Kontinuumsmechanik
Musterlösung 1

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 1.1 Sturzfaktor

1. Wird ein elastisches Seil der Länge l um z elongiert, übt es eine rücktreibende Kraft $F = -Cz/l$ aus ($z = 0$ beschreibt die Lage des freien Seilendes). Die maximale Kraft welche der Fallende am eigenen Körper erfährt wird also bei maximaler Auslenkung (Δl) erreicht, $F_{\max} = C\Delta l/l$. Die Gesamtenergie des Stürzenden ist gegeben durch $mg(h + \Delta l)$ während die Deformation des Seils die elastische Energie
$$E = \int F dx = \frac{C\Delta l^2}{2l} \tag{1}$$
speichert. Es folgt durch gleichsetzen die Bestimmungsgleichung für Δl
$$mg(h + \Delta l) = \frac{C}{2l}\Delta l^2. \tag{2}$$
Bei statischer Belastung, d.h. Kräftegleichheit $mg = C_s\Delta l_s/l$, ist die statische Auslenkung gegeben durch $\Delta l_s/l = mg/C_s$. Im dynamischen Fall, ergibt die quadratische Gleichung (2)
$$\Delta l/l = \frac{mg}{C}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hC}{mgl}}\right) \tag{3}$$
und damit
$$F_{\max} = mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hC}{mgl}}\right) = mg\big(1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_s}\big). \tag{4}$$
Im letzten Ausdruck wurde die statische Auslenkung verwendet. Gegeben ein Seil (C) und ein Kletterer (m) ist maximale Belastung beim Sturz durch die Grösse h/l bestimmt. Beachte, dass ein Fall mit Sturzfaktor $h/l = 0$ (d.h. $h = 0$) eine Auslenkung $\Delta l = 2\Delta l_s$ erzeugt und somit die maximale Kraft auf den Fallenden doppelt so gross ist wie die statische Kraft.

2. Die statische Elastizität ergibt sich aus $C_s = mg/(\Delta l_s/l) \approx 11\text{kN}$.

   Die dynamische Elastizität ergibt sich aus $C_d = F_{\max}/(\Delta l/l) \approx 29\text{kN}$.

   Wir ersetzen in den Gleichungen (3) und (4) die Grösse mg/C durch das bekannte Verhältnis und erhalten für einen Sturzfaktor von 1.75 die Vorhersagen
$$\Delta l/l = 57\% \qquad F_{\max} = 6.4\text{kN}, \tag{5}$$
$$\Delta l/l = 33\% \qquad F_{\max} = 9.8\text{kN}, \tag{6}$$
für die statische, und dynamische Elastizität. Der Grund für die Diskrepanz zwischen dem Experiment und den Vorhersagen welche auf die statische Elastizität beruhen liegt in der Tatsache, dass die Elastizität in Wirklichkeit frequensabhängig ist, was im Fall einer schnellen Belastung die maximale Kraft vergrössert und die Elongation verkleinert. Die dynamische Elastizität beschreibt das System wesentlich besser. Trotzallem ist die Übereinstimmung nicht perfekt was auf eine unvollkommene Beschreibung zurückzuführen ist. Da das Seil nach einem Sturz nicht harmonisch oszilliert sind nicht-lineare Effekte einzubeziehen.

Aufgabe 1.2 Masse an zwei elastischen Seilen

Die Gesamtenergie des Systems in Abhängigkeit der vertikalen Auslenkung der Masse h ist gegeben durch

$$E = -mgh + 2\frac{C}{2}\frac{\Delta l^2}{l} \approx C\frac{h^4}{4l^3} - mgh, \tag{7}$$

wobei wir $\Delta l = \sqrt{l^2 + h^2} - l \approx h^2/2l$ benützt haben. Man sieht hier also, dass im Gegensatz zur *eingespannten* Saite, wo die elastische Energie quadratisch mit der Auslenkung anwächst, die Energie eines ungespannten elastischen Seils zur vierten Potenz der Auslenkung proportional ist. Da für kleine Auslenkungen $\alpha \approx h/l$ gilt, finden wir

$$E/l \approx \frac{C}{4}\alpha^4 - mg\alpha, \tag{8}$$

und E nimmt sein Minimum bei

$$\alpha = \left(\frac{mg}{C}\right)^{1/3} \tag{9}$$

an. Die Kraft auf die Seitenwände ist gegeben durch

$$F = C\frac{\Delta l}{l} \approx C\frac{h^2}{2l^2} = C\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}C^{1/3}(mg)^{2/3}. \tag{10}$$

Beachte, dass die Kraft mit steigender Elasitzität zunimmt wie $F \propto C^{1/3}$!
Notiz: Für $mg/C \gg 1$ wird die Annahme kleiner Auslenkungen verletzt. Wir erhalten dann $h/l \approx mg/2C + 1$ und $F \approx mg/2 - C$.

Aufgabe 1.3 Aquädukt

Die Kraft auf ein Element dx ($\neq dl$!) des stützenden Bogens ist nur durch die Gravitation in y-Richtung und die Spannung im Bogen selbst gegeben. Die Grösse der Gravitationskraft ist aber x-Abhängig, und zwar gemäss

$$F_G(x) = -\rho_0 g u(x) dx, \tag{11}$$

wie man sich leicht überzeugen kann. Hier wählten wir $u(\pm L/2) = h$ und $0 \leq u(x) < h$. Analog zum Skript finden sich dadurch die Gleichungen

$$\frac{dT_y}{dx} = \rho_0 g u(x), \quad \frac{dT_x}{dx} = 0, \tag{12}$$

mit der Spannung $\mathbf{T}$. Damit wir die Bauelemente nicht fixieren müssen, fordern wir wieder, dass die Spannung nur tangential wirkt, d.h. dass $T_y/T_x = du/dx$, und durch einmaliges Ableiten nach x gilt

$$T_x u'' = \rho_0 g u(x). \tag{13}$$

Achtung! Im Gegensatz zur Kettenlinie (wo die Spannung ausdehnend wirken) ist hier die Spannung kompressiv, d.h. $T_x < 0$. Wir finden die Lösung

$$u(x) = h\frac{\cosh(\sqrt{\rho_0 g/|T_x|}x)}{\cosh(\sqrt{\rho_0 g/|T_x|}L/2)}. \tag{14}$$

Beachte, dass bei gleichbleibender Geometrie und zunehmender Materialdichte die Brücke immer 'hohler' wird, während bei abnehmender Dichte massiv wird ($u \to 0$).

Aufgabe 1.4 Seilspringen*

Wir beschreiben ein rotierendes Seil mit einer Kreisfrequenz ω gedreht im rotierenden Bezugssystem. Insbesondere, vernachlässigen wir den Effekt der Gravitation. Die Lage des Seils wird durch $(x, u(x))$ parametrisiert, mit $u(\pm L/2) = 0$ und $0 \leq u(x)$. Es wirkt auf ein Seilelement dl am Ort x die Kraft

$$F(x) = -\rho_l \omega^2 u(x) dl, \tag{15}$$

mit $dl = dx\sqrt{1 + u'(x)^2}$ und der linearen Massendichte ρ_l. Die Kraft wirkt zur Rotationsachse. Die Bestimmungsgleichung folgt analog zur obigen Aufgabe,

$$T_x u'' = \rho_l \omega^2 u \sqrt{1 + (u')^2}. \tag{16}$$

Hier gilt $T_x > 0$. Nach Division duch den Wurzelterm und Multiplikation mit u', finden wir

$$\frac{u''u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} = \frac{\rho_l \omega^2}{T_x} u u' \tag{17}$$

und nach einer Integration:

$$\sqrt{1 + (u')^2} = \frac{\rho_l \omega^2}{T_x}(u^2 + u_0^2). \tag{18}$$

Eine weitere Umformung $u' = du/dx$ ergibt schliesslich eine Bestimmungsgleichung

$$dx = \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{\rho_l \omega^2}{T_x}\right)^2 \left(u^2 + u_0^2\right)^2 - 1}}, \tag{19}$$

dessen Fundamentale Lösung Elliptische Integrale sind, symbolisch: $x = EI(u)$. Letztere müssen formell noch invertiert werden um $u(x)$ zu bestimmen. Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass üblicherweise nicht T_x sondern das Verhältnis der Seillänge L_s zur den beiden Endpunkten L vorgegeben wird.

Aufgabe 1.5 Differentiale in Zylinderkoordinaten

Es gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Damit folgen einfach

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}\right) = \left(-\frac{\sin\varphi}{r}, \frac{\cos\varphi}{r}\right). \tag{21}$$

Zusammen ergibt das

$$\partial_x = \cos\varphi\, \partial_r - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi, \quad \partial_y = \sin\varphi\, \partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi. \tag{22}$$

Ausserdem wissen wir, dass

$$\mathbf{e}_x = \cos\varphi\, \mathbf{e}_r - \sin\varphi\, \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_y = \sin\varphi\, \mathbf{e}_r + \cos\varphi\, \mathbf{e}_\varphi. \tag{23}$$

1.

$$\partial_x\Psi = \cos\varphi\ \partial_r\Psi - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi\Psi, \quad \partial_y\Psi = \sin\varphi\ \partial_r\Psi + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi\Psi, \quad \partial_z\Psi = \partial_z\Psi.$$

weshalb

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi &= \partial_x\Psi\ \mathbf{e}_x + \partial_y\Psi\ \mathbf{e}_y + \partial_z\Psi\ \mathbf{e}_z \\
&= \left(\cos\varphi\ \partial_r\Psi - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi\Psi\right)(\cos\varphi\ \mathbf{e}_r - \sin\varphi\ \mathbf{e}_\varphi) \\
&\quad + \left(\sin\varphi\ \partial_r\Psi + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi\Psi\right)(\sin\varphi\ \mathbf{e}_r + \cos\varphi\ \mathbf{e}_\varphi) + \partial_z\Psi\ \mathbf{e}_z \\
&= \partial_r\Psi\ \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi\Psi\ \mathbf{e}_\varphi + \partial_z\Psi\ \mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\partial_x^2\Psi &= \left(\cos\varphi\ \partial_r - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi\right)\left(\cos\varphi\ \partial_r\Psi - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi\Psi\right) \\
&= \cos^2\varphi\ \partial_r^2\Psi + \frac{\sin^2\varphi}{r}\partial_r\Psi - 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi\Psi + 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\partial_\varphi\Psi + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\partial_\varphi^2\Psi \\
\partial_y^2\Psi &= \left(\sin\varphi\ \partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi\right)\left(\sin\varphi\ \partial_r\Psi + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi\Psi\right) \\
&= \sin^2\varphi\ \partial_r^2\Psi + \frac{\cos^2\varphi}{r}\partial_r\Psi + 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi\Psi - 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\partial_\varphi\Psi + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\partial_\varphi^2\Psi \\
\partial_z^2\Psi &= \partial_z^2\Psi
\end{aligned}$$

und damit

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\Psi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\Psi + \partial_z^2\Psi.$$

3.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \\
&= \left(\cos\varphi\ \partial_r - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi\right)(\cos\varphi\ A_r - \sin\varphi A_\varphi) \\
&\quad + \left(\sin\varphi\ \partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi\right)(\sin\varphi\ A_r + \cos\varphi A_\varphi) + \partial_z A_z \\
&= \frac{1}{r}\partial_r(rA_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi A_\varphi + \partial_z A_z
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
(\nabla\wedge\mathbf{A})_x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y = \left(\sin\varphi\ \partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi\right)A_z - \sin\varphi\ \partial_z A_r - \cos\varphi\ \partial_z A_\varphi \\
(\nabla\wedge\mathbf{A})_y &= \partial_z A_x - \partial_x A_z = \cos\varphi\ \partial_z A_r - \sin\varphi\ \partial_z A_\varphi - \cos\varphi\ \partial_r A_z + \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi A_z \\
(\nabla\wedge\mathbf{A})_z &= \partial_x A_y - \partial_y A_x = \left(\cos\varphi\ \partial_r - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi\right)(\sin\varphi\ A_r + \cos\varphi\ A_\varphi) \\
&\quad - \left(\sin\varphi\ \partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi\right)(\cos\varphi\ A_r - \sin\varphi\ A_\varphi) = \partial_r A_\varphi - \frac{1}{r}\partial_\varphi A_r + \frac{1}{r}A_\varphi
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
(\nabla\wedge\mathbf{A}) &= (\nabla\wedge\mathbf{A})_x\mathbf{e}_x + (\nabla\wedge\mathbf{A})_y\mathbf{e}_y + (\nabla\wedge\mathbf{A})_z\mathbf{e}_z \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial\varphi A_z - \partial_z A_\varphi\right)\mathbf{e}_r + (\partial_z A_r - \partial_r A_z)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\partial_r(rA_\varphi) - \partial_\varphi A_r\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$