

Übungsserie 4

Abgabe: 23. März 2012

Aufgabe 1 [*Magnetischer Monopol*]: Der Dirac Ansatz für das Vektorpotential eines magnetischen Monopols ist

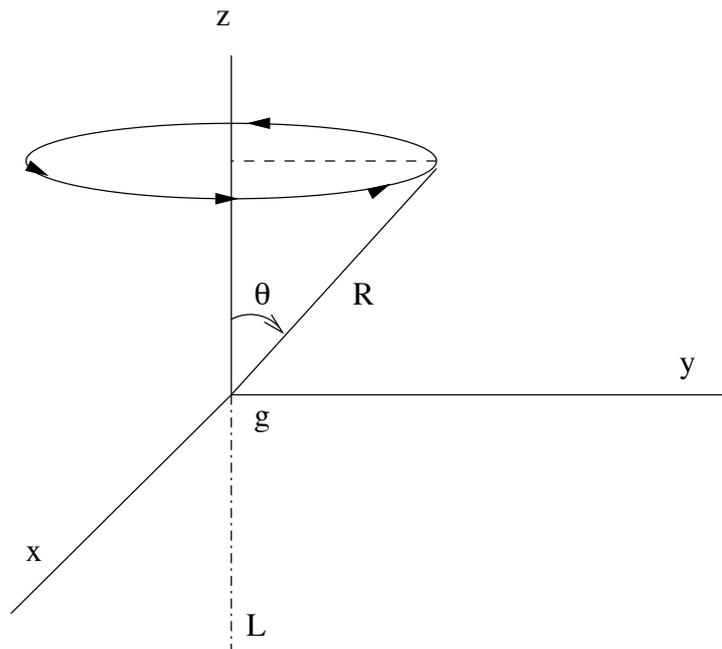
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}' \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3},$$

wobei das Linienintegral entlang des Dirac Strings L zu nehmen ist. Wir betrachten den Fall, wo L die negative z -Achse von $z = -\infty$ nach $z = 0$ ist.

- (i) Berechne \mathbf{A} explizit und zeige, dass die Komponenten des Vektorpotentials in Kugelkoordinaten $\mathbf{A}_r = 0$, $\mathbf{A}_\theta = 0$ und $\mathbf{A}_\phi = \frac{g(1-\cos\theta)}{r \sin\theta} = \frac{g}{r} \tan \frac{\theta}{2}$ sind.
- (ii) Zeige, dass das zugehörige Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ überall (abgesehen von $\theta = \pi$) dieselbe Form wie das Coulomb-Feld einer elektrischen Punktladung hat.
[Hinweis: in sphärischen Koordinaten ist

$$\nabla \wedge (A_\phi \mathbf{e}_\phi) = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin\theta) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \mathbf{e}_\theta .]$$

- (iii) Ausgehend von dem in (ii) berechneten Feld \mathbf{B} bestimme den magnetischen Gesamtfluss, der durch den in der Abbildung gezeigten Kreis vom Radius $R \sin\theta$ hindurchtritt. Betrachte die beiden Fälle $\theta < \frac{\pi}{2}$ und $\theta > \frac{\pi}{2}$ separat, aber betrachte in beiden Fällen den nach oben gerichteten Fluss.



- (iv) Berechne das Linienintegral $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$ entlang des Kreisrandes und vergleiche das Ergebnis mit dem Resultat aus (iii). Warum stimmen die beiden Ergebnisse für $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ überein, aber unterscheiden sich für $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ um eine Konstante? Interpretiere die Differenz.

Aufgabe 2 [*Drehimpuls elektromagnetischer Felder*]: Der Drehimpuls, der den elektromagnetischen Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} im ladungs- und stromfreien Raum zugeschrieben wird, ist

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi k c} \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))] .$$

- (i) Unter der Annahme, dass die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} kompakten Träger besitzen, zeige, dass

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi k c} \int d^3\mathbf{x} \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^3 E_j(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \wedge \nabla) A_j(\mathbf{x}, t) \right] ,$$

wobei \mathbf{A} das Vektorpotential ist. Der erste Term kann als Beitrag des ‘Spins’ der Photonen zum Gesamtdrehimpuls interpretiert werden; der zweite Term ist der Bahndrehimpuls.

[**Hinweis:** verwende die Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ und schreibe das Magnetfeld als $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$.]

- (ii) In der Coulomb Eichung ist das Vektorpotential durch die ebene Welle

$$\mathbf{A}(z, t) = \text{Re} (A_+ \epsilon_+ e^{i(kz - \omega t)} + A_- \epsilon_- e^{i(kz - \omega t)})$$

gegeben, wobei $\epsilon_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)$ und A_{\pm} beliebige Konstanten sind. Zeige, dass dieses Vektorpotential die Coulomb Eichung $\text{div} \mathbf{A} = 0$ erfüllt, und bestimme die zugehörigen elektrischen und magnetischen Felder. Zeige, dass diese die Maxwell Gleichungen im leeren Raum lösen.

- (iii) Unter den Annahmen von (ii) zeige, dass der Zeitmittelwert des ersten (Spin) Terms des Drehimpulses

$$\mathbf{L}_{spin} = \frac{1}{4\pi k c} \frac{|\mathbf{k}|}{2} \mathbf{e}_z (|A_+|^2 - |A_-|^2)$$

ist. Interpretiere das Ergebnis.