ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kontinuumsmechanik
Serie 3

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 3.1 Geneigte elastische Platte

Wir betrachten eine um den Winkel α zur Horizontalen geneigte, unendlich ausgedehnte Platte der Dicke H aus linear-elastischem Material (Elastizitätsmodul E, Poissonsche Zahl σ, Massendichte ρ), die fest auf einem starren Untergrund aufliegt und sich unter ihrem eigenen Gewicht deformiert. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass x- und z-Achse parallel und die y-Achse normal zur Platte liegen (Vernachlässige den Druck auf die Platte!).

1. Berechne das Auslenkungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ im Gleichgewicht. Wie weit senkt sich die Plattenoberfläche für $\alpha = 0$ ab?

   Hinweis: Wie vereinfachen die unendliche Ausdehnung und die Uniformität längs x und z die Feldgleichungen?

2. Berechne aus dem Auslenkungsfeld den Spannungstensor $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ im Gleichgewicht. Erkläre insbesondere das Ergebnis für σ_{zz}!

3. Auf die Platte werde eine weitere, unendlich dünne (d.h. undeformierbare) Platte der Flächenmassendichte ρ_0 gelegt. Wie verändert sich im statischen Gleichgewichtsfall die Lösung?

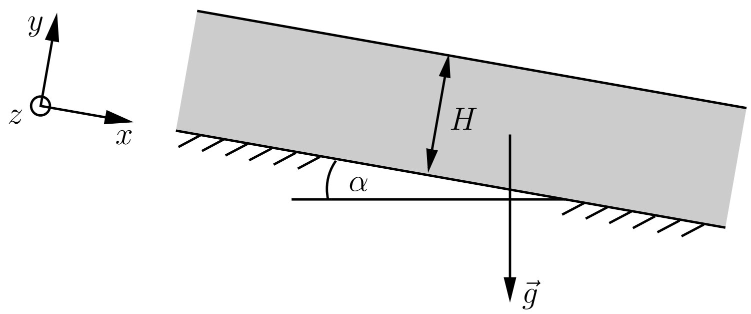

Abbildung 1: Eine geneigte Platte wird durch das eigene Gewicht deformiert.

Aufgabe 3.2 Zylindrisches Rohr

1. **Rohrleitung**: Ein elastisches zylindrisches Rohr ist einem inneren Druck p_0 und einem äusseren Druck p_1 unterworfen. Seine Länge werde nicht verändert (effektiv zweidimensionales Problem), und es seien keine Volumenkräfte vorhanden. Bestimme das Auslenkungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ und den Spannungstensor $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, die im Gleichgewicht herrschen.

2. **Welle**: In diesem Fall rotiere das zylindrische Rohr mit einer Winkelgeschwindigkeit ω. Die resultierenden Volumenkräfte sind durch die Zentrifugalkraft $\mathbf{F} = \rho\omega^2\mathbf{e}_r$ gegeben. Äussere Drücke werden vernachlässigt. Bestimme wiederum das Auslenkungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ und den Spannungstensor $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ im Gleichgewicht.

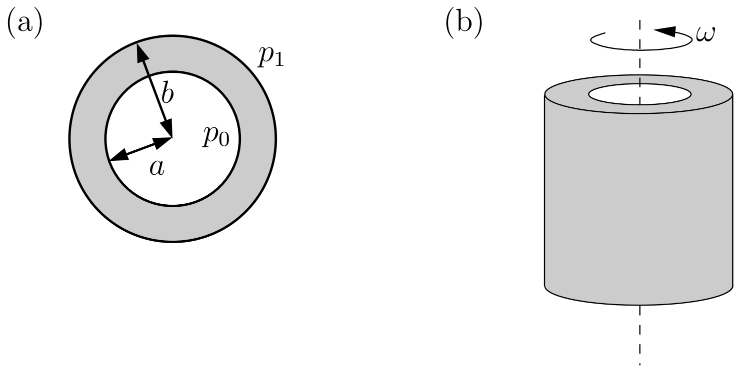

Abbildung 2: (a) Rohr unter Druck. (b) Rotierendes Rohr.

Aufgabe 3.3 Krümmung eines Balkens unter der Sonne

Betrachte einen dünnen Balken der Länge l und der Dicke $2h$, der an einem Ende ($x = 0$) eingespannt ist. Die Oberfläche des Balkens wird stark von der Sonne bestrahlt. Dies induziert wegen der vertikalen Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite einen Temperaturgradienten im Balken (unter vereinfachter Annahme einer linearen Abhängigkeit $T(z) = (T_o - T_u)z/2h + (T_o + T_u)/2$). Bestimme die entsprechenden Volumenkräfte und berechne die Krümmung des Balkens (unter Vernachlässigung der Gravitationskraft, die auf den Balken wirkt und unter der Annahme, dass die Krümmung klein ist).