

Übung 1. Additionstheorem für Kugelfunktionen.

Bei der Entwicklung der ebenen Welle nach Kugelfunktionen (Skript Kapitel 1.3.5.) wird das Additionstheorem für Kugelfunktionen benützt. Im Skript wird nur der Fall $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$ betrachtet. Für allgemeine Richtungen lautet das Additionstheorem

$$P_l(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{x}}), \quad (1)$$

wobei θ der Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{x} ist. Damit findet man die Entwicklung

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{x}}). \quad (2)$$

Wir wollen nun das Additionstheorem für allgemeine Richtungen herleiten.

- (a) Wir nehmen an, dass \mathbf{k} im Raum fixiert ist. Dann ist $P_l(\cos \theta)$ nur noch eine Funktion von $\Omega_{\mathbf{x}}$, mit $\Omega_{\mathbf{k}}$ als Parameter, und kann somit nach Kugelfunktionen entwickelt werden:

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\Omega_{\mathbf{k}}) Y_{l'm}(\Omega_{\mathbf{x}}), \quad (3)$$

mit

$$A_{l'm}(\Omega_{\mathbf{k}}) = \int Y_{l'm}^*(\Omega_{\mathbf{x}}) P_l(\cos \theta) d\Omega. \quad (4)$$

Beim Vergleich der Entwicklung (3) mit dem Additionstheorem (1) sehen wir, dass nur Terme $l' = l$ vorkommen. Begründe dies.

Hinweis.

- Kugelfunktionen lösen die Gleichung

$$\nabla^2 Y_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm} = 0. \quad (5)$$

Für $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$ löst auch $P_l(\cos \theta)$ diese Gleichung. Begründe dies.

Was passiert bei einer Rotation des Koordinatensystems zurück zum ursprünglichen \mathbf{k} mit den einzelnen Termen? Was bedeutet dies für $P_l(\cos \theta)$?

- (b) Berechne also

$$A_{lm}(\Omega_{\mathbf{k}}) =: A_m(\Omega_{\mathbf{k}}) = \int Y_{lm}^*(\Omega_{\mathbf{x}}) P_l(\cos \theta) d\Omega. \quad (6)$$

Hinweise.

- Entwickle $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\Omega_{\mathbf{x}})$ nach $Y_{l'm'}^*(\Omega_{\mathbf{t}})$ mit $\Omega_{\mathbf{t}} = (\theta, \phi)$ und benütze

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (7)$$

um einen Term der gesuchten Form (6) zu finden.

- Betrachte $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\Omega_{\mathbf{x}})$ bei $\theta = 0$.

Übung 2. *Streuung an der harten Kugel: Fortsetzung.*

Die Streuung an der harten Kugel (Skript Kapitel 1.3.4.) entspricht der Streuung am Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (8)$$

Die Streuphase ist gegeben durch

$$\tan \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}, \quad (9)$$

mit $j_l(\rho)$ der sphärischen Bessel-Funktion und $n_l(\rho)$ der sphärischen Neumann-Funktion, welche die linear unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right] f(\rho) = 0 \quad (10)$$

sind und definiert werden durch

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\sin \rho}{\rho}, \quad n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\cos \rho}{\rho}. \quad (11)$$

Für den Wirkungsquerschnitt gilt

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k). \quad (12)$$

In dieser Aufgabe wollen wir einige Schritte aus dem Skript genau nachrechnen und die Diskussion auf den Hochenergiebereich ausdehnen.

(a) Zeige die folgenden Näherungen der sphärischen Bessel- und Neumann-Funktionen:

Für $\rho \rightarrow 0$

$$j_l(\rho) = \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(\rho) = -\frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}, \quad (13)$$

und für $\rho \rightarrow \infty$

$$j_l(\rho) = \frac{1}{\rho} \sin(\rho - \pi l/2), \quad n_l(\rho) = -\frac{1}{\rho} \cos(\rho - \pi l/2). \quad (14)$$

(b) Berechne den totalen Wirkungsquerschnitt für den Niederenergiebereich ($ka \ll 1$).

Hinweis. Es ist ausreichend nur $l = 0$ (sogenannte *s-Wellen-Streuung*) zu betrachten. Wieso?

(c) Wir wollen auch den Wirkungsquerschnitt für den Hochenergiebereich ($ka \gg 1$) berechnen. Die Summation über alle Drehimpulse in (12) ist nach oben beschränkt durch $l \lesssim ka$, da für fixes ka gilt, dass $\delta_l(ka) \rightarrow 0$ für $l \gtrsim ka$. Dies kann numerisch verifiziert werden. Der Wirkungsquerschnitt kann abgeschätzt werden, indem man $\sin^2 \delta_l$ in (12) durch seinen Mittelwert $1/2$ ersetzt und nur die höchste Ordnung behält:

$$\sigma(k) \approx \frac{4\pi a^2}{(ak)^2} \sum_{l=0}^{ka} (2l+1) \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\approx 2\pi a^2. \quad (16)$$

Man kann jedoch nicht auf eine einfache Art beweisen, dass die Abschätzung des \sin^2 so gemacht werden darf. Verifiziere daher dieses Ergebnis numerisch.

(d) Vergleiche die Wirkungsquerschnitte aus (b) und (c) mit dem klassischen Resultat. Was hätten wir erwartet?