# Kontinuumsmechanik
# Musterlösung 3

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

## Aufgabe 3.1 Geneigte elastische Platte

1. Aufgrund der unendlichen Ausdehnung und Uniformität längs $x$ und $z$ können die Auslenkungen nur von $y$ abhängen. Insbesondere müssen alle Ableitungen nach $x$ und $z$ in den Feldgleichungen für $\mathbf{u}$ (Skript S. 15) verschwinden. Die $x$-Komponente der Feldgleichung lautet mit der Kraftdichte $\mathbf{F} = (\rho g \sin(\alpha), -\rho g \cos\alpha, 0)$ dann

$$\begin{aligned} \partial_x(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}(\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}))_x &= -\rho g \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \sin\alpha \\ \Longrightarrow \partial_y^2 u_x &= -\rho g \frac{2(1+\sigma)}{E} \sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$u_x(y) = -\frac{\rho g(1+\sigma)\sin\alpha}{E} y^2 + C_1 y + C_2. \tag{2}$$

Die Randbedingungen sind das Verschwinden der Auslenkung am Boden und, da keine äussere Oberflächenkraft wirkt, Spannungsfreiheit an der Oberfläche; insbesondere heisst das

$$u_x(y=0) = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_{xy}(y=H) = \frac{E}{1+\sigma} u_{xy} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=H} = 0, \tag{4}$$

wobei wir $u_{ll} = u_{yy}$ und das Hooksche Gesetz,

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}\delta_{ik}) \tag{5}$$

benützt haben. Aus der ersten Bedingung folgt $C_2 = 0$, die zweite ergibt

$$C_1 = 2\frac{\rho g(1+\sigma)\sin\alpha}{E} H. \tag{6}$$

Das Ergebnis ist also

$$u_x(y) = 2\frac{\rho g H(1+\sigma)\sin\alpha}{E}\left(y - \frac{y^2}{2H}\right). \tag{7}$$

Die $y$-Komponente der Feldgleichungen,

$$\partial_y^2 u_y = \rho g \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \cos\alpha, \tag{8}$$

führt analog mit den Randbedingungen

$$u_y(y=0) = 0, \tag{9}$$

$$\sigma_{yy}(y=H) = \frac{E(1-2\sigma)+\sigma(1+\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left.\frac{\partial u_y}{\partial y}\right|_{y=H} = 0, \tag{10}$$

wobei wir $u_{ll} = u_{yy}$ und das Hooksche Gesetz benützt haben, auf

$$u_y(y) = -\frac{\rho g H(1+\sigma)(1-2\sigma)\cos\alpha}{E(1-\sigma)}\left(y - \frac{y^2}{2H}\right). \tag{11}$$

Für den Fall, dass die Platte horizontal aufliegt ($\alpha = 0$), finden wir somit

$$\begin{aligned} u_x(y) &\equiv 0, & (12)\\ u_y(H) &= -\frac{\rho g H^2(1+\sigma)(1-2\sigma)\cos\alpha}{2E(1-\sigma)}. & (13)\end{aligned}$$

2. Die Komponenten des Spannungstensors lauten (mit $u_{ll} = \partial_y u_y$ und dem Hookschen Gesetz)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{\rho g H \sigma\cos\alpha}{1-\sigma}\left(1 - \frac{y}{H}\right),\\ \sigma_{yy} &= -\rho g H\cos\alpha\left(1-\frac{y}{H}\right),\\ \sigma_{zz} &= \sigma_{xx},\\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \rho g H\sin\alpha\left(1-\frac{y}{H}\right),\\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Die Spannungen verlaufen also linear über die Höhe der elastischen Platte und verschwinden an der Oberfläche. Die Normalspannung $\sigma_{zz}$ verschwindet nicht, obwohl keine Auslenkung in $z$-Richtung vorliegt. Dies ist ein Effekt des Eigengewichtes: Elementare Würfel spüren den Druck von oben durch die aufliegenden Würfel und von unten durch den Boden; diese "Quetschung" führt zu Spannungen rechtwinklig zu diesen Drücken.

3. Die aufliegende Platte führt zu einer Veränderung der oberen Randbedingung für $u_x$ und $u_y$ durch den äusseren Druck $\mathbf{P} = \rho_0 g(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)$ (wobei hier die zur Oberfläche normale Komponente $P_x$ als Schubspannung bezeichnet wird) mit der Fläschenmassendichte $[\rho_0]$ =kg/m$^2$. Durch $P_i = \sigma_{ij}n_j$ folgt — zusammen mit der Symmetrie — als Randbedingung für den Spannungstensor bei $y = H$

$$\sigma_{iy} = P_i. \tag{15}$$

Damit ändern sich die Randbedingungen für $u_x$ und $u_y$ bei $y = H$ zu

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=H} &= \rho_0 g\sin\alpha\frac{2(1+\sigma)}{E}, & (16)\\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=H} &= -\rho_0 g\cos\alpha\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-2\sigma)\sigma(1+\sigma)}, & (17)\end{aligned}$$

und die Lösungen (7) und (11) werden zu

$$\begin{aligned} u_x(y) &= 2\frac{\rho g H(1+\sigma)\sin\alpha}{E}\left[(1+\rho_0/\rho H)y - \frac{y^2}{2H}\right], & (18)\\ u_y(y) &= -\frac{\rho g H(1+\sigma)(1-2\sigma)\cos\alpha}{E(1-\sigma)}\left[\left(1+\frac{\rho_0}{\rho H}\frac{E(1-\sigma)}{E(1-2\sigma)+\sigma(1+\sigma)}\right)y - \frac{y^2}{2H}\right]. & \end{aligned}$$

Die aufliegende Platte führt für $\alpha = 0$ zu einer stärkeren Absenkung der Oberfläche.

### Aufgabe 3.2 Zylindrisches Rohr

Wir nützen die Rotationssymmetrie aus indem wir zu Zylinderkoordinaten übergehen, $\mathbf{u} = (u_r, u_\phi, u_z)$. Ebenfalls aus der zylindrischen Symmetrie sowie aufgrund der Translationsinvarianz entlang $z$ folgt $u_\phi = u_z = 0$ und $u_r = u_r(r)$. Mit den Darstellungen der Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten folgt dann sofort $\nabla \wedge \mathbf{u} = 0$ und

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right]. \tag{19}$$

Daraus folgt mit der Feldgleichung, S. 15 im Skript, sofort

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right] = -F_r. \tag{20}$$

1. **Rohrleitung**: Das Rohr ist einem inneren Druck $p_0$ und einem äusseren Druck $p_1$ unterworfen, d.h. $F_r = 0$, und die Randbedingung ist $\hat{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{p}$, wobei $\mathbf{n}$ der nach aussen gerichtete Normalenvektor ist, mit $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ (innerer Rand) und $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ (äusserer Rand), und $\mathbf{p}$ den Vektor des äusseren Druckes darstellt.

   Die allgemeine Lösung von Gl. (20) hat die Form

$$u_r = c_1 r + \frac{c_2}{r}. \tag{21}$$

   Der Deformationstensor, ausgedrückt in Zylinderkoordinaten, vereinfacht sich wegen $u_z = u_\phi = 0$, $u_r = u_r(r)$ zu

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \frac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - \frac{c_2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \frac{c_2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

   mit Sp $\hat{u} = 2c_1$. Aus dem Hookeschen Gesetz $\hat{\sigma} = \frac{E}{1+\sigma}[\hat{u} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(\mathrm{Sp}\ \hat{u})\hat{1}]$ folgt dann

$$\hat{\sigma} = \frac{E}{1+\sigma}\begin{pmatrix} \frac{c_1}{1-2\sigma} - \frac{c_2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_1}{1-2\sigma} + \frac{c_2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma c_1}{1-2\sigma} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

   Die Randbedingung lautet

$$-\sigma_{rr}|_{r=a} = p_0\,, \qquad \sigma_{rr}|_{r=b} = -p_1. \tag{24}$$

   Daraus findet man

$$c_1 = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}\frac{a^2 p_0 - b^2 p_1}{b^2 - a^2}, \tag{25}$$

$$c_2 = \frac{1+\sigma}{E}\frac{p_0 - p_1}{b^2 - a^2}a^2 b^2, \tag{26}$$

   mit dem inneren bzw. äusseren Rohrradius $a$ resp. $b$.

2. **Welle**: In diesem Fall rotiert das zylindrische Rohr mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega$. Die resultierenden Volumenkräfte sind (in linearer Näherung) durch die Zentrifugalkraft $F_r = \rho\omega^2 r$ gegeben (allgemein $F_r = \rho\omega^2(r + u_r(r))$ . Äussere Drücke werden vernachlässigt, das heisst die Randbedingung ist $\sigma_{ij}n_j = 0,\ \forall i$.

Die allgemeine Lösung von Gl. (20) ist

$$u_r = c_1 r + \frac{c_2}{r} - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}\frac{\rho\omega^2}{8}r^3. \tag{27}$$

Mit $A = \rho\omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)/E(1-\sigma)$ folgt für den Deformationstensor

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \frac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - \frac{c_2}{r^2} - \frac{3}{8}Ar^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \frac{c_2}{r^2} - \frac{1}{8}Ar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

mit Sp $\hat{u} = 2c_1 - Ar^2/2$. Daraus folgt dann wie oben der Spannungstensor aus dem Hookeschen Gesetz,

$$\hat{\sigma} = \frac{E}{1+\sigma}\begin{pmatrix} \frac{c_1}{1-2\sigma} - \frac{c_2}{r^2} - \frac{3-2\sigma}{8(1-2\sigma)}Ar^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_1}{1-2\sigma} + \frac{c_2}{r^2} - \frac{1+2\sigma}{8(1-2\sigma)}Ar^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{1-2\sigma}(2c_1 - A\frac{r^2}{2}) \end{pmatrix}.$$

Die Randbedingung lautet:

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \sigma_{rr}|_{r=b} = 0. \tag{29}$$

Daraus findet man

$$c_1 = \rho\omega^2\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)(3-2\sigma)}{8E(1-\sigma)}(a^2+b^2), \tag{30}$$

$$c_2 = \rho\omega^2\frac{(1+\sigma)(3-2\sigma)}{8E(1-\sigma)}a^2b^2, \tag{31}$$

mit den Radien $a$ und $b$.

## Aufgabe 3.3 Krümmung eines Balkens unter der Sonne

Wir nehmen einen konstanten Temperaturgradienten an, $T(z) = (T_o - T_u)z/2h + (T_o + T_u)/2$, wobei $T_o$ und $T_u$ die Temperaturen auf der Ober- bzw Unterseite des Balkens bezeichnen. Gemäss Seite 19 im Skript wirkt ein Temperaturgradient wie eine Volumenkraft, was auf die Gleichung

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{u}) = \Big(\frac{E}{3(1-2\sigma)}\alpha\nabla T\Big)\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \tag{32}$$

führt. Dabei ist $\alpha$ der thermische Ausdehnungskoeffizient und $\sigma$ die Poissonsche Zahl. Die Kraft ist also gegeben durch

$$F = -\alpha K\nabla T, \tag{33}$$

mit dem Kompressionsmodul $K = E/3(1-2\sigma)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die allgemeine Betrachtung der Deformation eines Stabes äquivalent zur Betrachtung der neutralen Schicht ist, vgl. Vorlesungsskript. Für die Position der neutralen Schicht $z_0(x)$ des Balkens gilt die Differentialgleichung

$$\underbrace{EIz_0''(x)}_{=M_y^{(2)}(x)} = M_y^{(1)}(x), \tag{34}$$

mit $E$ ist hierbei der Young'sche Elastizitätsmodul und $I = b(2h)^3/12 = 2bh^3/3$ das Flächenträgheitsmoment. Diese Gleichung ist eine Gleichgewichtsbedingung für das Drehmoment: Deformationen erzeugen interne Spannungen [beschrieben durch $\sigma_{xx}$], welche am Ort $x$ ein Drehmoment $M_y^{(2)}(x)$ um die $y$-Achse erzeugen. Dieses 'interne' Drehmoment kompensiert das Drehmoment $M_y^{(1)}(x)$, welches die Deformation erzeugt, in diesem Falle das Drehmoment erzeugt durch den Temperaturgradienten, vgl. Abb. 1. Das Drehmoment $M_y^{(1)}(x)$ berechnet sich mit

$$M_y^{(1)}(x) = \int_x^l F_z(x')(x'-x)dx' = -K'(l-x)^2, \tag{35}$$

wobei $F_z(x)$ die Volumenkraft erzeugt durch den Temperaturgradienten $\nabla T = (T_o - T_u)/2h$ bezeichnet und wir $K' = \frac{K\alpha}{4h}(T_0 - T_u)$ definieren. Mithilfe der Randbedingungen $u(0) = 0, u'(0) = 0 \;\Rightarrow\; z_0(0) = 0,\; z_0'(0) = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
z_0''(x) &= -\frac{K'}{EI}(l-x)^2, \quad (x > 0), & (36)\\
z_0'(x) &= -\frac{K'}{EI}[-\frac{1}{3}(l-x)^3 + \frac{1}{3}l^3], \quad (z_0'(0) = 0), & (37)\\
z_0(x) &= -\frac{K'}{EI}[\frac{1}{12}(l-x)^4 - \frac{1}{3}l^3(l-x) + \frac{1}{4}l^4], \quad (z_0(0) = 0). & (38)
\end{aligned}$$

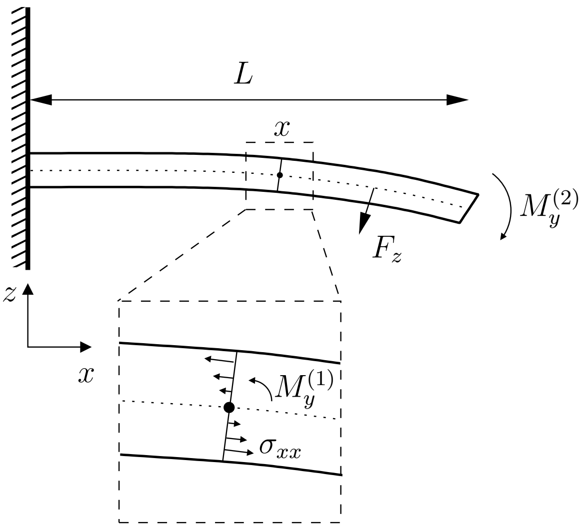


Abbildung 1: Betrachten wir die neutrale Schicht bei $0 < x < L$, wirken zwei Drehmomente bezüglich der $y$-Achse: $M_y^{(2)}$ erzeugt durch die Volumenkraft $F_z$ (erzeugt vom Temperaturgradienten) und $M_y^{(1)}$ erzeugt durch interne Spannungen. Im Gleichgewicht gilt betragsmässig $M_y^{(1)} = M_y^{(2)}$.

<u>Alternativ</u> verwendet man die Differentialgleichung (vgl. Skript s. 35 unten)

$$IEz'''' = F_z. \tag{39}$$

Mit $F_z = -\alpha K(T_o - T_u)/2h$ und der Definition $\beta = \alpha K(T_o - T_u)/2hEI$, ist die Gleichung

$z_0'''' = -\beta$ zu integrieren:

$$z_0''' = -\beta x + C_1, \tag{40}$$

$$z_0'' = -\frac{\beta}{2}x^2 + C_1 x + C_2, \tag{41}$$

$$z_0' = -\frac{\beta}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3, \tag{42}$$

$$z_0 = -\frac{\beta}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4. \tag{43}$$

Mit den Randbedingungen $z_0(0) = 0$ und $z_0'(0) = 0$ sowie $z_0''(L) = 0$ und $z_0'''(L) = 0$ folgt $C_1 = \beta L$, $C_2 = -\beta L^2/2$, sowie $C_3 = C_4 = 0$ und somit

$$z_0 = -\frac{\beta}{2}\Big(\frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{3}Lx + \frac{1}{12}x^2\Big)x^2 \tag{44}$$

was mit Gleichung (38) übereinstimmt, da $\beta/2 = K'/EI$.