Übung 1. ***Eichtransformation und ED***

In dieser Übung sollen Grundlagen der ED wiederholt werden, sowie auf deren Anwendung auf die QM eingegangen werden.
Wir können die Maxwell-Gleichungen klassisch zunächst wie folgt schreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B}(\vec{r}, t) \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\partial_t \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, t) \tag{4}$$

(a) Schreibe diese Gleichungen mit Hilfe einer Fourier-Transformation um für $\vec{E}(\vec{k}, t)$ und $\vec{B}(\vec{k}, t)$. Dann betrachte separat die Komponenten der $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder parallel und orthogonal zu $\vec{k}$.

(b) Als nächstes führen wir nun die Potentiale $\vec{A}$ und ϕ ein. Diese hängen mit den beobachtbaren Feldern wie folgt zusammen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}(\vec{r}, t) \tag{5}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \tag{6}$$

Leite von den obigen Gleichungen ausgehend die im Skript angegebene Form der inhomogenen Maxwell-Gleichungen her.

(c) Indem du die Gleichungen für den reziproken Raum umschreibst, zeige explizit die Wirkung von Eichtransformationen auf die einzelnen Komponenten von $\vec{A}(\vec{k}, t)$, $\vec{E}(\vec{k}, t)$ und $\vec{B}(\vec{k}, t)$:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \to \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t) \tag{7}$$

$$\phi(\vec{r}, t) \to \phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\partial_t \chi(\vec{r}, t) \tag{8}$$

(d) Inwiefern lassen sich durch geeignete Wahl der Eichung Probleme vereinfachen?
Oftmals nützlich ist die Coulomb-Eichung, in der $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Warum wird diese auch 'transversale Eichung' genannt?

Bitte wenden.

Übung 2. ***Elektromagnetische Strahlung***

In dieser Übung betrachten wir nun die Wechselwirkung zwischen Materie und einem elektromagnetischen Strahlungsfeld. Dazu benötigen wir als erstes den Hamilton-Operator für unser System:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 + e\phi(\mathbf{r},t) + U(\mathbf{r}) \tag{9}$$

(a) Zeige explizit, dass sich unter Eichtransformationen (siehe oben) die Lösung ψ der zeitabhängigen Schrödingergleichung transformiert wie $e^{ie\chi(\vec{r},t)/\hbar c}\psi$.

(b) Für Observablen fordern wir nun, dass ihr Erwartungswert eichinvariant sein soll. Formell bedeutet das also, dass

$$\langle O\rangle = \int d^3\mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r})O\psi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r})e^{-ie\chi(\mathbf{r},t)/\hbar c}O'e^{ie\chi(\mathbf{r},t)/\hbar c}\psi(\mathbf{r}), \tag{10}$$

wobei O' den eichtransformierten Operator bezeichnet.
Analysiere nun die Wirkung der Eichtransformationen auf den Erwartungswert des quantenmechanischen Impulses $\mathbf{p}$.

(c) Welche linear von $\mathbf{p}$ abhängige Grösse hat einen eichinvarianten Erwartungswert? Was bedeutet das also für Observablen, die von $\mathbf{p}$ abhängen?

(d) Berechne das klassische Limit der Bewegungsgleichungen für die Bewegung im homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$ (wobei $\phi = 0$, $U(r) = 0$), indem du die Hamiltongleichungen für Erwartungswerte aufstellst. Vergleiche dabei $m\frac{d\langle\mathbf{r}\rangle}{dt}$ mit $\langle\mathbf{p}\rangle$. Was fällt auf?

(e) Da wir klassisch Operatoren mit ihren Erwartungswerten gleichsetzen können, führen die Bewegungsgleichungen für ein statisches $\mathbf{B}$-Feld zum klassischen Ausdruck für die Lorentzkraft. Zeige dies.

Hinweise: *Nutze*

$$\left\langle\frac{dA_i}{dt}\right\rangle = \langle\dot{\mathbf{x}}\rangle \cdot \langle\nabla A_i\rangle \tag{11}$$