Übung 1. ***Besetzungszahlbasis***

Betrachte eine Menge von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, welche die bosonischen (-) bzw. fermionischen (+) (Anti-)kommutatorrelationen

$$[a_\lambda, a_\mu^\dagger]_\pm = \delta_{\lambda\mu}\ , \quad [a_\lambda, a_\mu]_\pm = [a_\lambda^\dagger, a_\mu^\dagger]_\pm = 0\,, \tag{1}$$

erfüllen. Hier und in folgenden Aufgaben stehen die griechischen Indizes (μ, λ, ...) für inclusive Zustandslabel.

(a) Definiere den Teilchenzahloperator als $\hat{n}_\lambda = a_\lambda^\dagger a_\lambda$ und zeige mit Hilfe von (1), dass sowohl für Bosonen als auch für Fermionen folgende Kommutatorrelationen gelten

$$[\hat{n}_\lambda, a_\mu] = -\delta_{\lambda\mu} a_\mu\ , \ \ [\hat{n}_\lambda, a_\mu^\dagger] = \delta_{\lambda\mu} a_\mu^\dagger\ . \tag{2}$$

(b) Zeige für den bosonischen Fall mit Hilfe von ausschliesslich (1), (2) und $a_\lambda |0\rangle = 0\ \forall\lambda$ zunächst, dass $(a_\lambda^\dagger)^n |0\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{n}_\lambda$ mit Eigenwert n ist, und anschliessend, dass der Zustand $|n_\lambda\rangle = \frac{(a_\lambda^\dagger)^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}} |0\rangle$ die Norm 1 besitzt. Nutze diese und obige Ergebnisse, um zu zeigen, dass

$$\langle n_1, \ldots, n_i, \ldots | m_1, \ldots, m_i, \ldots \rangle = \delta_{n_1 m_1} \ldots \delta_{n_i m_i} \ldots\ , \ \text{mit} \tag{3}$$

$$|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \left[\ldots \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \ldots \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\right] |0\rangle\ . \tag{4}$$

(c) Wiederhole (b) für Fermionen. Beachte dabei Aufgabe 4.(a) der letzten Serie.

Übung 2. ***Feldoperatoren***

Die Feldoperatoren Ψ sind wie folgt definiert

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_\lambda \phi_\lambda(\vec{x}) a_\lambda\ , \ \ \Psi^\dagger(\vec{x}) = \sum_\lambda \phi_\lambda^*(\vec{x}) a_\lambda^\dagger\ , \tag{5}$$

wobei $\{\phi_\lambda(\vec{x})\}$ eine vollständige Menge orthonormaler Einteilchenwellenfunktionen ist und $a_\lambda^\dagger$, a_λ die in der ersten Aufgabe diskutierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind.

(a) In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass

$$[\Psi_{s_1}(\vec{x}), \Psi_{s_2}^\dagger(\vec{y})]_\pm = \delta_{s_1 s_2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\ , \tag{6}$$

bzw. $[\Psi(x), \Psi^\dagger(y)]_\pm = \delta(x - y)$ in Kurznotation, in welcher x stellvertretend für alle Indizes steht. Mit Hilfe der Feldoperatoren Ψ können wir einen n-Teilchenzustand in der Ortsbasis darstellen als

$$|x_1, \ldots, x_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \Psi^\dagger(x_n) \ldots \Psi^\dagger(x_1) |0\rangle\ . \tag{7}$$

Zeige zunächst, dass

$$\begin{aligned}\Psi(y)\Psi^\dagger(x_n)\ldots\Psi^\dagger(x_1) = &\sum_{i=1}^{n}(\mp\Psi^\dagger(x_n))\ldots(\mp\Psi^\dagger(x_{i+1}))[\Psi(y),\Psi^\dagger(x_i)]_\pm\Psi^\dagger(x_{i-1})\ldots\Psi^\dagger(x_1)\\ &+(\pm\Psi^\dagger(x_n))\ldots(\pm\Psi^\dagger(x_1))\Psi(y)\end{aligned} \tag{8}$$

und nutze das Ergebnis, um zu zeigen, dass

$$\langle y_1,\ldots,y_n|x_1,\ldots,x_m\rangle = \frac{\delta_{nm}}{n!}\sum_{P\in S_n}(\mp)^{|P|}\delta(x_{P(1)}-y_1)\ldots\delta(x_{P(n)}-y_m)\ . \tag{9}$$

(b) Zeige, dass die Feldoperatoren unabhängig von der Wahl der Menge $\{\phi_\lambda(\vec{x})\}$ sind.

Hinweis: Eine andere Menge von Einteilchenwellenfunktionen $u_\lambda(\vec{x})$ *ist zu der der* $\phi_\lambda(\vec{x})$ *mittels einer unitären Transformation verbunden, d.h.* $u_\lambda(\vec{x}) = \sum_\mu U_{\mu\lambda}\phi_\mu(\vec{x})$. *Bestimme die zugehörige Transformation der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.*

Übung 3. *Darstellung eines Einteilchenoperators*

Betrachte für einen beliebigen Einteilchenoperator $\hat{f} = \hat{f}(\vec{x},\vec{p})$ den korrespondierenden Einteilchenfeldoperator

$$\hat{F} = \sum_{\lambda\mu}\langle\lambda|\hat{f}\,|\mu\rangle\, a^\dagger_\lambda a_\mu\ , \tag{10}$$

wobei $|\mu\rangle$ die Einteilchenzustände sind, auf welche sich die Besetzungszahlbasis bezieht.

(a) Berechne die diagonalen Matrixelemente von $\hat{F}$ in der Besetzungszahlbasis $|n_1,n_2,\ldots\rangle$ im Unterraum mit N Teilchen.

(b) Berechne die diagonalen Matrixelemente des Operators $\sum_{i=1}^{N} f(\vec{x}_i,\vec{p}_i)$ im Hilbertraum von N Teilchen und zeige, dass sie den in (a) berechneten Elementen gleichen.

(c) Nun betrachte den speziellen Fall, in dem $\hat{f}$ dem Einteilchenhamiltonian entspricht

$$\hat{f} = \hat{h}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + v(\vec{x}) \tag{11}$$

und $|\lambda\rangle$ die zugehörigen Eigenzustände sind. Was ergibt sich nun für die zuvor berechneten Matrixelemente?