Übung 1. *Besetzungszahlbasis*

Betrachte eine Menge von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, welche die bosonischen (-) bzw. fermionischen (+) (Anti-)kommutatorrelationen

$$[a_\lambda, a_\mu^\dagger]_\pm = \delta_{\lambda\mu}\ , \quad [a_\lambda, a_\mu]_\pm = [a_\lambda^\dagger, a_\mu^\dagger]_\pm = 0\,, \tag{1}$$

erfüllen. Hier und in folgenden Aufgaben stehen die griechischen Indizes (μ, λ, ...) für inclusive Zustandslabel.

(a) Definiere den Teilchenzahloperator als $\hat{n}_\lambda = a_\lambda^\dagger a_\lambda$ und zeige mit Hilfe von (1), dass sowohl für Bosonen als auch für Fermionen folgende Kommutatorrelationen gelten

$$[\hat{n}_\lambda, a_\mu] = -\delta_{\lambda\mu} a_\mu\ , \quad [\hat{n}_\lambda, a_\mu^\dagger] = \delta_{\lambda\mu} a_\mu^\dagger\ . \tag{2}$$

Lösung: Hier und im Folgenden stehen die obere Zeichen für Fermionen, die unteren für Bosonen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}[\hat{n}_\lambda, a_\mu] &= a_\lambda^\dagger a_\lambda a_\mu - a_\mu a_\lambda^\dagger a_\lambda = a_\lambda^\dagger a_\lambda a_\mu - (\delta_{\lambda\mu} a_\lambda \mp a_\lambda^\dagger a_\mu a_\lambda) \\ &= a_\lambda^\dagger a_\lambda a_\mu - \delta_{\lambda\mu} a_\lambda - a_\lambda^\dagger a_\lambda a_\mu = -\delta_{\lambda\mu} a_\mu\ .\end{aligned} \tag{L.1}$$

Da $\hat{n}_\lambda^\dagger = (a_\lambda^\dagger a_\lambda)^\dagger = a_\lambda^\dagger a_\lambda = \hat{n}_\lambda$ und $[X,Y] = -[Y,X]$, erhalten wir damit auch die zweite Gleichung in (2).

(b) Zeige für den bosonischen Fall mit Hilfe von ausschliesslich (1), (2) und $a_\lambda |0\rangle = 0\ \forall\lambda$ zunächst, dass $(a_\lambda^\dagger)^n |0\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{n}_\lambda$ mit Eigenwert n ist, und anschließend, dass der Zustand $|n_\lambda\rangle = \frac{(a_\lambda^\dagger)^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}} |0\rangle$ die Norm 1 besitzt. Nutze diese und obige Ergebnisse, um zu zeigen, dass

$$\langle n_1, \ldots, n_i, \ldots | m_1, \ldots, m_i, \ldots \rangle = \delta_{n_1 m_1} \ldots \delta_{n_i m_i} \ldots\ , \text{ mit} \tag{3}$$

$$|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \left[\ldots \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \ldots \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \right] |0\rangle\ . \tag{4}$$

Lösung: Das Vakuum ist wegen $\hat{n}_\lambda |0\rangle = a_\lambda^\dagger a_\lambda |0\rangle = 0$ ein Eigenzustand zu $\hat{n}_\lambda$ mit Eigenwert 0. Mit vollständiger Induktion zeigt man, dass $\hat{n}_\lambda (a_\lambda^\dagger)^n |0\rangle$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ein Eigenzustand zum Eigenwert n ist. Der Induktionsschritt folgt mit Hilfe von (2):

$$\hat{n}_\lambda (a_\lambda^\dagger)^{n+1} |0\rangle = \hat{n}_\lambda a_\lambda^\dagger (a_\lambda^\dagger)^n |0\rangle = a_\lambda^\dagger (1 + \hat{n}_\lambda)(a_\lambda^\dagger)^n |0\rangle = (n+1)(a_\lambda^\dagger)^{n+1} |0\rangle\ , \tag{L.2}$$

im letzten Schritt wurde die Induktionsannahme benutzt.

Um für $n > 0$ die richtige Normierung $c_{n,\lambda}$ mit $|n_\lambda\rangle = c_{n,\lambda} (a_\lambda^\dagger)^n |0\rangle$ und $\langle n_\lambda | n_\lambda \rangle = 1$ zu erhalten, beachten wir, dass $\langle 0|0\rangle = 1$ und dass $|(n+1)_\lambda\rangle = \frac{c_{n+1,\lambda}}{c_{n,\lambda}} a_\lambda^\dagger |n_\lambda\rangle$ bzw. $\langle (n+1)_\lambda| = \frac{c^*_{n+1,\lambda}}{c^*_{n,\lambda}} \langle n_\lambda | a_\lambda$, so dass

$$1 = \langle (n+1)_\lambda | (n+1)_\lambda \rangle = \left| \frac{c_{n+1,\lambda}}{c_{n,\lambda}} \right|^2 \langle n_\lambda | a_\lambda a_\lambda^\dagger |n_\lambda\rangle = \left| \frac{c_{n+1,\lambda}}{c_{n,\lambda}} \right|^2 \langle n_\lambda | 1 + \hat{n}_\lambda |n_\lambda\rangle = \left| \frac{c_{n+1,\lambda}}{c_{n,\lambda}} \right|^2 (1 + n_\lambda)\ . \tag{L.3}$$

Wählen wir positive $c_{n,\lambda}$, erhalten wir damit $c_{n+1,\lambda} = \frac{c_{n,\lambda}}{\sqrt{n_\lambda + 1}}$. Da desweiteren

$$1 = \langle 1_\lambda | 1_\lambda \rangle = |c_{1,\lambda}|^2 \langle 0| 1 + a_\lambda^\dagger a_\lambda |0\rangle = |c_{1,\lambda}|^2\ , \tag{L.4}$$

folgt, dass $c_{n,\lambda} = 1/\sqrt{n_\lambda!}$ zur richtigen Normierung des Zustandes $|n_\lambda\rangle$ mit $n_\lambda > 0$ führt. Allgemeiner gilt $\langle m_\lambda | n_\lambda \rangle = \delta_{m_\lambda n_\lambda}$: O.B.d.A. (h.c.) gelte $m_\lambda \geq n_\lambda$, nutzt man zur Berechnung des Matrixelements analog zu

(L.3) n_λ mal eine Reduktion von $a_\lambda a_\lambda^\dagger$ innerhalb des betrachteten Matrixelements zu einer komplexen Zahl, verbleiben wir mit $\langle m_\lambda|n_\lambda\rangle \propto \langle 0|\,(a_\lambda)^{m_\lambda - n_\lambda}\,|0\rangle \propto \delta_{n_\lambda m_\lambda}$, da $a_\lambda\,|0\rangle = 0$.

Berücksichtigt man obige Überlegungen, so wie (1,2), welche implizieren, dass Operatoren zu unterschiedlichen Werten von λ kommutieren, erkennen wir, dass

$$|n_1, n_2, \ldots\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(a_i^\dagger)^{n_i}\,|0\rangle \tag{L.5}$$

mit $n_i \in \mathbb{N}_0$ ein orthonormaler Zustand der Besetzungszahlbasis mit Eigenwerten n_i für $\hat{n}_i$ ist. Insbesondere gilt dann Gleichung (3).

(c) Wiederhole (b) für Fermionen. Beachte dabei Aufgabe 3.(a) der letzten Serie.

Lösung: Für Fermionen fanden wir auf der letzten Serie, dass $n_\lambda = 0, 1$ die einzigen möglichen Eigenwerte von $\hat{n}_\lambda$ sind. Da in (L.2) nur (2) angenommen wurde, gilt diese Gleichung auch für Fermionen, jedoch folgt wegen (1) $a_\lambda^\dagger a_\lambda^\dagger = 0 = a_\lambda a_\lambda$, so dass wir auch hier sofort sehen, dass nur $|0\rangle\,, |1_\lambda\rangle$ auftreten. Mit $|1_\lambda\rangle = c_\lambda a_\lambda^\dagger\,|0\rangle$ erhalten wir

$$\langle 1_\lambda|1_\lambda\rangle = |c_\lambda|^2\,\langle 0|\,a_\lambda a_\lambda^\dagger\,|0\rangle = |c_\lambda|^2\,\langle 0|\,1 - a_\lambda^\dagger a_\lambda\,|0\rangle = 1 \tag{L.6}$$

also $c_\lambda = 1$. Desweiteren ist $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 0|\,a_\lambda^\dagger\,|0\rangle = 0 = \langle 0|\,a_\lambda\,|0\rangle$ und Operatoren für unterschiedliche λ antikommutieren, so dass

$$|n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \ldots (a_i^\dagger)^{n_i} \ldots (a_2^\dagger)^{n_2}(a_1^\dagger)^{n_1}\,|0\rangle\ , \tag{L.7}$$

mit $n_i \in \{0, 1\}$ die orthonormale Besetzungszahlbasis für Fermionen ergeben.

Übung 2. *Feldoperatoren*

Die Feldoperatoren Ψ sind wie folgt definiert

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_\lambda \phi_\lambda(\vec{x})a_\lambda\ ,\quad \Psi^\dagger(\vec{x}) = \sum_\lambda \phi_\lambda^*(\vec{x})a_\lambda^\dagger\ , \tag{5}$$

wobei $\{\phi_\lambda(\vec{x})\}$ eine vollständige Menge orthonormaler Einteilchenwellenfunktionen ist und $a_\lambda^\dagger$, a_λ die in der ersten Aufgabe diskutierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind.

(a) In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass

$$[\Psi_{s_1}(\vec{x}), \Psi_{s_2}^\dagger(\vec{y})]_\pm = \delta_{s_1 s_2}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\ , \tag{6}$$

bzw. $[\Psi(x), \Psi^\dagger(y)]_\pm = \delta(x - y)$ in Kurznotation, in welcher x stellvertretend für alle Indizes steht. Mit Hilfe der Feldoperatoren Ψ können wir einen n-Teilchenzustand in der Ortsbasis darstellen als

$$|x_1, \ldots, x_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\Psi^\dagger(x_n)\ldots\Psi^\dagger(x_1)\,|0\rangle\ . \tag{7}$$

Zeige zunächst, dass

$$\begin{aligned}\Psi(y)\Psi^\dagger(x_n)\ldots\Psi^\dagger(x_1) = &\sum_{i=1}^n (\mp\Psi^\dagger(x_n))\ldots(\mp\Psi^\dagger(x_{i+1}))[\Psi(y), \Psi^\dagger(x_i)]_\pm\Psi^\dagger(x_{i-1})\ldots\Psi^\dagger(x_1)\\ &+ (\mp\Psi^\dagger(x_n))\ldots(\mp\Psi^\dagger(x_1))\Psi(y)\end{aligned} \tag{8}$$

und nutze das Ergebnis, um zu zeigen, dass

$$\langle y_1, \ldots, y_n|x_1, \ldots, x_m\rangle = \frac{\delta_{nm}}{n!}\sum_{P\in S_n}(\mp)^{|P|}\delta(x_{P(1)} - y_1)\ldots\delta(x_{P(n)} - y_m)\ . \tag{9}$$

Lösung: Von der linken Seite der Gleichung (8) ausgehend ist es unser Ziel, $\Psi(y)$ an allen $\Psi^\dagger(x_k)$ vorbei nach rechts zu tauschen. Wir benutzen, dass $\Psi(y)\Psi^\dagger(x_k) = [\Psi(y), \Psi^\dagger(x_k)]_\pm \mp \Psi^\dagger(x_k)\Psi(y)$. Setzen wir dies iterativ für die auf der linken Seite von (8) auftretende Terme ein, erhalten wir die rechte Seite. Mit (7), $[\Psi(y), \Psi^\dagger(x)]_\pm = \delta(y-x)$ und $\Psi(y)\,|0\rangle = 0$ folgt damit direkt Gleichung (4.2.12) des Skriptes:

$$\Psi(y)\,|x_1,\ldots,x_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\mp)^{n-i}\delta(y-x_i)\,|x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\rangle\ . \tag{L.8}$$

Betrachten wir nun (9). Mit hermitischer Konjugation erhalten wir aus (7)

$$\langle y_1,...,y_m| = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|\Psi(y_1)\ldots\Psi(y_m)\ . \tag{L.9}$$

Um das verlangte Matrixelement zu berechnen, nutzen wir (8) iterativ für $\Psi(y_m)$ bis $\Psi(y_1)$. In jedem Schritt reduziert sich die Zahl der Ψ und $\Psi^\dagger$ um je eins (Terme mit Ψ zur Rechten verschwinden). Ist $n \neq m$, so bleiben nach $\min(m,n)$-vielen Iterationen nur entweder Ψ oder $\Psi^\dagger$ Operatoren übrig, deren Vakuumerwartungswert aber wegen $\Psi(z)\,|0\rangle = 0 = (\langle 0|\Psi^\dagger(z))^\dagger$ verschwindet. Daher ist der zu berechnende Ausdruck proportional zu δ_{nm}. Im Fall $n = m$ bleibt hingegen $\langle 0|0\rangle = 1$. Da wir (8) iterativ auf in jedem Schritt um ein $\Psi^\dagger$ ärmere Zustände angewendet haben erhalten wir eine Summe von $n!$-vielen Termen, die jeweils ein Produkt aus $\frac{1}{(\sqrt{n!})^2}$, $(\mp)^a$ und n δ-Funktionen sind, wobei als deren Argument jede Kombination von y_i und x_j genau einmal vorkommt. Wir können das Ergebnis daher schreiben als

$$\delta_{nm}\frac{1}{n!}\sum_{P\in S_n}(\mp)^{|P|}\delta(x_{P(1)}-y_1)\ldots\delta(x_{P(n)}-y_n)\ . \tag{L.10}$$

Das Zustandekommen des Faktors $(\mp)^{(|P|)}$, sieht man am besten, wenn man zunächst das Produkt der $\Psi(y_i)$ in die durch P gegebene Reihenfolge bringt (dies führt genau zu $(\mp)^{(|P|)}$) und anschließend für die in jedem Schritt benachbarten $\Psi\Psi^\dagger$ die zugehörige δ-Funktion einsetzt.

(b) Zeige, dass die Feldoperatoren unabhängig von der Wahl der Menge $\{\phi_\lambda(\vec{x})\}$ sind.

Hinweis: Eine andere Menge von Einteilchenwellenfunktionen $u_\lambda(\vec{x})$ ist zu der der $\phi_\lambda(\vec{x})$ über eine unitäre Transformation verbunden, d.h. $u_\lambda(\vec{x}) = \sum_\mu U_{\mu\lambda}\phi_\mu(\vec{x})$. Bestimme die zugehörige Transformation der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

Lösung: Seien $|\phi_\mu\rangle = a_\mu^\dagger\,|0\rangle$ und $|u_\lambda\rangle = b_\lambda^\dagger\,|0\rangle$. Wegen

$$\begin{aligned}|u_\lambda\rangle &= \sum_\mu U_{\mu\lambda}\,|\phi_\mu\rangle \quad \text{ist}\\ b_\lambda^\dagger &= \sum_\mu U_{\mu\lambda}a_\mu^\dagger\end{aligned} \tag{L.11}$$

oder nach hermitischer Konjugation

$$b_\lambda = \sum_\mu U_{\mu\lambda}^* a_\mu = \sum_\mu U_{\lambda\mu}^\dagger a_\mu\ . \tag{L.12}$$

Für die "neuen" Feldoperatoren erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(x) &= \sum_\lambda u_\lambda(x)b_\lambda = \sum_\lambda\sum_\mu U_{\mu\lambda}\phi_\mu(x)\sum_\nu U_{\lambda\nu}^\dagger a_\nu = \sum_{\mu\nu}\sum_\lambda U_{\mu\lambda}U_{\lambda\nu}^\dagger\phi_\mu(x)a_\nu\\ &= \sum_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}\phi_\mu(x)a_\nu = \sum_\mu\phi_\mu(x)a_\mu = \Psi(x)\end{aligned} \tag{L.13}$$

und analog für das hermitisch konjugierte $\tilde{\Psi}^\dagger(x) = \Psi^\dagger(x)$. In der Rechnung wurde die Unitarität $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ genutzt.

Übung 3. *Darstellung eines Einteilchenoperators*

Betrachte für einen beliebigen Einteilchenoperator $\hat{f} = \hat{f}(\vec{x}, \vec{p})$ den korrespondierenden Einteilchenfeldoperator

$$\hat{F} = \sum_{\lambda\mu} \langle\lambda|\hat{f}\,|\mu\rangle\, a_\lambda^\dagger a_\mu \ , \tag{10}$$

wobei $|\mu\rangle$ die Einteilchenzustände sind, auf welche sich die Besetzungszahlbasis bezieht.

(a) Berechne die diagonalen Matrixelemente von $\hat{F}$ in der Besetzungszahlbasis $|n_1, n_2, \ldots\rangle$ im Unterraum mit N Teilchen.

Lösung: Wir betrachten

$$\langle n_1, n_2, \ldots|\, \hat{F}\, |n_1, n_2, \ldots\rangle = \sum_{\lambda\mu} \langle\lambda|\, \hat{f}\, |\mu\rangle\, \langle n_1, n_2, \ldots|\, a_\lambda^\dagger a_\mu\, |n_1, n_2, \ldots\rangle \ . \tag{L.14}$$

Wegen der Orthonormalität der Vielteilchenzustände gilt

$$\langle n_1, n_2, \ldots|\, a_\lambda^\dagger a_\mu\, |n_1, n_2, \ldots\rangle = \delta_{\lambda\mu}\, \langle n_1, n_2, \ldots|\, \hat{n}_\lambda\, |n_1, n_2, \ldots\rangle = \delta_{\lambda\mu} n_\lambda \ , \tag{L.15}$$

daher ist

$$\langle n_1, n_2, \ldots|\, \hat{F}\, |n_1, n_2, \ldots\rangle = \sum_\lambda n_\lambda\, \langle\lambda|\, \hat{f}\, |\lambda\rangle \ . \tag{L.16}$$

(b) Berechne die diagonalen Matrixelemente des Operators $\sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i, \vec{p}_i)$ im Hilbertraum von N Teilchen und zeige, dass sie den in (a) berechneten Elementen gleichen.

Lösung: Die Vielteilchenzustände können wir im Ortsraum schreiben als

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_k n_k!}} \sum_P (\mp)^{|P|} \phi_{P(j_1)}(x_1) \phi_{P(j_2)}(x_2) \ldots \phi_{P(j_N)}(x_N) \ , \tag{L.17}$$

wo $j_1, j_2, \ldots, j_N$ die von den N Teilchen besetzen Zustände sind, wobei sich je n_k Teilchen im gleichen Zustand k befinden. $(\mp)$ ist $(+)$ für Bosonen und $(-)$ für Fermionen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle\Psi| \sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i, \vec{p}_i)\, |\Psi\rangle =& \frac{1}{N! \prod_k n_k!} \sum_{i=1}^N \sum_{PP'} (\mp)^{|PP'|} \int \mathrm{d}x_1 \ldots \int \mathrm{d}x_N \phi^*_{P(j_1)}(x_1) \ldots \phi^*_{P(j_N)}(x_N) \times \\
& f(x_i, p_i) \phi_{P'(j_1)}(x_1) \ldots \phi_{P'(j_N)}(x_N) \\
=& \frac{1}{N! \prod_k n_k!} \sum_{i=1}^N \sum_{PP'} (\mp)^{|PP'|} \left(\prod_{l \neq i} \int \mathrm{d}x_l \phi^*_{P(j_l)}(x_l) \phi_{P'(j_l)}(x_l) \right) \times \\
& \int \mathrm{d}x_i \phi^*_{P(j_i)}(x_i) f(x_i, p_i) \phi_{P'(j_i)}(x_i) \ .
\end{aligned} \tag{L.18}$$

Wegen der Orthonormalität der Einteilchenwellenfunktionen tragen oben nur Terme bei mit $P(j_l) = P'(j_l)$ $\forall\, l$. Für gegebenes P gibt es $\prod_k n_k!$ verschiedene P', die dieser Anforderung genügen, da sich je n_k Teilchen im gleichen Zustand k befinden. Für diese P' gilt $(\mp)^{|PP'|} = 1$ (dies ist klar für Bosonen, für Fermionen gilt $P = P'$, da alle Zustände j_i unterschiedlich sein müssen). Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle\Psi| \sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i, \vec{p}_i)\, |\Psi\rangle =& \frac{1}{N! \prod_k n_k!} \sum_{i=1}^N \sum_P \left(\prod_{k'} n_{k'}! \right) \int \mathrm{d}x_i \phi^*_{P(j_i)}(x_i) f(x_i, p_i) \phi_{P(j_i)}(x_i) \\
=& \frac{1}{N!} \sum_{i=1}^N (N-1)! \sum_k n_k \int \mathrm{d}x_i \phi^*_k(x_i) f(x_i, p_i) \phi_k(x_i) \ .
\end{aligned} \tag{L.19}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass P j_i n_k-mal auf den Zustand k abbildet. Der Faktor $(N-1)!$ ist die Zahl der Möglichkeiten, die verbleibenden $N-1$ Zustände abzubilden. Inzwischen ist i zu einem Dummyindex geworden, daher erhalten wir unter Ersetzung von $\sum_{i=1}^N = N$,

$$\langle\Psi| \sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i, \vec{p}_i)\, |\Psi\rangle = \sum_k n_k\, \langle k|\, \hat{f}\, |k\rangle \ , \tag{L.20}$$

was dem Ausdruck aus Teil (a) entspricht.

(c) Nun betrachte den speziellen Fall, in dem $\hat{f}$ dem Einteilchenhamiltonian entspricht

$$\hat{f} = \hat{h}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + v(\vec{x}) \tag{11}$$

und $|\lambda\rangle$ die zugehörigen Eigenzustände sind. Was ergibt sich nun für die zuvor berechneten Matrixelemente?

Lösung: Mit ϵ_λ als Eigenwerten von $\hat{f}$ zu den Eigenzuständen $|\lambda\rangle$ erhalten wir

$$\langle n_1, n_2, \ldots | \hat{F} | n_1, n_2, \ldots \rangle = \sum_\lambda n_\lambda \epsilon_\lambda \ , \tag{L.21}$$

d.h. die Summe der Einteilchenenergien.