei. Da sowohl $\mathbf{F}$ als auch $\mathbf{u}$ linear eingehen, gilt das Superpositionsprinzip, d.h. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ und $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Die totale Energiefunktional ist im Allgemeinen gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\mathbf{u}] &= \int_V dV\left(\frac{1}{2}u_{ij}\sigma_{ij}\right) - \int_V dV\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \int_{\partial V} dS\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \\
&= -\int_V dV u_i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i\right) + \int_{\partial V} dS\; u_i\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}n_j - P_i\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int_V dV\;\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{2}\int_{\partial V} dS\;\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{15}$$

wo wir den Satz von Gauss bentzt haben sowie

$$u_{ij}\sigma_{ij} = \partial_j(u_i\sigma_{ij}) - u_i\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{16}$$

und

$$
\begin{aligned}
F_i &= -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\
P_i &= \sigma_{ij} n_j \,.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Da wir in der jetzigen Situation keine Oberfläche haben, vereinfacht sich das Energiefunktional zu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\mathbf{u} = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}] &= -\int_V \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{2}\, dV = -\sum_{i,j=1,2} \int_V \frac{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_j}{2}\, dV \\
&= \sum_{i,j=1,2} \int_V dV\, 2\pi c_i (\lambda + 2\mu) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{u}_j \\
&= -\sum_{i,j=1,2} \int_V dV\, 2\pi c_i (\lambda + 2\mu) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \nabla \cdot \mathbf{u}_j \\
&= -\sum_{i,j=1,2} \int_V dV\, 8\pi^2 c_i c_j (\lambda + 2\mu) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Im Schritt zur dritten Zeile wurde partiell integriert. Das Integral in der letzten Zeile verschwindet für $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j$ und divergiert für $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$. Die Mischterme $i \neq j$ beschreiben die Wechselwirkung zwischen den beiden Punkt-Deformationen, während Terme mit $i = j$ für die Selbstenergien stehen; wie erwartet divergieren diese für Punkt-Objekte. Daraus ist ersichtlich, dass sich zwei nicht-überlappende Punkt-Defekte in einem homogenen, isotropen Medium nicht beeinflussen. Insbesondere folgt, dass diese Kontakt-Wechselwirkung bei Überlappung attraktiv ist, falls die Defekte von derselben Form sind, d.h. c_i und c_j dasselbe Vorzeichen besitzen.

Aufgabe 4.3 Punkt-Defekt im elastischen Halbraum

Wir setzen den Ursprung des Koordinatensystems in den Defekt, so dass die ungestörte Oberfläche bei $z = z_0$ parallel zur xy-Ebene liegt. Für eine kräftefreie Oberfläche gilt als Randbedingung, dass der Spannungstensor dort folgende Gleichung erfüllt, $\sigma_{ij} n_j = 0$ mit $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. In Analogie zur Spiegel-Ladung in der Elektrostatik führen wir eine Spiegel-Deformation am Ort $\mathbf{r}_s = (0, 0, 2z_0)$ ein, welche die Kraft

$$
P_i = -\sigma_{ij} n_j = -\sigma_{iz} = -2\mu u_{iz}, \tag{19}
$$

auf die Oberfläche ausübt, wobei $\mathbf{u}$ gegeben ist durch die Lösung (9). Das Energiefunktional $\mathcal{F}[\mathbf{u}]$ der überlagerte Lösung von Punkt-Defekt $\mathbf{u}_0$ und dessen Spiegel-Defekt $\mathbf{u}_\mathrm{S}$ lässt sich schreiben als

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\mathrm{S}] &= -\int_H \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{2}\, dV - \int_{\partial H} \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{u}}{2}\, df \\
&= -\int_H \frac{\mathbf{F_0}\cdot\mathbf{u}_0}{2}\, dV
\end{aligned} \tag{20}
$$

wobei H den linken Halbraum ($z < 0$) bezeichnet und für die Kräfte das Superpositionsprinzip verwendet wurde, d.h. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_\mathrm{S}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_\mathrm{S}$. Mit (9), (18) und $\mathbf{r}_s \notin \partial H$ folgt, dass die Volumenkraft-Terme, welche Spiegel-Defekt-Abhängigkeiten besitzen, keinen Beitrag liefern. Der Oberflächenterm $-\int_{\partial H} \mathbf{P}\cdot\mathbf{u}/2$ verschwindet, da die Spiegel-Defekt nach (19) so gewählt wurde, dass $\mathbf{P}|_{\partial H} = 0$. Mit anderen Worten, die

Energie eines Punkt-Defektes wird von der Existenz einer freien Oberfläche nicht beeinflusst und stimmt mit dem Wert eines Punkt-Defektes in einem homogenen, isotropen elastischen Medium überein.
Betrachten wir nun zwei Punkt-Deformationen lokalisiert bei $\mathbf{r}_A$ bzw. $\mathbf{r}_B$. Das gesamte Deformationsfeld $\mathbf{u}$ ist eine Überlagerung der beiden Deformationsfeldern $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_A^0 + \mathbf{u}_A^{\mathrm{S}}$ und $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_B^0 + \mathbf{u}_B^{\mathrm{S}}$, wobei wie oben 0 für den tatsächlichen Defekt und S für dessen Spiegel-Defekt steht. Für die gesamte Energie findet man

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\mathbf{u}] = &- \sum_{i,j=A,B} \int_H \frac{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_j}{2}\, dV - \sum_{i,j=A,B} \int_{\partial H} \frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u}_j}{2}\, dS \\
= &\,\mathcal{F}[\mathbf{u}_A] + \mathcal{F}[\mathbf{u}_B] \\
&- \int_H \frac{\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{u}_B}{2}\, dV - \int_H \frac{\mathbf{F}_B \cdot \mathbf{u}_A}{2}\, dV - \int_{\partial H} \frac{\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{u}_B}{2}\, df - \int_{\partial H} \frac{\mathbf{P}_B \cdot \mathbf{u}_A}{2}\, df\ . \qquad (21)
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun einer der vier Integrale genauer und finden

$$\begin{aligned}
\int_H dV\, \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{u}_B &= \sum_{i,j=0,S} \int_H dV \underbrace{\mathbf{F}_{A,i} \cdot \mathbf{u}_{B,j}}_{\propto \nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{A,i})\cdot \mathbf{u}_{B,j}} \propto \sum_{i,j=0,S} \int_H dV\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{A,i})\ \nabla \cdot \mathbf{u}_{B,j} \\
&\propto \sum_{i,j=0,S} \int_H dV\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{A,i})\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{B,j})\ . \qquad (22)
\end{aligned}$$

Da die Spiegelladung ausserhalb von H platziert sind, verschwinden alle Integrale, die eine Spiegelladung beinhalten. Zudem ist $\mathbf{P}|_{\partial H} = 0$ nach Konstruktion mit der Spiegelladung. Übrig bleibt derselbe Wechselwirkungsterm wie im vollen Raum, siehe Aufgabe 4.2, d.h. die Punkt-Deformationen sind auch in Anwesenheit einer freien Oberfiche nicht wechselwirkend fr $\mathbf{r}_A \neq \mathbf{r}_B$.