Übung 1. *Wellenfunktionen-Quiz*

(a) Welche der folgenden Wellenfunktionen sind möglich, und warum?

(1) Im Grundzustand eines Heliumatoms besitzen beide Elektronen die räumliche Wellenfunktion $\psi(r, \theta, \phi)$.

(2) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) - g(r_1)f(r_2)) \otimes |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \tag{1}$$

(3) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) \otimes |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - g(r_1)f(r_2) \otimes |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2) \tag{2}$$

(4) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) - g(r_1)f(r_2)) \otimes |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \tag{3}$$

(5) Drei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2)h(r_3) - f(r_2)g(r_3)h(r_1) + f(r_3)g(r_1)h(r_2)) \otimes |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \otimes |\uparrow\rangle_3 \tag{4}$$

Lösung:

(1) Dies ist möglich, solange die Spin-Wellenfunktion der Teilchen antisymmetrisch ist.

(2) Dies ist nicht möglich, da sich durch Vertauschung der Teilchen die Wellenfunktion mehr als nur mit einer Phase verändert; man könnte die beiden Konfigurationen durch Messung unterscheiden.

(3) Dies ist möglich: Eine insgesamt antisymmetrische Wellenfunktion. Jedoch ist hier der Spin der Teilchen an die Energie gekoppelt, sodass sich die Wellenfunktion nicht mehr als Produkt zwischen Ortsteil und Spinteil schreiben lässt.

(4) Dies ist möglich: Antisymmetrische Orts-Wellenfunktion, symmetrischer Spin-Anteil

(5) Nicht möglich: Unter Vertauschung der Teilchen ist die Ortswellenfunktion nicht antisymmetrisch, sondern unterscheidet sich mehr als durch eine Phase.

(b) Wie viele Konfigurationen gibt es bei drei möglichen Zuständen χ_1,χ_2,χ_3 und drei Teilchen, wenn

(1) die Teilchen unterscheidbar sind

(2) die Teilchen ununterscheidbare Bosonen sind

(3) die Teilchen ununterscheidbare Fermionen sind? Gib für diesen Fall die Gesamtwellenfunktion an.

Lösung:

(1) Bei unterscheidbaren Teilchen gibt es einfach $3^3 = 27$ mögliche Zustände.

(2) Bei ununterscheidbaren Bosonen gibt es $3+1+2+2+2 = 10$ mögliche Zustände: alle Teilchen in jeweils einem Zustand, alle Teilchen in unterschiedlichen Zuständen, und jeweils 2 Teilchen in einem Zustand, ein Teilchen in einem anderen. Formal kann man berechnen:

$$\dim H_S^{(N)} = \frac{(d-1+N)!}{(d-1)!N!} = 10. \tag{L.1}$$

(3) Bei ununterscheidbaren Fermionen gibt es nur einen möglichen Zustand, nämlich der, in dem alle Teilchen in unterschiedlichen Zuständen sind. Die Wellenfunktion muss antisymmetrisch sein, also ist der Zustand gegeben durch die Slater-Determinante:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}}\left[\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3 - \chi_2 \otimes \chi_1 \otimes \chi_3 - \chi_1 \otimes \chi_3 \otimes \chi_2 - \chi_3 \otimes \chi_2 \otimes \chi_1 + \chi_2 \otimes \chi_3 \otimes \chi_1 + \chi_3 \otimes \chi_1 \otimes \chi_2\right] \tag{L.2}$$

Übung 2. *Grundzustands-Energien*

Sei P der Vertauschungsoperator für zwei Teilchen. Zeige, dass

(a) Wenn $PQP = W$, dann $PQ^2P = W^2$

Lösung: Da $PP = 1$, gilt $PQ^2P = PQPPQP = W^2$.

(b) Wenn $[P, H] = 0$, dann sind nicht-entartete Eigenzustände von H auch Eigenzustände von P.

Lösung: Wenn $[P, H] = 0$, dann gilt: $HP|\psi\rangle = PH|\psi\rangle = PE|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$. Damit ist $P|\psi\rangle$ auch ein Eigenzustand von H mit gleichem Eigenwert E. Wenn nun der Eigenzustand von H zu Eigenwert E nicht entartet ist, muss somit gelten, dass $P|\psi\rangle \propto |\psi\rangle$. Das ist genau dann der Fall, wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von P ist.

(c) Wenn $[P, H] = 0$ dann $\langle +| H |-\rangle = 0$, wobei $P|+\rangle = |+\rangle$, $P|-\rangle = -|-\rangle$.

Lösung: $\langle +| H |-\rangle = \langle +| PPH |-\rangle = \langle +| PHP |-\rangle = -\langle +| H |-\rangle$. Damit muss also gelten: $\langle +| H |-\rangle = 0$.

(d) $Px_1P = x_2$

Lösung: $P\hat{x}_1P\psi(x_1, x_2) = P\hat{x}_1\psi(x_2, x_1) = Px_1\psi(x_2, x_1) = x_2\psi(x_1, x_2) = \hat{x}_2\psi(x_1, x_2)$

(e) $Pp_1P = p_2$

Lösung: $P\hat{p}_1P\psi(x_1, x_2) = P\hat{p}_1\psi(x_2, x_1) = -Pi\hbar\frac{\partial\psi(x_2,x_1)}{\partial x_1} = -i\hbar\frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \hat{p}_2\psi(x_1, x_2)$

(f) $PV(x_1, x_2)P = V(x_2, x_1)$

Lösung: $PV(x_1, x_2)P\psi(x_1, x_2) = PV(x_1, x_2)\psi(x_2, x_1) = V(x_2, x_1)\psi(x_1, x_2)$

(g) $[P, K] = 0$, wobei $K = p_1^2/2m + p_2^2/2m$

Lösung:

$$[P,K]\psi(x_1,x_2) = [P,p_1^2/(2m)+p_2^2/(2m)]\psi(x_1,x_2) = [P,p_1^2/(2m)]\psi(x_1,x_2) + [P,p_2^2/(2m)]\psi(x_1,x_2) \quad \text{(L.3)}$$

Die beiden Teile separat betrachtet ergibt:

$$[P,p_1^2/(2m)]\psi(x_1,x_2) = Pp_1^2/(2m)\psi(x_1,x_2) - p_1^2/(2m)P\psi(x_1,x_2) = p_2^2/(2m)\psi(x_2,x_1) - p_1^2/(2m)\psi(x_2,x_1) \quad \text{(L.4)}$$

sowie

$$[P,p_2^2/(2m)]\psi(x_1,x_2) = Pp_2^2/(2m)\psi(x_1,x_2) - p_2^2/(2m)P\psi(x_1,x_2) = p_1^2/(2m)\psi(x_2,x_1) - p_2^2/(2m)\psi(x_2,x_1) \quad \text{(L.5)}$$

Addiert erhält man nun $[P,K]=0$.

Man kann aber (sehr viel einfacher) auch ohne Rechnung sofort sehen: K ist invariant unter Vertauschung der zwei Teilchen - somit ist klar, dass $[P,K]=0$.

(h) Wenn $V(x_1,x_2)=V(x_2,x_1)$ dann gilt $[P,H]=0$.

Lösung: $[P,H]\psi(x_1,x_2) = [P,K+V]\psi(x_1,x_2) = [P,V]\psi(x_1,x_2) = (PV-VP)\psi(x_1,x_2) = (V(x_2,x_1) - V(x_1,x_2))\psi(x_2,x_1) = 0$ wenn $V(x_1,x_2)=V(x_2,x_1)$.

Übung 3. *Spin und Permutationssymmetrie*

Unter den irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_N gibt es nur zwei, die 1-dimensional sind: Die symmetrische und die antisymmetrische. Ein Hilbertraum K, der eine unitäre Darstellung P_σ, $(\sigma \in S_N)$ trägt, zerfällt in (möglicherweise triviale) invariante Unterräume, worin bis auf Wiederholungen nur je eine irreduzible Darstellung vorkommt.

Jeder irreduziblen Darstellung entspricht so ein orthogonaler Projektor in K, insbesondere S der symmetrischen und A der antisymmetrischen (vgl. Vorlesung).

(a) Für $N=2$ gibt es keine weiteren irreduziblen Darstellung ausser den beiden namentlich erwähnten. Zeige dies durch $S+A=1$.
Ohne Beweis: Fur $N=3$ gibt es genau eine weitere, gemischt symmetrische irreduzible Darstellung. Sei G der entsprechende orthogonale Projektor. Drücke S, A, G durch die Operatoren P aus.

Hinweis: $S+A+G=1$.

Lösung: Für S_N mit N beliebig sind

$$S = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N} P_\sigma, A = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N}(sgn\sigma)P_\sigma \quad \text{(L.6)}$$

die Projektoren auf die im Aufgabenblatt bezeichneten Unterraume. Für $N=2$ sind

$$S = \frac{1}{2}(1+P_{(12)}), A = \frac{1}{2}(1-P_{(12)}) \quad \text{(L.7)}$$

mit $S+A=1$. Für $N=3$,

$$S = \frac{1}{6}(1+P_{(12)}+P_{(23)}+P_{(13)}+P_{(123)}+P_{(132)}), \quad \text{(L.8)}$$

$$A = \frac{1}{6}(1-P_{(12)}-P_{(23)}-P_{(13)}+P_{(123)}+P_{(132)}), \quad \text{(L.9)}$$

mit

$$S+A = \frac{1}{3}(1+P_{(123)}+P_{(132)}). \quad \text{(L.10)}$$

Folglich ist

$$G = 1 - (S + A) = \frac{1}{3}(2 - P_{(123)} - P_{(132)}). \tag{L.11}$$

Sei nun $H = \mathbb{C}^2$ der Hilbertraum eines Spin $\frac{1}{2}$-Teilchens ($\hbar = 1$), und $K = \otimes^N H$ der von N unterscheidbaren. Unter dem Spin versteht man eine darin vorkommende irreduzible Darstellung der SU(2); unter der Permutationssymmetrie eine der S_N. In den folgenden Beispielen soll gezeigt werden, dass sich die beiden entsprechen (Schur-Weyl-Dualität).

(b) Sei $N = 2$. Eigenwerte des Gesamtspins $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ sind $s(s+1)$ mit $s = 0, 1$ und Eigenprojektoren $P(s)$. Zeige die Entsprechung

$$P(1) = S, \quad P(0) = A \tag{5}$$

und daraus

$$(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = 1 + P_{(12)}. \tag{6}$$

Lösung: Die Unterräume von $\otimes^2 H$ zu $s = 0$ (Singulett-) und $s = 1$ (Triplettzustande) werden aufgespannt (vgl. Vorlesung) durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\,, \quad \text{bzw.} \quad |\uparrow\uparrow\rangle\,, \frac{1}{2}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle\,. \tag{L.12}$$

Erstere sind antisymmetrisch bezüglich Vertauschung der Spins, letztere symmetrisch, und (5) folgt. Gl. (6) folgt ebenfalls durch Inspektion: beide Seiten liefern die Eigenwerte 0, 2 auf dem Singlett bzw. dem Triplett. Alternativ:

$$(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \sum_{s=0,1} s(s+1)P(s) = 2P(1) = 1 + P_{(12)}. \tag{L.13}$$

(c) Sei $N = 3$. Die Werte s des Gesamtspins $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ sind $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (wieso?). Man überlege sich, dass $A = 0$ und $S, G \neq 0$.

Zeige die Entsprechung in der Form

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = S, \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = G. \tag{7}$$

Hinweis: Schreibe $\vec{S}^2$ einmal mit Hilfe von $(\vec{S}_{i+1} + \vec{S}_{i+2})^2$, $(i = 1, 2, 3)$ und (6), das andere mal als Spektralzerlegung nach den Projektoren $P(s)$.

Lösung: Die Werte $s = 1/2, 3/2$ des Gesamtspins ergeben sich aus der Clebsch-Gordan-Reihe:

$$D_{1/2} \otimes D_{1/2} \otimes D_{1/2} = (D_0 \oplus D_1) \otimes D_{1/2} = D_{1/2} \oplus D_{1/2} \oplus D_{3/2} \tag{L.14}$$

Es ist $\dim \otimes^3\mathbb{C} = 2^3 = 8$; ferner $H_a^{(3)} = \{0\}$, da $d = 2 < N = 3$, und mit Gl. (L.1) folgt

$$dim H_s^{(3)} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4. \tag{L.15}$$

So folgt $A = 0$, $S \neq 0, 1$ und daraus $G \neq 0$.
Die Spektralzerlegung von $\vec{S}^2$ ist

$$1 = P(1/2) + P(3/2), \tag{L.16}$$

$$\vec{S}^2 = \sum_{s=1/2,3/2} s(s+1)P(s) = \frac{3}{4}P(1/2) + \frac{15}{4}P(3/2), \tag{L.17}$$

so dass

$$P(3/2) = \frac{1}{3}(\vec{S}^2 - \frac{3}{4}) \tag{L.18}$$

$$P(1/2) = -\frac{1}{3}(\vec{S}^2 - \frac{15}{4}). \tag{L.19}$$

Andererseits ist

$$\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 + (\vec{S}_2 + \vec{S}_3)^2 + (\vec{S}_1 + \vec{S}_3)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 - \vec{S}_3^2 \tag{L.20}$$

$$= \frac{3}{4} + P_{(12)} + P_{(23)} + P_{(13)} \tag{L.21}$$

wegen Gl. (6) und $3 - 3 \cdot (3/4) = 3/4$; und daraus

$$P(3/2) = \frac{1}{3}(P_{(12)} + P_{(23)} + P_{(13)}) \tag{L.22}$$

$$P(1/2) = \frac{1}{3}(3 - P_{(12)} - P_{(23)} - P_{(13)}). \tag{L.23}$$

In Anbetracht dessen, dass $A = 0$, ist auch

$$P(3/2) = P(3/2) + A = S \tag{L.24}$$

$$P(1/2) = P(1/2) - 2A = G. \tag{L.25}$$

Übung 4. *Vertauschung identischer Teilchen*

Dass Teilchen mit halbzahligem Spin antisymmetrische Wellenfunktionen besitzen, Teilchen mit ganzzahligem Spin hingegen symmetrische, lässt sich letztenendes im Rahmen der lokalen Quantenfeldtheorie zeigen. In dieser Aufgabe wollen wir jedoch einen Ansatz betrachten, mit Hilfe dessen sich das Ergebnis anschaulich darstellen lässt. Dazu betrachten wir die Vertauschung der Teilchen durch Rotation um π um das Zentrum zwischen den beiden Teilchen, generiert durch den Drehimpulsoperator J:

Betrachte die Wirkung des unitären Operators $U(\pi) = e^{-i\pi J_z} = e^{-i\pi L_z} e^{-i\pi S_z}$ auf die Wellenfunktion $\psi(x, x')$ zweier identischer Teilchen, und zeige, dass man dadurch eine Phase erhält, die entsprechend des Spins der Teilchen ein gerades oder ungerades Vielfaches von π enthält.

Lösung: Nach der Rotation um π erhalten wir die neue Wellenfunktion

$$\psi'(x_1, x_2) = U(\pi)\psi(x_1, x_2) \tag{L.26}$$

$$= e^{-i\pi L_z} e^{-i\pi S_z} \psi(x_1, x_2) \tag{L.27}$$

$$= e^{-i\pi L_z} e^{-i\pi(m_1+m_2)} \psi(x_1, x_2) \tag{L.28}$$

$$= e^{-i\pi(m_1+m_2)} \psi(x_2, x_1), \tag{L.29}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Argumente in der Wellenfunktion vertauscht haben als Konsequenz der Drehung durch Generator L. Ausserdem nehmen wir an, dass die Teilchen wohldefinierten Spin in z-Richtung besitzen.
Die hier erzeugte Phase entspricht bei halbzahligem Spin einem ungeraden Vielfachen von π, bei ganzzahligem Spin einem geraden Vielfachen von π. Dies ergibt einen Faktor von ± 1.