

### Übung 1. Das Jaynes-Cummings-Modell

Die Wechselwirkung eines Atoms mit dem quantisierten Strahlungsfeld kann beschrieben werden durch den Hamilton-Operator

$$\begin{aligned}
 H &= H_G + H_K, & H_G &= H_{AT} + H_{SF}, \\
 H_{AT} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} \vec{p}_k^2 + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \\
 H_{SF} &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda},
 \end{aligned} \tag{1}$$

wo  $H_{AT}$  der Hamiltonoperator des ungestörten Atoms mit  $N$  Elektronen und  $H_{SF}$  der des freien Strahlungsfeldes ist. Bei letzterem wurde die divergente Nullpunktsenergie weggelassen.  $H_K$  beschreibt die Kopplung der beiden Systeme. Nutzen wir die Dipolnäherung mit dem Dipolmoment  $-e\vec{r}$  des Atoms und betrachten linear polarisierte Strahlung, lässt sich  $H_K$  schreiben als

$$\begin{aligned}
 H_K &= -\frac{e}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}}} \left( \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \right) = \frac{e}{c} \vec{A}(0) \cdot \frac{i}{\hbar} [H_{AT}, \vec{r}], \\
 \vec{A}(0) &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}}} \left( a_{\vec{k}, \lambda} + a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \right) \vec{e}_{\vec{k}, \lambda}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Die Behandlung der Übergangsraten verwendete ein Quantisierungsvolumen als Hilfsmittel, dessen Volumen sehr groß gewählt wurde. Der spontane Zerfall eines angeregten Atoms ist irreversibel im Einklang mit der Tatsache, dass das ausgesandte Photon ins räumlich Unendliche entweicht. Eine andere Physik eröffnet sich, falls das Volumen einer realen Kavität entspricht, deren Abmessungen mit der Wellenlänge jenes Photons vergleichbar sind. Das Interesse gilt einem Übergang zwischen zwei atomaren Zuständen  $|g\rangle$  und  $|a\rangle$  mit Bohrscher Frequenz  $\omega_0$ ; die Kavität besitze eine einzige Mode  $(\vec{k}, \lambda)$ , deren Frequenz  $\omega$  nahe bei  $\omega_0$  liegt. Unter Beibehaltung dieser beiden Zustände und dieser einen Mode alleine wird aus (2)

$$H_{AT} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_3, \quad H_{SF} = \hbar \omega a^\dagger a, \quad H_K = \hbar (a + a^\dagger) (g \sigma_+ + \bar{g} \sigma_-), \tag{3}$$

auf  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$ . Dabei beziehen sich

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

auf die Basis  $|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  für  $\mathbb{C}^2$ ; ferner sind  $a$ ,  $a^\dagger$  Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren auf  $\mathcal{H}$ , dem Hilbertraum eines harmonischen Oszillators aufgespannt durch die Zustände  $|n\rangle$  bestimmter Photonenzahl  $n = 0, 1, \dots$

- (a) Führe die Kopplung  $g \in \mathbb{C}$  auf Größen in (2) zurück. Zeige, dass  $g \geq 0$  erzielt werden kann durch Wahl der relativen Phase zwischen  $|a\rangle$  und  $|g\rangle$ .

- (b) Aufgrund der Diskussionen in der Vorlesung können wir die Physik von  $H_{AT}$  und  $H_{ST}$  als gut verstanden betrachten und uns auf die von  $H_K$  konzentrieren. Dazu berechne zunächst  $\tilde{H}_K(t)$  im Wechselwirkungsbild von  $H_G$  und zeige damit, dass  $a^\dagger\sigma_+$  und  $a\sigma_-$  zu Termen führen, die rasch oszillieren verglichen mit jenen, die von  $a\sigma_+$  und  $a^\dagger\sigma_-$  stammen. Sie dürfen vernachlässigt werden (Approximation der rotierenden Welle).

*Hinweis.*  $|\omega - \omega_0| \ll \omega, \omega_0$ .

- (c) Wir können daher in (3) die entsprechenden Terme vernachlässigen und gelangen so zu dem Hamilton-Operator des Jaynes-Cummings-Modells:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-). \quad (5)$$

Berechne seine Eigenwerte.

*Hinweis.*  $\sigma_3/2 + a^\dagger a$  ist eine Symmetrie. Wieso? Wie vereinfacht sich  $H$  auf den Eigenräumen des Symmetrieoperators?

## Übung 2. Quanten-Dot in der elektromagnetischen Strahlung

Einen Quanten-Dot kann man als Elektronensystem in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillator modellieren. Jeder Zustand kann dann als Tensorprodukt von drei Zuständen des eindimensionalen harmonischen Oszillators geschrieben werden:  $|n_x, n_y, n_z\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \otimes |n_z\rangle$ . Da die Gesamtenergie  $\epsilon_n = \hbar\omega_d(n + 3/2)$  nur von der Summe der drei Quantenzahlen  $n = n_x + n_y + n_z$  abhängt, sind die angeregten Zustände, d.h.  $n > 0$ , entartet. Betrachte das System im Grundzustand  $|0, 0, 0\rangle$  unter Wirkung der polarisierten, monochromatische, elektromagnetischen Strahlung (nicht quantisiert)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \left[ A \vec{e} e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} + A^* \vec{e}^* e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} \right] \quad \text{mit } \vec{k} = (0, 0, k). \quad (6)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit des Systems in den angeregten Zustand  $|n_x, n_y, n_z\rangle$  ist durch die Goldene Regel gegeben als

$$\Gamma_{0 \rightarrow (n_x, n_y, n_z)} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\epsilon_n - \epsilon_0 - \hbar\omega) \frac{e^2}{L^3 c^2} |A|^2 |\langle n_x, n_y, n_z | \hat{j}(-\vec{k}) \cdot \vec{e} | 0, 0, 0 \rangle|^2, \quad (7)$$

wobei  $\hat{j}(\vec{k})$  die paramagnetische Stromdichte im Impulsraum ist, d.h.

$$\hat{j}(-\vec{k}) = \int d^3r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{\vec{p}}}{m} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\hat{\vec{p}}}{m} \right]. \quad (8)$$

Seien  $a_i^\dagger$  und  $a_i$  die Auf- bzw. Absteigeoperatoren der Zustände  $|n_i\rangle$ . Bestimme die Matrixelemente  $\langle n_x, n_y, n_z | \hat{j}(\vec{k}) \cdot \vec{e} | 0, 0, 0 \rangle$  durch Substitution von  $\hat{\vec{r}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_d m}} (a_x + a_x^\dagger, a_y + a_y^\dagger, a_z + a_z^\dagger)$  und  $\hat{\vec{p}} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_d m}{2}} (a_x - a_x^\dagger, a_y - a_y^\dagger, a_z - a_z^\dagger)$ . Betrachte die Fälle von linear polarisierter,  $\vec{e} = (1, 0, 0)$ , und zirkulär polarisierter,  $\vec{e} = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ , Strahlung. Gib die totale Absorbptionsrate als Funktion von  $\omega$  an:

$$\Gamma_{0 \rightarrow X}(\omega) = \sum_{n_x, n_y, n_z} \Gamma_{0 \rightarrow (n_x, n_y, n_z)}. \quad (9)$$

*Hinweis.* Benutze die Baker-Hausdorff Beziehung:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}, \quad \text{wenn } [A, B] \in \mathbb{C}. \quad (10)$$