

## 8 Pfadintegral Beschreibung

Zum Abschluss der Vorlesung wollen wir noch eine ein wenig andere Formulierung der Quantenmechanik beschreiben, jene durch die sogenannten Pfadintegrale.

### 8.1 Der Phasenraum und die kanonische Quantisierung

Wir können ein klassisches System im Phasenraum beschreiben, wo die Koordinaten die verallgemeinerten Ortskoordinaten  $q^i$  und Impulskoordinaten  $p_j$  sind. Die Observablen des Systems können durch Funktionen auf dem Phasenraum beschrieben werden. Dieser Funktionenraum hat eine Poissonstruktur, die durch die Poissonklammern

$$\{F, G\} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (8.1.1)$$

gegeben ist. Insbesondere gilt

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \quad (8.1.2)$$

Die Zeitentwicklung wird im Phasenraum durch die Differentialgleichung

$$\dot{F} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (8.1.3)$$

beschreiben, wobei  $H$  die Hamiltonfunktion ist. Zum Beispiel ist also

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (8.1.4)$$

In der kanonischen Quantisierung ersetzen wir nun die klassische Observable  $F$  durch den hermiteschen Operator  $\hat{F}$ , wobei die Poissonklammer gerade durch den Kommutator ersetzt wird

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hbar\{F, G\}. \quad (8.1.5)$$

Insbesondere erhalten wir also die Zeitentwicklung

$$\frac{d}{dt}\hat{F} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}. \quad (8.1.6)$$

Das ist gerade die Zeitentwicklungsformel im Heisenberg Bild (siehe QMI).

In vielen Situationen interessiert uns die Zeitentwicklung von Erwartungswerten, also  $\langle \psi | O(t) | \psi \rangle$  (wir lassen von nun an die Hüte wieder weg!). Diese können wir natürlich ebenso gut im Schrödingerbild berechnen, also durch

$$\langle \psi | O(t) | \psi \rangle = \langle \psi_s(t) | O | \psi_s(t) \rangle \quad (8.1.7)$$

wobei  $|\psi_s(t)\rangle$  der Zustand im Schrödingerbild ist. Seine Zeitentwicklung wird durch die Schrödingergleichung beschrieben

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_s(t)\rangle = H |\psi_s(t)\rangle. \quad (8.1.8)$$

Falls der Hamiltonoperator nicht von der Zeit abhängt, ist die Lösung dieser Differentialgleichung einfach

$$|\psi_s(t)\rangle = e^{-itH/\hbar}|\psi_s(0)\rangle . \quad (8.1.9)$$

In der Koordinatenbeschreibung (Wellenmechanik) gilt also

$$\psi_s(t, q) \equiv \langle q|\psi_s(t)\rangle = \int dq_0 \langle q|e^{-itH/\hbar}|q_0\rangle \langle q_0|\psi_s(0)\rangle = \int dq_0 K(t, q, q_0) \psi_s(0, q_0) , \quad (8.1.10)$$

wobei wir die Vollständigkeitsrelation

$$\mathbf{1} = \int dq_0 |q_0\rangle \langle q_0| \quad (8.1.11)$$

benützt haben und als Integralkern den Zeitentwicklungskern

$$K(t, q, q_0) = \langle q|e^{-itH/\hbar}|q_0\rangle \quad (8.1.12)$$

eingeführt haben. Diese Grösse wird in der Pfadintegralbeschreibung der Quantenmechanik eine wichtige Rolle spielen. Sie beschreibt gerade die Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Teilchen von  $q_0$  zur Zeit 0 nach  $q$  zur Zeit  $t$  zu propagieren.

Der Zeitentwicklungskern erfüllt die (zeit-abhängige) Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} K(t, q, q_0) = H K(t, q, q_0) , \quad (8.1.13)$$

wobei  $H$  auf  $q$  wirkt. Weiterhin ist er durch seine Anfangsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(t, q, q_0) = \delta(q - q_0) \quad (8.1.14)$$

charakterisiert. Für ein freies Teilchen in einer Dimension mit Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{1}{2m} p^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (8.1.15)$$

ist die durch (8.1.13) und (8.1.14) eindeutig bestimmte Lösung einfach

$$K_0(t, q, q_0) = \langle q|e^{-itH_0/\hbar}|q_0\rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(im \frac{(q - q_0)^2}{2\hbar t}\right) . \quad (8.1.16)$$

[Zum Beispiel kann man das durch Einsetzen einer vollständigen Impulsbasis berechnen; dann findet man nämlich

$$\begin{aligned} \langle q|e^{-itH_0/\hbar}|q_0\rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \langle q|p\rangle \langle p|e^{-itH_0/\hbar}|q_0\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{-iqp/\hbar} e^{-itp^2/2m\hbar} e^{ipq_0/\hbar} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left(im \frac{(q - q_0)^2}{2\hbar t}\right) \int dp \exp\left[-\frac{it}{2m\hbar} \left(p + \frac{m(q - q_0)}{t}\right)^2\right] , \end{aligned}$$

was nach Ausführen des Gausschen Integrals gerade die obige Antwort ergibt.]

## 8.2 Feynman-Kac Formel

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun die Pfadintegraldarstellung des Zeitentwicklungsintegralkerns beschreiben. Im Kontext der Quantenmechanik wurde diese Darstellung von Richard Feynman entwickelt; die zu Grunde liegende Formel war schon zuvor im Kontext der statistischen Physik von Marc Kac gefunden worden.

Der Ausgangspunkt ist die sogenannte Produktformel von Trotter. In ihrer einfachsten Form (in der sie bereits von Lie bewiesen wurde), sagt sie, dass

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{A/n} e^{B/n})^n . \quad (8.2.1)$$

Zum Beweis definieren wir

$$S_n = \exp \left[ \frac{(A+B)}{n} \right] , \quad T_n = \exp \left[ \frac{A}{n} \right] \exp \left[ \frac{B}{n} \right] . \quad (8.2.2)$$

Dann berechnen wir

$$\begin{aligned} \|e^{A+B} - (e^{A/n} e^{B/n})^n\| &= \|S_n^n - T_n^n\| \\ &= \|S_n^{n-1}(S_n - T_n) + S_n^{n-2}(S_n - T_n)T_n + \dots + (S_n - T_n)T_n^{n-1}\| . \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Da die Norm eines Produktes immer kleiner (oder gleich) der Produkte der Normen ist gilt (nach Anwenden der Dreiecksungleichung,  $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ )

$$\|\exp(X)\| \leq \exp(\|X\|) . \quad (8.2.4)$$

Nochmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung führt dann zu

$$\|S_n\| \leq e^{(\|A\|+\|B\|)/n} \equiv a^{1/n} , \quad \|T_n\| \leq e^{(\|A\|+\|B\|)/n} \equiv a^{1/n} . \quad (8.2.5)$$

Einsetzen in (8.2.3) (nach Anwenden der Dreiecksungleichung) ergibt dann

$$\|S_n^n - T_n^n\| \leq n a^{(n-1)/n} \|S_n - T_n\| . \quad (8.2.6)$$

Schliesslich folgt aus der Baker-Campbell-Hausdorff Formel, dass

$$S_n - T_n = -\frac{[A, B]}{2n^2} + \mathcal{O}(n^{-3}) , \quad (8.2.7)$$

und die obige Produktformel folgt.

In der obigen Analyse haben wir angenommen, dass die Operatoren  $A$  und  $B$  beschränkt sind; für unbeschränkte selbst-adjungierte Operatoren (so wie sie typischerweise in der Quantenmechanik auftreten) gilt

$$e^{-it(A+B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-itA/n} e^{-itB/n})^n \quad (8.2.8)$$

wobei der Limes in der sogenannten starken Topologie gilt, d.h. auf allen Zuständen im Schnitt der Definitionsbereiche von  $A$  und  $B$ .

Mit diesen Vorbemerkungen sind wir nun in der Position, die Pfadintegraldarstellung abzuleiten. Wir nehmen nun an, dass der Hamiltonoperator von der Form

$$H = H_0 + V(q) \quad (8.2.9)$$

ist, wobei  $H_0$  der Hamiltonoperator des freien Teilchens ist, und  $V(q)$  das Potential beschreibt. Dann setzen wir die Produktformel (8.2.1) (mit  $A = H_0/\hbar$  und  $B = V/\hbar$ ) in die Formel für den Zeitentwicklungskern ein

$$\begin{aligned} K(t, q, q_0) &= \langle q | e^{-itH/\hbar} | q_0 \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle q | (e^{-itH_0/\hbar n} e^{-itV/\hbar n})^n | q_0 \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_{n-1} \prod_{j=0}^{j=n-1} \langle q_{j+1} | e^{-itH_0/\hbar n} e^{-itV/\hbar n} | q_j \rangle, \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

wobei  $q \equiv q_n$  und wir nach jeder Anwendung des Exponentialis eine Zerlegung der Eins,

$$\mathbf{1} = \int dq_j |q_j\rangle \langle q_j| \quad (8.2.11)$$

eingesetzt haben. Da das Potential in der Ortsdarstellung diagonal wirkt, gilt nun

$$\langle q_{j+1} | e^{-itH_0/\hbar n} e^{-itV/\hbar n} | q_j \rangle = e^{-itV(q_j)/\hbar n} \langle q_{j+1} | e^{-itH_0/\hbar n} | q_j \rangle. \quad (8.2.12)$$

Nun können wir den Zeitentwicklungskern des freien Teilchens (8.1.16) einsetzen und erhalten mit  $t/n = \epsilon$

$$\langle q_{j+1} | e^{-itH_0/\hbar n} e^{-itV/\hbar n} | q_j \rangle = \left( \frac{mn}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{i\epsilon}{\hbar} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 - V(q_j) \right) \right]. \quad (8.2.13)$$

Damit erhalten wir für den gesamten Zeitentwicklungskern die **Feynman-Kac Formel**

$$K(t, q, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_{n-1} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left[ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 - V(q_j) \right) \right]. \quad (8.2.14)$$

### 8.2.1 Die Interpretation als Pfadintegral

Das interessante an dieser Formel ist, dass sie eine Interpretation als Pfadintegral zulässt. Um das zu verstehen, stellen wir uns vor, dass die Punkte  $q = q_0, q_1, \dots, q_n$  durch gerade Linien miteinander verbunden sind, so dass wir eine stückweise lineare Funktion erhalten (siehe Abbildung 16). Wir teilen das Zeitintervall  $t$  in  $n$  Teilintervalle der Länge  $\epsilon = t/n$  und identifizieren  $q_k \equiv q(s = k\epsilon)$ . Der Exponent von (8.2.14) kann dann als Riemannsche Summe interpretiert werden, die im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  gerade zum Integral

$$\epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 - V(q_j) \right) \sim \int_0^1 ds \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{ds} \right)^2 - V(q(s)) \right] \quad (8.2.15)$$

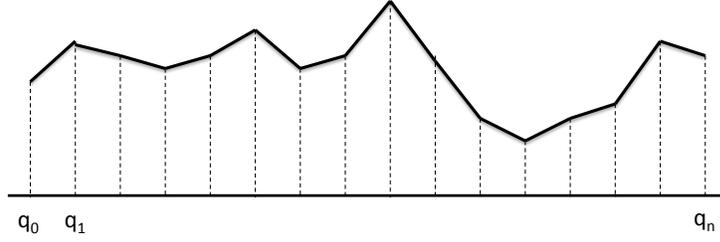


Abbildung 16: Interpretation als Pfadintegral.

konvergiert. Dieses Integral beschreibt genau die klassische Wirkung eines Teilchens (mit Masse  $m$ ), das sich auf diesem Pfad bewegt, denn der Integrand ist gerade die Lagrange-funktion

$$L(q(s), \dot{q}(s)) = \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{ds} \right)^2 - V(q(s)) , \quad (8.2.16)$$

deren Wirkung durch

$$S[q(s)] = \int_{s_0}^{s_1} ds L(q(s), \dot{q}(s)) \quad (8.2.17)$$

gegeben ist. Die Integrationen  $dq_1 \cdots dq_n$  bedeuten einfach, dass wir über alle möglichen (stückweise linearen) Pfade integrieren, die  $q_0$  und  $q$  miteinander verbinden. Im Limes  $n \rightarrow \infty$  werden die verschiedenen stückweise geraden Teile immer kürzer, und wir können jeden stetigen Pfad von  $q_0$  nach  $q$  auf diese Weise approximieren. Die obige Formel summiert also über alle möglichen Pfade, die zur Zeit  $t = 0$  bei  $q_0$  beginnen und zur Zeit  $t$   $q$  erreichen. Die verschiedenen Pfade werden dabei durch den Phasenfaktor

$$\exp \left[ i \frac{S[q(s)]}{\hbar} \right] \quad (8.2.18)$$

gewichtet. Formal schreibt man daher den Zeitentwicklungskern als

$$K(t, q, q_0) = C \int_{q(0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q e^{iS[q]/\hbar} , \quad (8.2.19)$$

wobei  $C$  der formale Ausdruck

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (8.2.20)$$

ist. Hierbei steht  $C \cdot \mathcal{D}q$  gerade für den Limes des Integrals von (8.2.14) für  $n \rightarrow \infty$ . Da das unendliche Produkt von Lebesgue Massen  $\prod dq_j$  kein Mass ist, hat  $\mathcal{D}q$  keine direkte mathematische Bedeutung, und man sollte diese Formel immer als durch (8.2.14) definiert verstehen (so wie das Riemannsche Integral ja auch als Limes der Riemann'schen Summe definiert ist). In vielen Fällen ist das Integral oft (formal) divergent; typischerweise

wird jedoch das Konvergenzverhalten verbessert, wenn man Wick-rotiert und mit einer Euklidischen Wirkung arbeitet.

Die wichtige Bedeutung der Pfadintegralformulierung besteht nicht so sehr darin, dass sie eine effiziente Methode beschreibt, die Quantenmechanik tatsächlich zu lösen. Vielmehr suggeriert sie eine Interpretation der Quantenmechanik als Summe über klassische Trajektorien. Dies ist von konzeptionellem Interesse und ermöglicht einem oftmals, gute quasiklassische Approximationen der Quantenmechanik zu finden. Ausserdem spielt die Pfadintegralbeschreibung für die moderne Formulierung der Quantenfeldtheorie eine wichtige Rolle.

Zum Beispiel kann man im Rahmen der Pfadintegralbeschreibung den klassischen Limes der Quantenmechanik gut verstehen. Wie wir schon manchmal gesehen haben, entspricht der klassische Limes dem formalen Limes  $\hbar \rightarrow 0$ . In diesem Limes oszilliert der Integrand von (8.2.19) immer stärker; wie bei der üblichen Methode der stationären Phase tragen dann tatsächlich nur jene Pfade zum Pfadintegral bei, für die der Exponent stationär ist. Da der Exponent gerade die Wirkung beschreibt, tragen also nur die Extrema der Wirkung zum Pfadintegral bei: das sind aber nach dem Extremalprinzip der Mechanik gerade die klassischen Bahnen (also die Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung)! Im klassischen Limes lokalisiert sich also das Pfadintegral gerade auf die klassischen Bahnen.

### 8.3 Der harmonische Oszillator

Zum Abschluss wollen wir noch ein einfaches Beispiel in diesem Rahmen berechnen, den harmonischen Oszillator. Wir betrachten ein Teilchen mit Masse  $m$  in einem Oszillator mit Kreisfrequenz  $\omega$ ; die zugehörige Lagrangefunktion ist also

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) . \quad (8.3.1)$$

Auf einer stückweise geraden Kurve ist dann die klassische Wirkung gerade

$$S[q] = \frac{m}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{\epsilon} (q_{j+1} - q_j)^2 - \epsilon \omega^2 q_j^2 \right] . \quad (8.3.2)$$

Für das Folgende ist es bequem, die  $(n-1)$ -dimensionalen Vektoren einzuführen,

$$\xi = (q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_1) , \quad \eta = (q, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-3}, q_0) . \quad (8.3.3)$$

In dieser Notation kann man dann die Wirkung als

$$S(\xi, \eta) = \frac{m}{2} \left[ \frac{1}{\epsilon} (\eta, \eta) + \frac{1}{\epsilon} (\xi, C \xi) - \frac{2}{\epsilon} (\xi, \eta) - \epsilon \omega^2 q_0^2 \right] \quad (8.3.4)$$

schreiben. Hierbei ist  $C$  die quadratische  $(n-1) \times (n-1)$  Matrix

$$C = \Delta - \epsilon^2 \omega^2 \mathbf{1}_{n-1} , \quad (8.3.5)$$

wobei die Matrix  $\Delta$  '2'en auf der Diagonalen, und '-1'en auf den beiden Nebendiagonalen hat. Die Matrix  $\Delta$  hat eine einfache Interpretation: sie wirkt gerade wie die diskretisierte zweite Ableitung auf dem Intervall.

Der Zeitentwicklungskern ist jetzt einfach das Gaussche Integral

$$K(t, q, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int d^{(n-1)}\xi \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S(\xi, \eta)}, \quad (8.3.6)$$

wobei  $S(\xi, \eta)$  durch (8.3.4) definiert ist. Als Funktion der Integrationsvariablen besitzt  $S(\xi, \eta)$  ein Extremum bei

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \xi} \right|_{\xi = \xi_{cl}} = 0 \iff C \xi_{cl} = \eta. \quad (8.3.7)$$

Wir entwickeln die Wirkung um dieses Extremum und erhalten

$$S(\xi_{cl} + \xi, \eta) = S(\xi_{cl}, \eta) + \frac{m}{2\epsilon} (\xi, C\xi), \quad S(\xi_{cl}, \eta) = \frac{m}{2\epsilon} ((\eta, \eta) - (\eta, C^{-1}\eta) - \omega^2 \epsilon^2 q_0^2), \quad (8.3.8)$$

da die Extremalbedingung gerade die Terme linear in  $\xi$  entfernt. Nun benützen wir die wichtige Formel (eine einfache Verallgemeinerung der üblichen Gausschen Integrationsformel)

$$\int d^p \xi e^{-\frac{1}{2}(\xi, B\xi)} = \frac{(2\pi)^{p/2}}{\sqrt{\det(B)}}, \quad (8.3.9)$$

wobei  $B$  eine beliebige  $p \times p$  Matrix mit positivem Realteil ist. Damit erhält man für den Zeitentwicklungskern

$$K(t, q, q_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \det(C)}} e^{iS(\xi_{cl}, \eta)/\hbar}. \quad (8.3.10)$$

Es bleibt, die Determinante von  $C$ , sowie das Matrixelement  $(\eta, C^{-1}\eta)$  zu berechnen. Für die Determinante von  $C$  beobachten wir, dass  $C$  die Form

$$C = \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & \mu & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \mu & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu = 2 - \epsilon^2 \omega^2 \quad (8.3.11)$$

hat. Wir bezeichnen die Determinante einer solchen  $p \times p$  Matrix durch  $d_p$ . Entwickeln nach der ersten Reihe führt auf die Rekursionsrelation

$$d_p = \mu d_{p-1} - d_{p-2}. \quad (8.3.12)$$

Ausserdem haben wir den Rekursionsanfang  $d_1 = \mu$  und  $d_0 = 1$ . Es ist nicht schwer, diese Rekursion zu lösen und man findet

$$\det(C) = d_{n-1} = \frac{\sin(\frac{1}{2}n\beta)}{\sin(\frac{1}{2}\beta)}, \quad \text{wobei} \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{\mu}{2}. \quad (8.3.13)$$

Nun entwickeln wir das Resultat für kleine  $\epsilon$ ; da  $\mu = 2 - \epsilon^2 \omega^2$  gilt

$$\cos \frac{\beta}{2} = 1 - \frac{1}{2}(\epsilon \omega)^2 \quad (8.3.14)$$

und daher ist

$$e^{i\beta} = e^{2i\epsilon\omega} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (8.3.15)$$

Für kleine  $\epsilon$  können wir also  $\beta$  durch  $2\epsilon\omega$  ersetzen. Daher ist die Determinante von  $C$  für kleine  $\epsilon$  einfach

$$\det(C) = \frac{\sin(n\epsilon\omega)}{\sin(\epsilon\omega)} + \mathcal{O}(1) = \frac{\sin \omega t}{\epsilon \omega} + \mathcal{O}(1). \quad (8.3.16)$$

Die Determinante divergiert also für  $\epsilon \rightarrow 0$ ; diese Divergenz wird aber durch den Faktor von  $\epsilon$  in (8.3.10) entfernt.

Es bleibt das Matrixelement  $(\eta, C^{-1}\eta)$  der klassischen Wirkung zu berechnen. Da nur der erste und letzte Eintrag von  $\eta$  von Null verschieden sind, tragen nur die Eckelemente von  $C^{-1}$  bei, die wegen der üblichen Inversenformel die Form

$$C^{-1} = \frac{1}{d_{n-1}} \begin{pmatrix} d_{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \cdots & d_{n-2} \end{pmatrix} \quad (8.3.17)$$

haben. Das Verhältnis der Determinanten  $d_{n-1}$  und  $d_{n-2}$  ist dabei

$$\frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} = 1 - \epsilon \omega \cot(\omega t) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (8.3.18)$$

Einsetzen dieser Identitäten in (8.3.10) führt dann schliesslich zu

$$K(t, q, q_0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega t)}} \exp \left[ \frac{im\omega}{2\hbar} \left( (q^2 + q_0^2) \cot(\omega t) - \frac{2q q_0}{\sin(\omega t)} \right) \right]. \quad (8.3.19)$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Funktion die Schrödingergleichung (8.1.13) erfüllt. Weiterhin sieht man direkt, dass für  $t \rightarrow 0$  die obige Formel sich zum Zeitentwicklungskern (8.1.16) der freien Theorie vereinfacht — dies impliziert daher sofort, dass (8.3.19) die richtige Deltafunktion-Anfangsbedingung (8.1.14) erfüllt. Unsere Rechnung (und insbesondere die Normierung — siehe die Fussnote in Kapitel 8.2.1) war also richtig!

Man beobachtet, dass der Zeitentwicklungskern nicht für alle  $q, q_0$  und  $t$  definiert ist. Dieses Problem kann man aber durch Verschmieren mit einem Wellenpaket lösen. Insbesondere ist ja die Wellenfunktion zur Zeit  $t$  am Ort  $q$  einfach

$$\Psi(t, q) = \int dq_0 K(t, q, q_0) \Psi_0(0, q_0), \quad (8.3.20)$$

und für geeignete Anfangsbedingungen  $\Psi_0$  ist das Integral konvergent.

## Literatur

- [S1] F. Schwabl, *Quantummechanik*, Springer.
- [S2] F. Schwabl, *Quantummechanik für Fortgeschrittene*, Springer.
- [Sa] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison Wesley.
- [LL] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Quantenmechanik III*, Harri Deutsch
- [M] A. Messiah, *Quantum Mechanics I & II*, North Holland.
- [H] K. Huang, *Statistical mechanics*, John Wiley & Sons.