Kontinuumsmechanik
Musterlösung 2

Aufgabe 2.1 Bathyscaph (Tiefsee-U-Boot)

Aus Symmetriegründen kann der Aussenüberdruck nur eine Deformation in radialer Richtung hervorrufen, i.e.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(r)\mathbf{e}_r. \tag{1}$$

Inbesondere ist die Deformation rotationsfrei, $\nabla\wedge\mathbf{u} = 0$, und die Gleichgewichtsbedingung lässt sich schreiben als (siehe Skript S.15)

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = \partial_r\big(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 u)\big)\mathbf{e}_r = 0. \tag{2}$$

Zusätzlich folgt aus (1), dass nur die drei Diagonalkomponenten des Deformationstensors von Null verschieden sind, $u_{rr} = \partial_r u_r$ und $u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = u_r/r$.[1]
Die Lösung von Gl.(2) lässt sich folgend schreiben,

$$u(r) = cr + \frac{d}{r^2}, \tag{3}$$

wo Konstanten c und d durch die Randbedingungen zu bestimmen sind. Der Deformationstensor ist somit

$$u_{rr} = \partial_r u(r) = c - \frac{2d}{r^3}, \qquad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{u(r)}{r} = c + \frac{d}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad u_{ll} = 3c. \tag{4}$$

Weiter bestimmen wir den Spannungstensor,

$$\sigma_{ij} = K u_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}u_{ll}\right) = \delta_{ij}\left[3Kc + 2\mu\frac{d}{r^3}(1 - 3\delta_{ir})\right]. \tag{5}$$

Tatsache, dass an der Aussenoberfläche (Innenoberfläche) Druck $p_{\mathrm{Atm}}+p_h$ (p_{Atm}) herrscht, ergibt die Randbedingungen

$$\sigma_{jr}(R_a) = -\delta_{jr}(p_{\mathrm{Atm}} + p_h), \qquad \sigma_{jr}(R_i) = -\delta_{jr}p_{\mathrm{Atm}}, \tag{6}$$

wodurch wir c und d explizit bestimmen können,

$$c = \frac{-(p_{\mathrm{Atm}} + p_h)R_a^3 + p_{\mathrm{Atm}}R_i^3}{3K(R_a^3 - R_i^3)}, \qquad d = -\frac{p_h R_a^3 R_i^3}{4\mu(R_a^3 - R_i^3)}. \tag{7}$$

[1] *Deformationstensor in Kugelkoordinaten*
Den Deformationstensor in Kugelkoordinaten r, θ, φ erhält man durch kovariantes Ableiten des Vektors $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi$. Dabei muss die Ableitung sowohl auf Koeffizienten als auch auf Basisvektoren wirken. Man findet

$$u_{rr} = \partial_r u_r, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi u_\varphi + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta + \frac{u_r}{r},$$
$$2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}(\partial_\theta u_\varphi - u_\varphi\cot\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi u_\theta,$$
$$2u_{r\theta} = \partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\partial_\theta u_r, \quad 2u_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi u_r + \partial_r u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r}.$$

Der anisotropische Teil von dem Spannungstensor $\bar{\bar{\sigma}}$ ist $\tau_{ij} = 2\delta_{ij}\mu\frac{d}{r^3}(1-3\delta_{ir})$, daher das *von Mises* Festigkeitskriterium ist einfach

$$6\mu\frac{|d|}{r^3} < \sigma_{\text{Fliessgrenze}}. \tag{8}$$

Anscheinend ist das Kriterium am stärksten für $r = R_i$, für Stahl ist es spezifisch

$$0.239 \approx \frac{3p_h}{2\sigma_{\text{Fliessgrenze für Stahl}}} < 1 - \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^3, \qquad \Rightarrow \qquad R_i < 0.913 R_a. \tag{9}$$

Die Kabine würde auf der Wasseroberfläche schwimmen, falls der Auftrieb der gesamten Kabine grösser als die eigene Schwere ist,

$$\frac{4}{3}\pi R_a^3 \rho g > \frac{4}{3}\pi\left(R_a^3 - R_i^3\right)\rho_{\text{Stahl}} g \qquad \Leftrightarrow \qquad 0.127 \approx \frac{\rho}{\rho_{\text{Stahl}}} > 1 - \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^3, \tag{10}$$

was augenscheinlich nicht mit der Festigkeitsbedingung Gl.(9) zu vereinbaren ist. Somit braucht ein Bathyscaph einen Auftriebskörper, der üblicherweise mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Diese muss eine geringere Dichte als Wasser aufweisen und wie Wasser kaum komprimierbar sein. Laut `wikipedia` wird dazu meist Benzin verwendet.

Aufgabe 2.2 Freie Energiedichte des hexagonalen Kristalls

Die freie Energiedichte $F = \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}$ muss invariant sein unter Transformationen, die den Kristall in sich selbst überführen. Folglich müssen auch die Elastizitätsmoduln λ_{iklm} diese Symmetrieeigenschaften besitzen. Dazu benutzen wir, dass diese vierfach kovarianten Tensoren wie ein Produkt von vier Basisvektoren transformieren.
Das hexagonale Gitter besitzt eine sechsfache Rotationsachse, welche wir mit der z-Richtung zusammenfallen lassen. Alle Symmetrie-Rotationen können dargestellt werden als mehrfaches Produkt der Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) & 0 \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Diese Matrix wird diagonal in der Basis $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_z\}$ mit $\mathbf{e}_\xi = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ und $\mathbf{e}_\eta = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ mit Diagonaleinträgen $\exp(\pm i\pi/3)$ und 1. Die neue Basis $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_z$ transformiert daher unter einer Drehung wie $\mathbf{e}_\xi \to \exp(i\pi/3)\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta \to \exp(-i\pi/3)\mathbf{e}_\eta$ und $\mathbf{e}_z \to \mathbf{e}_z$. Daraus ist ersichtlich, dass das Produkt von vier solchen Elementen nur invariant bleibt, falls die Basisvektoren $\mathbf{e}_\xi$ und $\mathbf{e}_\eta$ gleich oft vorkommen. Dies ergibt fünf nicht-verschwindenden Moduln, λ_{zzzz}, $\lambda_{\xi\eta zz}$, $\lambda_{\xi z\eta z}$, $\lambda_{\xi\xi\eta\eta}$ und $\lambda_{\xi\eta\xi\eta}$ und die freie Energiedichte lässt sich schreiben als

$$F_{\text{hex}} = \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}u_{\xi\eta}^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}u_{\xi\xi}u_{\eta\eta} + 2\lambda_{\xi\eta zz}u_{\xi\eta}u_{zz} + 4\lambda_{\xi z\eta z}u_{\xi z}u_{\eta z}. \tag{12}$$

Alle weiteren Kristallsymmetrien führen zu keinen zusätzlichen Einschränkungen. Der Deformationstensor u_{ik} transformiert wie ein Produkt von zwei Basisvektoren. Mit $\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_\xi = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/2 = (\mathbf{e}_x^2 - \mathbf{e}_y^2)/2 + i\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\eta\mathbf{e}_\eta = (\mathbf{e}_x^2 - \mathbf{e}_y^2)/2 - i\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_\eta = (\mathbf{e}_x^2 + \mathbf{e}_y^2)/2$ folgt

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi}u_{\eta\eta} &= (u_{xx} - u_{yy})^2/4 + u_{xy}^2, \\ u_{\xi\eta}^2 &= (u_{xx} + u_{yy})^2/4, \\ u_{\xi z}u_{\eta z} &= (u_{xz}^2 + u_{yz}^2)/2 \end{aligned}$$

und damit ist F_{hex} von der gewünschten Form

$$\begin{aligned}F_{\text{hex}} =&\frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx}+u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}[(u_{xx}-u_{yy})^2/4 + u_{xy}^2] \\ &+ \lambda_{\xi\eta zz}(u_{xx}+u_{yy})u_{zz} + 2\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2).\end{aligned} \tag{13}$$

Deformationen in der xy-Ebene werden beschrieben durch die zwei Elastizitätsmoduln $\lambda_{\xi\eta\xi\eta}$ und $\lambda_{\xi\xi\eta\eta}$. Der Kristall verhält sich also in dieser Ebene wie ein isotropes Medium. Dies gilt insbesondere für ein zweidimensionales hexagonales Gitter.

Aufgabe 2.3 Poissonzahl in 2D*

Wir lösen diese Aufgabe für eine beliebige Dimension d. Den Deformationstensor $u_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$ schreiben wir als Summe von isotropischer Kompression und den Rest,

$$u_{ij} = \left(u_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{d}u_{ll}\right) + \frac{\delta_{ij}}{d}u_{ll}. \tag{14}$$

Die freie Energie kann somit als

$$F = \mu\left(u_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{d}u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2 \tag{15}$$

geschrieben werden; mit Kompressionsmodul K und Schermodul μ der entsprechenden Dimension.
Weiter schreiben wir explizit den Differential von F auf,

$$\mathrm{d}F = \underbrace{\left[Ku_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{d}u_{ll}\right)\right]}_{\sigma_{ij}}\mathrm{d}u_{ij}, \tag{16}$$

um mittels Relation $\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)_T$ den Spannungstensor σ_{ij} zu bestimmen. Die Spur von $\bar{\bar{\sigma}}$ ergibt $\sigma_{ll} = dKu_{ll}$, was wir bei der Inversion von $\sigma_{ij}(u_{ij})$ benutzen,

$$u_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{d^2K}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{d}\sigma_{ll}\right). \tag{17}$$

Jetzt untersuchen wir eine homogene Deformation von einem geeigneten d-dimensionalen Objekt. In 2D nehmen wir einen Rechteck, der parallel zu den Achsen liegt (in 3D würde ein gerader Zylinder mit Grundfläche in yz Ebene zurecht sein) mit Zugdruck p (in 2D ist $p = F/L$, Kraft über Länge) in Richtung von der x-Achse. Somit erhalten wir die Randbedingungen

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ix}\delta_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{ll} = p. \tag{18}$$

Mittels Eq.(17) erhalten wir

$$u_{ij} = \delta_{ij}\frac{p}{d}\left[\frac{1}{dK} - \frac{1}{2\mu}(1 - d\delta_{ix})\right]. \tag{19}$$

Die Poissonzahl ist dann

$$\sigma = -\frac{u_{yy}}{u_{xx}} = \frac{dK - 2\mu}{d(d-1)K + 2\mu} = \begin{cases}\frac{K-\mu}{K+\mu} & d = 2, \\ \frac{1}{2}\frac{3K-2\mu}{3K+\mu} & d = 3.\end{cases} \tag{20}$$